

Modélisation micromécanique du mécanisme de Greenwood-Johnson de la plasticité de transformation

Y. EL MAJATY #1^a, J-B. LEBLOND #2^a, R. BRENNER #3^a

a. Sorbonne Université, Centre National de la Recherche Scientifique, UMR 7190, Institut Jean Le Rond d'Alembert, F-75005 Paris, France ; #1 youssri@dalembert.fr ; #2 jbl@lmm.jussieu.fr ; #3 renald.brenner@upmc.fr

Résumé :

Le travail porte sur la modélisation du mécanisme de Greenwood-Johnson [1] de la plasticité de transformation pour les métaux et alliages, primordial pour améliorer les simulations numériques de procédés thermomécaniques à haute température, telle que le soudage. En ce sens, un modèle a été développé en 1989 par Leblond et al. [2], fondé sur une approche micromécanique simplifiée. Bien que très utilisé dans les codes d'élément finis, cette loi se restreint toutefois à l'application de contraintes faibles. Nous proposons dans cette étude un nouveau traitement théorique plus rigoureux, qui repose sur une combinaison des théories de l'analyse limite et de l'homogénéisation. Dans cette nouvelle analyse la cellule unitaire représentative considérée ne comporte plus que la phase mère subissant la déformation plastique. Ainsi, le nouveau modèle consiste dans une sphère creuse avec un chargement externe résultant de la contrainte macroscopique appliquée et un chargement interne résultant du processus de croissance du noyau. Ceci conduit à une formulation plus complète de la déformation de la plasticité de transformation par rapport au modèle classique de Leblond [2]. En effet, la nouvelle formulation nous permet de décrire des effets connus expérimentalement que l'ancienne analyse ne pouvait pas appréhender, comme la croissance non-linéaire de la déformation de plasticité de transformation en fonction de la contrainte appliquée. Afin d'évaluer la consistance de la présente théorie ainsi que l'améliorer, des calculs numériques sont réalisés. Les calculs par la méthode des éléments finis considèrent un volume représentatif identique à celui de la théorie classique (sphère pleine), des premiers résultats de ces travaux sont regroupés dans l'article [3] et montrent les capacités du modèle et ses limites. Enfin, dans le but de rendre le modèle numérique plus pertinent et réaliste, nous simulons la germination et la croissance progressive de plusieurs germes répartis aléatoirement dans un grand volume de phase mère, afin de rendre compte des effets d'interaction et de répartition spatiale des germes. Pour ce deuxième type de simulations numériques nous utilisons la méthode FFT proposée par Moulinec et Suquet [4], plus adaptée aux calculs d'homogénéisation numériques. Cette méthode a par exemple été mise en oeuvre pour décrire l'effet TRIP, dans le contexte de la plasticité cristalline [5]. La méthodologie présentée ouvre la voie à l'incorporation, dans un futur travail, aux effets d'anisotropies de type morphologique (liés à la croissance dans certaines directions préférentielle des noyaux de phase fille) lors de la plasticité de transformation.

Abstract :

We propose an innovative treatment of Greenwood-Johnson's [1] mechanism of transformation plasticity of metals and alloys, based on the neglect of elasticity and the powerful kinematic method of limit-analysis. This work allow to improve numerical simulations of thermomechanical processes, such as welding or queching. In this purpose, Leblond et al. [2] had developed a model based on a simplified micromechanical approach, restricted to the application of low stress. In the new approach the representative unit cell considered in the homogenization process includes only the mother-phase surrounding a growing nucleus of daughter-phase. Thus the new model consists of a hollow sphere under loading, the external loading arising from the macroscopic stress applied and an internal one arising from the volumetric transformation strain of the enclosed nucleus. The treatment brings considerable improvement regarding classical one model of Leblond [2], not only by eliminating the need for ad-hoc hypotheses of limited validity, but more importantly by extending its results to more general situations involving large external stresses, comparable in magnitude to the yield stress of the weaker phase. Furthermore, this new formulation describes experimentally renowned effects that the old analysis could not show, such as the non-linear growth effect of the plasticity of transformation according to the applied stress. The theoretical results are compared to other theories, experiments, finite element micromechanical simulations. The first results of this work are regrouped in the article [3] and show the capacities of the model and its limits. To be able to envisage a more realistic situation, we carried out microstructure calculations for a distribution of the germs of the daughter phase. This allows to highlights the effects of interaction and spatial distribution of seeds. These calculations are performed using a numerical scheme by FFT [4,5], in order to evaluate the relevance of the new model. In addition, the methodology presented paves the way to incorporation, in a future work, of the effect of anisotropies of morphologic type upon transformation plasticity ; this will be done through consideration of growing nuclei of daughter-phase of more general, spheroidal instead of spherical shape.

Mots clés : plasticité de transformation, méthode à base de FFT, transformations de phases, mécanisme de Greenwood-Johnson.

1 Introduction

La plasticité de transformation se produit au cours des processus de traitement thermomécanique des aciers et alliages, telle que le soudage ou la trempe. Ces procédés génèrent des contraintes qui modifient significativement le comportement mécanique à l'échelle macroscopique (Miyao *et al.* [6], Fukumoto *et al.* [7], Taleb *et al.* [8]). Il est donc primordial de modéliser le phénomène de plasticité de transformation.

Il est communément admis que la plasticité de transformation s'explique par deux principaux mécanismes, l'un proposé par Greenwood et Johnson [1] (mécanisme displacif) et l'autre par Magee [9] (mécanisme diffusif). Dans ces travaux, nous nous concentrerons seulement sur le mécanisme de Greenwood-Johnson, qui est plus approprié à l'utilisation de notions purement mécaniques, contrairement au mécanisme de Magee qui fait intervenir un couplage métallurgique impliquant des paramètres *ad hoc*.

Le modèle constitutif du mécanisme de Greenwood-Johnson est dû à Leblond *et al.* [10]&[2]. Ce modèle est bien vérifié seulement pour le cas de contraintes faibles. Quelques années plus tard, cette approche

théorique a été améliorée (Diani *et al.* [11], Cherkaoui *et al.* [12], Taleb et Sidoroff [13], Fischlschweiger *et al.*, [14], Weisz-Parault [15]). Cependant, malgré ces efforts, le modèle reste essentiellement le même et manque de généralité.

Récemment, un nouveau traitement plus rigoureux du mécanisme de Greenwood-Johnson de la plasticité de transformation a été proposé par El Majaty *et al.* [3]. Cette analyse est fondée sur les théories de l'homogénéisation de Mandel [16] - Hill [17] et de l'analyse limite. Dans ce traitement innovant, la cellule unitaire représentative considérée dans le processus d'homogénéisation comprend uniquement la phase mère. Ce traitement apporte une amélioration considérable par rapport au modèle classique de Leblond [2], non seulement en éliminant la nécessité d'hypothèses déficientes, mais surtout en étendant les résultats à des situations plus générales impliquant des contraintes externes importantes, comparables à la limite d'élasticité de la phase la plus faible.

Dans cet article, nous évaluons la pertinence du nouveau modèle grâce à deux méthodes de simulation numérique du mécanisme de Greenwood-Johnson. Nous effectuons d'une part, des calculs numériques par la méthode des éléments finis dans le cas de monogermes et d'autre part nous utilisons une méthode numérique à base de FFT plus appropriée pour les simulations de multigermes.

L'article est organisé de la manière suivante :

1) La section 2 présente brièvement le nouveau traitement de la plasticité de transformation, combinant les théories de l'analyse limite et de l'homogénéisation. Cette approche repose sur la généralisation de Monchiet *et al.* [18], de l'analyse du problème classique de Gurson [20], fondée sur les champs de vitesses tests de type Eshelby [19].

2) La section 3 est consacrée aux résultats et comparaisons de la nouvelle théorie avec les simulations micromécaniques par éléments finis et d'un essai expérimental.

3) La section 4 est consacrée aux résultats et comparaisons de la nouvelle théorie avec les simulations micromécaniques à base de FFT.

2 Rappel de la nouvelle approche micromécanique de la plasticité de transformation

Le modèle de Leblond *et al.* [2] a été construit sur l'hypothèse d'un comportement rigide parfaitement plastique. Il est donc naturel d'utiliser l'analyse limite, qui est une approche variationnelle permettant de déterminer des états limites de structures rigides parfaitement plastiques, pour un traitement alternatif. Mais cela n'est pas suffisant, l'analyse limite traite de matériau passif, il reste donc le problème de la prise en compte du mécanisme interne qui est l'expansion du noyau de phase fille au sein de la matrice de phase mère. La solution proposée inclut donc uniquement la phase mère du VER, et le mécanisme interne est remplacé par des conditions de contrainte homogène (résultant de l'expansion du noyau) sur le bord intérieur de ce nouveau VER (voir figure 1). Ainsi, le nouveau modèle consiste dans une sphère creuse soumise à un double chargement, un chargement externe résultant de la contrainte macroscopique appliquée et à un chargement interne provenant du changement de volume du germe en transformation.

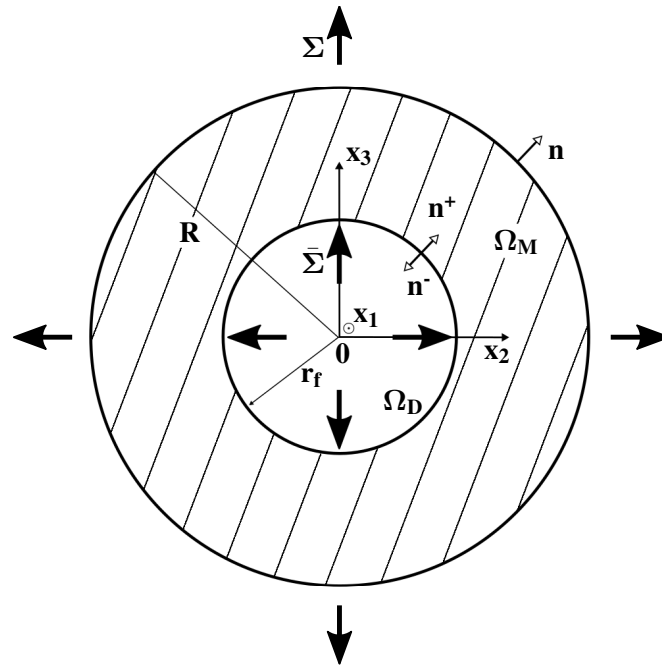


FIGURE 1 – Nouveau VER adapté pour un traitement par analyse limite

Dans ce nouveau VER, les rayons interne et externe sont respectivement notés r_f et R . L'ensemble du domaine, la sphère creuse et la sphère interne sont désignés par Ω , Ω_M et Ω_D respectivement. Les limites internes et externes de Ω_M sont $\partial\Omega$ et $\partial\Omega_D$ respectivement, et sont soumis à des conditions de contrainte homogène au bord (Mandel [16], Hill [17]) :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) & \text{sur } \partial\Omega \quad (r = R) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^-(\mathbf{x}) = -\bar{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{n}^-(\mathbf{x}) & \text{sur } \partial\Omega_D \quad (r = r_f) \end{cases} \quad (1)$$

où $\boldsymbol{\Sigma}$ et $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ sont des tenseurs symétriques d'ordre deux, le premier représente la contrainte macroscopique appliquée au volume considéré et le second un chargement interne.

On définit les tenseurs de déformation macroscopique externe et interne \mathbf{E} , $\bar{\mathbf{E}}$ par le théorème de Green :

$$E_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{2} (u_i n_j + u_j n_i) dS \quad ; \quad \bar{E}_{ij} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\partial\Omega_D} \frac{1}{2} (u_i n_j^+ + u_j n_i^+) dS \quad (2)$$

Avec les conditions aux limites (1) et l'équation (2), la puissance virtuelle des efforts extérieurs \mathcal{P}_e est donnée par :

$$\mathcal{P}_e = \text{vol}(\Omega) \boldsymbol{\Sigma}_{ij} \dot{\mathbf{E}}_{ij} + \text{vol}(\Omega_D) \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_{ij} \dot{\bar{\mathbf{E}}}_{ij} = \text{vol}(\Omega) \left(\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} + \bar{\boldsymbol{\Sigma}} : \bar{\mathbf{E}} \right) \quad (3)$$

Le nombre minimal de champs de déplacements tests incompressibles requis doit tenir compte de toutes les valeurs possibles des paramètres cinématiques $E_1, E_2, E_3, \bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3$. Mais puisque ces 6 paramètres sont reliés par la relation,

$$\text{tr}\mathbf{E} = f \text{tr}\bar{\mathbf{E}} \quad (4)$$

résultant de l'incompressibilité de la phase mère, il y a seulement 5 paramètres cinématiques indépendants. L'analogie avec les problèmes de rupture ductile est alors exploitée.

Dans un premier temps, nous considérons les mêmes champs de vitesses tests de Gurson [20] issues des travaux en rupture ductile sur des VER sphériques creux soumis à des chargement externes. Mais puisque ici les conditions aux limites concerne aussi l'intérieur du VER, du fait du chargement interne, nous utilisons, en plus des champs élémentaires introduits par Gurson [20], des champs plus complexes de type Eshelby [19], proposés par Monchiet et al.[18]. Ainsi, trois catégories de champs de vitesses tests sont utilisés : (i) un champ incompressible d'expansion de la sphère ; (ii) deux champs de taux de déformation déviatorique uniforme (un axisymétrique et l'autre non-axisymétrique) ; (iii) deux champs de type Eshelby [19] (un axisymétrique et l'autre non-axisymétrique), empruntés aux travaux de Monchiet *et al.* [18]. Après avoir injecté ces cinq champs $\mathbf{u}^{(i)}$ ($i = 1, 5$) dans l'équation (2) nous calculons ensuite les tenseurs de déformation externe et interne macroscopique correspondant aux 5 champs $\mathbf{E}^{(i)}$ et $\bar{\mathbf{E}}^{(i)}$ ($i = 1, 5$).

Dans un second temps, le calcul de la dissipation plastique est principalement le même que dans les travaux de Monchiet *et al.* [18], mais nous obtenons ici un critère à trois paramètres dû au chargement interne :

$$\Phi(\Sigma, \bar{\Sigma}, f) = \frac{T_{eq}^2}{\bar{\sigma}_M^2} + 2f \cosh\left(\frac{S_H}{\bar{\sigma}_M^2}\right) - 1 - f^2 = 0, \quad S_H \equiv \left[\frac{1}{4} (\text{tr} \mathbf{S}^2) + \frac{2}{3g(f)} \mathbf{S}_{eq}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

avec,

$$\mathbf{S} \equiv \Sigma + \bar{\Sigma}, \quad \bar{\mathbf{T}} \equiv \Sigma + f\bar{\Sigma} \quad \text{et} \quad g(f) = 1 - 4f \frac{(1 - f^{2/3})^2}{1 - f} \quad (6)$$

Le critère obtenus est alors exploité différemment, nous l'appliquons au mécanisme de Greenwood-Johnson de la plasticité de transformation. Le principe repose sur la considération de VER en cours de transformation soumis à (i) un chargement externe Σ ; (ii) un taux de déformation interne $\dot{\bar{\mathbf{E}}}$ résultant de l'expansion du germe, dont les données du problème sont Σ et $\dot{\bar{\mathbf{E}}}$, les inconnus sont Σ , $\dot{\bar{\mathbf{E}}}$ et $\dot{\Lambda}$ (avec $\dot{\Lambda}$ le multiplicateur plastique de la dissipation plastique). D'une part, la quantité recherchée est $\dot{\bar{\mathbf{E}}}$, d'autre part $\bar{\Sigma}$ et $\dot{\Lambda}$ sont des auxiliaires du problème. Les équations disponibles pour déterminer les inconnues sont le critère (équation 5) et les deux lois d'écoulement plastique obtenus par le calcul de la dissipation plastique. Après calculs, nous obtenons la formule général du taux de déformation de plasticité de transformation :

$$\dot{\bar{\mathbf{E}}}^{\text{tp}} = \frac{4}{9\bar{\sigma}_M} \frac{\Delta V}{V} \frac{1-f}{fg(f)} \frac{\bar{X}/X - 1}{Y} \Sigma' \dot{j} \quad (7)$$

$$X = \frac{\Sigma_{eq}}{\bar{\sigma}_M}; \quad \bar{X} = \frac{\bar{\Sigma}_{eq}}{\bar{\sigma}_M}; \quad Y = \frac{1}{3} \frac{\text{tr} \mathbf{S}}{\bar{\sigma}_M} \quad (8)$$

avec $\bar{\sigma}_M$ la limite d'élasticité de la phase mère, $\frac{\Delta V}{V}$ la variation de volume des phases et f la fraction volumique de la phase fille.

3 Comparaisons avec la méthode des éléments finis

Des simulations numériques du mécanisme de Greenwood-Johnson [1] sont effectuées sur le même type de VER sphérique que celui considéré dans l'étude théorique de Leblond *et al.* [2], qui consiste en un volume sphérique contenant un seul germe de phase fille croissant. Ce volume sphérique est constitué d'un matériau à comportement élasto-plastique, discrétisé en plusieurs couches sphériques concentriques. Les couches sont "transformées" les unes après les autres du centre jusqu'à la surface extérieure de la sphère

pleine, en modifiant successivement les valeurs du volume spécifique et de la limite d'élasticité du matériau. Les calculs sont effectués à l'aide du code SYSWELD[®].

Nous simulons le cas de chargement de traction simple afin d'étudier les deux aspects suivant (i) l'évolution de la transformation donnée par la fonction Φ qui évolue entre 0 et 1 en fonction de la fraction de phase fille f (calculée pour une contrainte équivalente faible de 20MPa) :

$$\Phi(f) = \frac{E^{tp}(f)}{E^{tp}(1)} \quad (9)$$

et (ii) l'amplitude de la déformation plastique après transformation complète, caractérisée par la valeur de la plasticité de transformation en fin de transformation en fonction de la contrainte appliquée :

$$E^{tp}(1) = K\Sigma \quad (10)$$

Les éléments de comparaisons sont :

- La nouvelle formulation de $\dot{\mathbf{E}}^{tp}$ fondée sur la théorie de l'analyse limite, (voir équation 7).
- L'expérience de Desalos [21], effectué sur une éprouvette en acier de type A533 soumis à un chargement uniaxial et constant.
- Les calculs de simulation par élément finis (EF) pour des conditions de contrainte homogène au bord (noté HBStress) et de déformation homogène au bord (noté HBStrain).

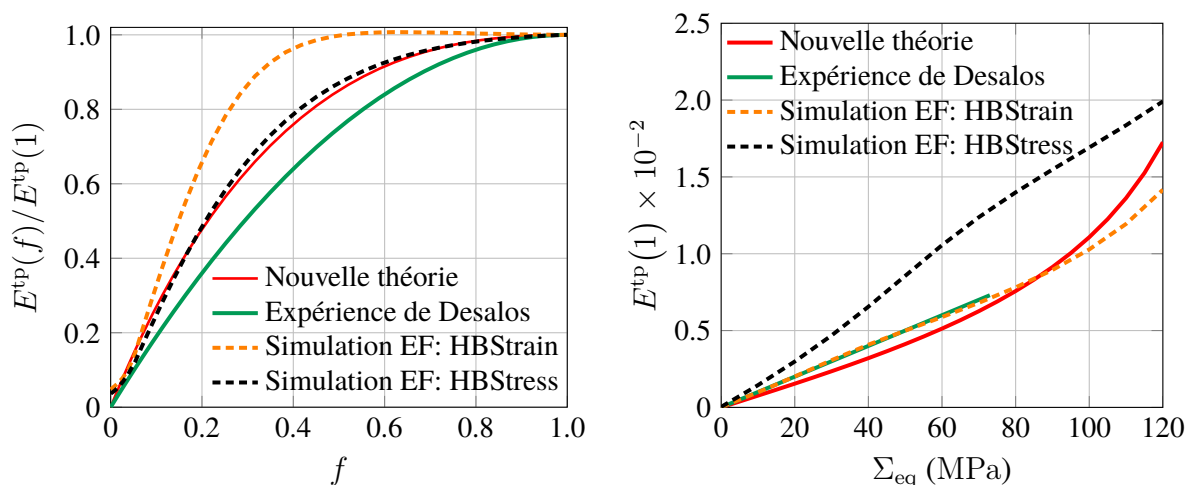


FIGURE 2 – Figure à gauche : Comparaison de l'évolution de la transformation ; Figure à droite : Comparaison de la déformation de plasticité de transformation pour une transformation complète en fonction de la contrainte appliquée.

Les observations de la figure de gauche indiquent que pour l'évolution de la transformation, les résultats obtenus par éléments finis avec des conditions de contrainte homogène au bord concordent mieux avec le résultat théorique et expérimental que ceux obtenus avec des conditions de déformation homogène au bord. Cependant, la figure de droite montre que les valeurs de déformation de la plasticité de transformation en fin de transformation, pour des conditions de déformation homogène au bord donnent maintenant de meilleurs résultats que les conditions de contrainte homogène au bord. Sur cette figure, les prédictions de la nouvelle théorie reproduisent en particulier assez bien l'effet de non linéarité de la déformation de plasticité de transformation en fonction de la contrainte appliquée.

Un troisième aspect intéressant qui mérite d'être vérifié est la prédiction de notre formule générale vis à vis de la colinéarité du taux de déformation de plasticité de transformation et du déviateur de contrainte. Pour cela nous regardons le rapport des composantes tensorielles noté r en fonction de la fraction de phase fille f pour un chargement triaxial d'amplitude faible (les figures de gauche) et forte (les figures de droite) pour deux types de conditions : des conditions de déformation homogène au bord (figure 4) et des conditions de contrainte homogène au bord (figure 5) :

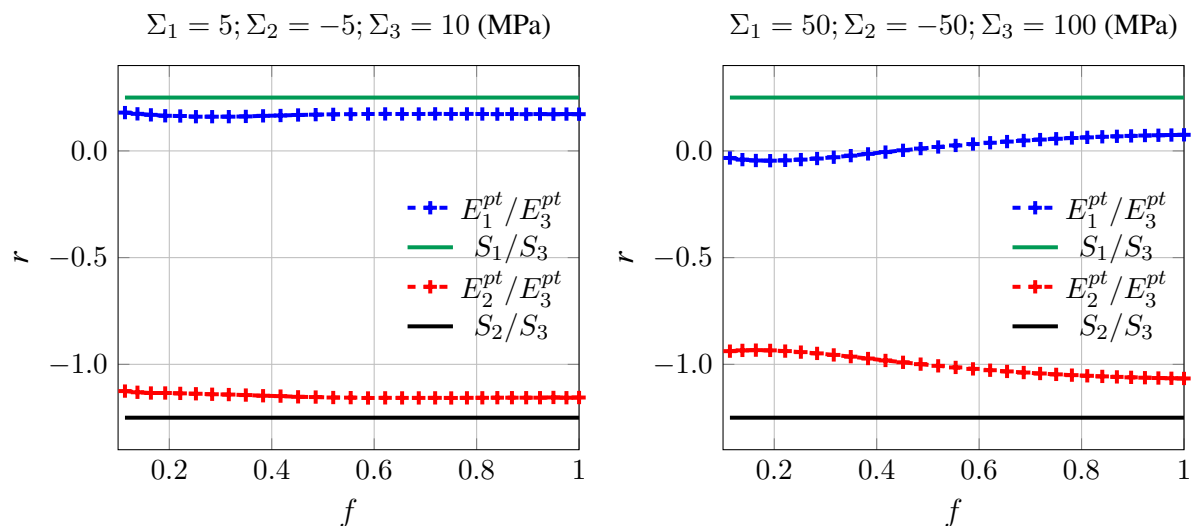


FIGURE 3 – Chargement triaxial en condition de contrainte homogène au bord

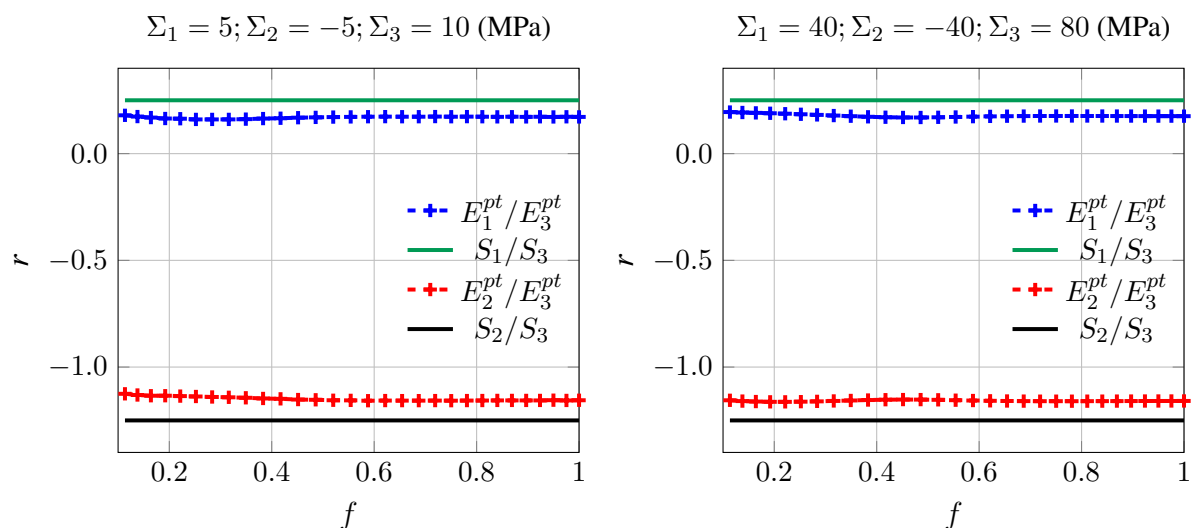


FIGURE 4 – Chargement triaxial en condition de déformation homogène au bord

Nous constatons que la propriété de colinéarité est bien vérifiée, surtout pour des conditions de déformation homogène au bord, le nouveau modèle proposé est donc valide pour des chargements triaxiaux. De manière générale, la différence entre les résultats obtenus avec des conditions de contrainte et de déformation homogène au bord souligne l'influence des conditions au bord, ce qui montre les limites d'une approche basée sur ce type de VER modeste, caractérisé par son petit volume sphérique de phase mère

contenant un seul germe croissant de phase de fille. Ainsi, cela nous conduit à effectuer des simulations plus réalistes sur un plus grand VER contenant de nombreux germes de phase fille.

4 Comparaisons avec la méthode FFT

La méthode basée sur la FFT est une alternative très attrayante à la méthode des éléments finis. Le principal intérêt des approches FFT réside dans le moindre coût de temps de calcul numérique. Cette méthode a été initialement introduite par Moulinec et Suquet [4] pour résoudre numériquement l'équation intégrale LIPMANN-SCHINWGER qui s'appuie sur la méthode des fonctions de Green.

Nous présentons les comparaisons des calculs numériques à base de FFT avec la nouvelle théorie dans le cas d'une traction simple. Nous comparons toujours les deux aspects suivant (i) l'évolution de la transformation (pour 20MPa) et (ii) l'amplitude de la déformation plastique après transformation complète.

Les éléments de comparaisons sont :

- La nouvelle formulation de $\dot{\mathbf{E}}^{\text{tp}}$ obtenue par analyse limite, (voir équation (2)).
- Les calculs de simulation par la méthode à base de FFT constituée de condition périodique.

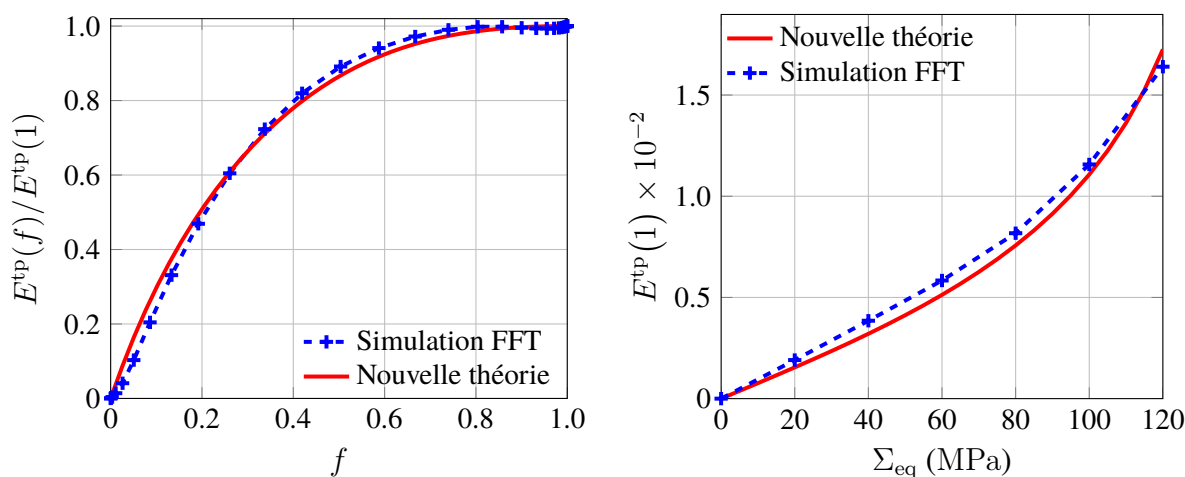


FIGURE 5 – Figure à gauche : Comparaison de l'évolution de la transformation ; Figure à droite : Comparaison de la déformation plastique après transformation complète.

Les deux aspects étudiés numériquement avec la méthode FFT s'accordent extrêmement bien avec les prédictions analytiques fondée sur l'analyse-limite. Les effets des interactions entre les germes de phase fille croissant dans un grand VER cubique équipé de condition périodique induisent un meilleur accord avec notre nouvelle théorie qu'avec un simple VER sphérique de taille plus petite contenant un seul germe de phase fille croissant.

5 Conclusions et perspectives

Le but principal de cette étude était de vérifier la persistance du nouveau modèle théorique à travers des calculs plus réaliste que ceux effectués par élément finis. Dans un premier temps la nouvelle approche théorique du mécanisme de plasticité de transformation de Greenwood-Johnson [1], basée sur les méthodes d'analyse limite et d'homogénéisation à été rappelée. Les résultats de cette nouvelle théorie confirment ceux de Leblond *et al.* [2], et les étends au cas de fortes contraintes externes appliquées. Cette nouvelle formulation permet aussi d'oublier les hypothèses excessives introduites dans le premier

modèle et de corriger la singularité du taux de déformation de la plasticité de transformation au début de la transformation. D'autre part, les premiers calculs de simulation micromécanique par éléments finis ont été rappelés et montrent la différence entre les résultats obtenus avec des conditions de contrainte homogène au bord et de déformation homogène au bord, cela souligne l'influence des conditions aux limites et met en évidence les limites d'une approche basée sur un simple VER sphérique de phase mère contenant un seul germe de phase fille en croissance. Dans un second temps, cela nous a amené à effectuer des simulations plus réalistes sur un plus grand VER contenant une multitude de germes de phase fille croissants. Les résultats numériques obtenus concordent parfaitement bien avec la nouvelle théorie sur deux aspects importants : l'évolution de la déformation plastique de transformation et les valeurs finales de transformation de la déformation plastique. Cela met en évidence l'influence des interactions entre les germes. De plus, les conditions périodiques utilisées éliminent le problème rencontré sur l'influence des conditions de contrainte et de déformation homogène au bord.

Ce travail ouvre la voie à plusieurs perspectives, théoriques, numériques mais aussi expérimentales. Une des perspectives est de raffiner le critère général approximatif par l'ajout de champs de vitesses tests supplémentaires. Mais l'aspect le plus prometteur est l'extension du nouveau modèle à la croissance sphéroïdale de germes de phase fille. Cela devrait permettre de modéliser les effets liés aux anisotropies morphologiques des germes. Des calculs numériques sur ces nouveaux aspects de forme de germe (sphéroïde allongé et aplati) sont alors à prévoir pour évaluer à nouveau le modèle fondée sur l'analyse limite. Afin d'enrichir la modélisation nous effectuerons une confrontation avec des essais expérimentaux. Ces expériences consistent en des tests de dilatométrie libre et chargé sur des éprouvettes de l'acier A533 à l'aide d'un analyseur thermomécanique.

6 Annexe : Comparaisons des méthodes

Nous comparons ici les deux méthodes (FFT et EF) à travers les résultats obtenus dans le cas d'une croissance d'un seul germe de phase fille centré dans un VER cubique de phase mère, avec des conditions périodiques au bord et pour différent cas de chargements (40MPa, 80MPa et 120MPa).

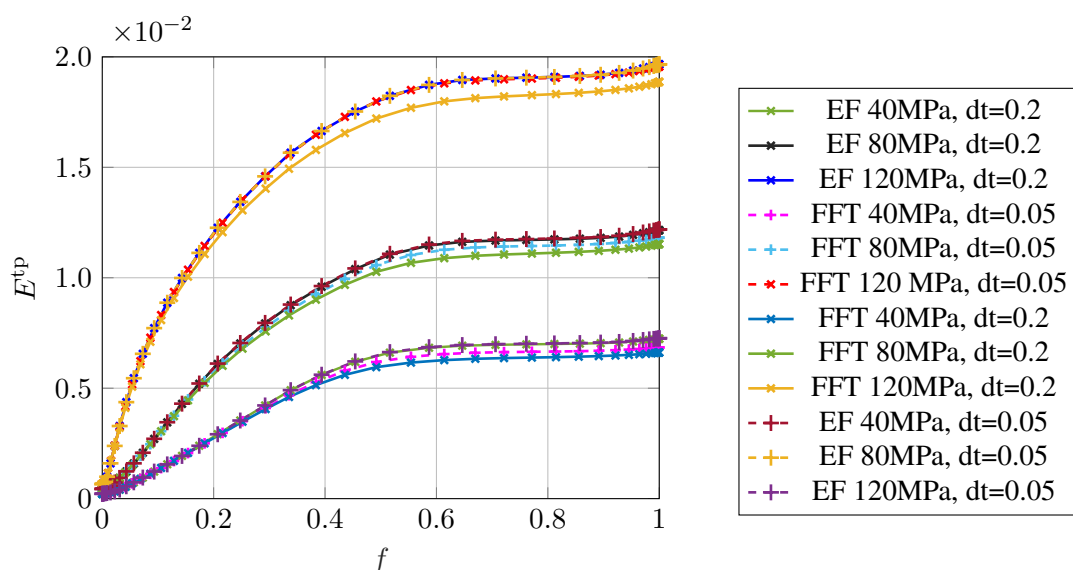


FIGURE 6 – Comparaison de l'évolution de la transformation ; Figure à droite : Comparaison de la déformation plastique après transformation complète.

Nous constatons que les deux méthodes concordent vers des réponses similaires de la déformation de plasticité de transformation. Les résultats FFT concordent mieux lorsque le sous pas de temps dt de la transformation d'une couche est plus petite. Cette étude nous permet de valider l'utilisation de la méthode FFT.

Références

- [1] G.W. Greenwood and R.H. Johnson. The deformation of metals under small stresses during phase transformations. *In Proceedings of the Royal Society of London*, 283 :403–422, 1965.
- [2] J.B. Leblond, J. Devaux and J.C. Devaux. Mathematical modeling of transformations plasticity in steels I : case of ideal-plastic phases. *International journal of plasticity*, 5 :551–572, 1989.
- [3] E. Youssri, J.B. Leblond and D. Kondo. A novel treatment of Greenwood-Johnson's mechanism of transformation plasticity - Case of spherical growth of nuclei of daughter-phase. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Volume 121, December 2018, Pages 175-197.
- [4] H. Moulinec and P. Suquet. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. , 157 :69–94, 1998.
- [5] T. Otsuka, R. Brenner and B. Bacroix FFT-based modeling of transformation plasticity in polycrystalline materials during diffusive phase transformation. , 127 :92–13, 2018.
- [6] K. Miyao, Z.G. Wang, T. Inoue. Analysis of temperature, stress and metallic structure in carburized-quenched gear considering transformation plasticity. *J. Soc. Mater. Sci. Japan*, 35, 1352–1357, 1986.
- [7] M. Fukumoto, M. Yoshizaki, H. Imataka, K. Okamura. Three-dimensional FEM analysis of helical gear subjected to the carburized quenching process. *J. Soc. Mater. Sci. Japan*, 50, 598–605, 2001.
- [8] L. Taleb, S. Petit, J.F. Jullien. Prediction of residual stresses in the heat-affected zone. *J. Physique IV*, 120, 705–712, 2014.
- [9] C.L Magee. Transformation kinetics, microplasticity and ageing of martensite in Fe-31 Ni. *Carnegie-Mellon University, Pittsburgh Ph.D thesis*, 1966.
- [10] J.B. Leblond, G. Devaux, J.C Devaux. A theoretical and numerical approach to the plastic behaviour of steels during phase transformation - I. derivation of general relations. *J. Mech Phys. Solids*, 34, 395–409, 1986a.
- [11] J.M. Diani, H. Sabar, M. Berveiller. Micromechanical modelling of the transformation induced plasticity (TRIP) phenomenon in steels. *Int. J. Engng. Sci.*, 33, 1921–1934, 1995.
- [12] M. Cherkaoui, M. Berveiller, X. Lemoine. Coupling between plasticity and martensitic phase transformation : overall behavior of polycrystalline TRIP steels. *Int. J. Plasticity*, 16, 1215-1241, 2000.
- [13] L. Taleb, F. Sidoroff. A micromechanical modeling of the Greenwood-Johnson mechanism in transformation induced plasticity. *Int. J. Plasticity*, 19, 1821-1842, 2003.
- [14] M. Fischlschweiger, G. Cailletaud, T. Antretter. A mean field model for transformation induced plasticity including backstress effects for non-potential loadings. *Int. J. Plasticity*, 37, 53–71, 2012.
- [15] Weisz-Paltrault. Multiphase model for transformation induced plasticity. Extended Leblond's model. *J. Mech. Phys. Solids*, 106, 152–175, 2017.

- [16] J. Mandel. Contribution théorique à l'étude de l'écroutissage et des lois de l'écoulement plastique. *In : Proc. 11th Int. Congr. on Applied Mechanics, Munich*, pp. 502–509, 1964.
- [17] R. Hill. The essential structure of constitutive laws of metal composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 15, 79–95, 1967.
- [18] V. Monchiet, E. Charkaluk, D. Kondo. A micromechanics-based modification of the Gurson criterion by using Eshelby-like velocity fields. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 30, 940–949, 2011.
- [19] J. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoid inclusion, and related problems. *Proc. Roy. Soc. London, A* 241, 376–396.
- [20] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I - yield criteria and flow rules for porous ductile media. *ASME J. Engng. Mater. Technol.*, 99, 2–15.
- [21] Y. Desalos. Comportement dilatométrique et mécanique de l'austénite métastable d'un acier A533. *IRSID report 95349401*,