

# L'instabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille plan stratifié

P. Le Gal<sup>a</sup>, U. Harlander<sup>b</sup>, I. D. Borcia<sup>b</sup>, S. Le Dizes<sup>a</sup>, J. Chen<sup>a</sup>, B. Favier<sup>b</sup>

a. Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE,  
Marseille, France - legal@irphe.univ-mrs.fr

b. Department of Aerodynamics and Fluid Mechanics, Brandenburg Univ. of Technology,  
Cottbus, Germany - haruwe@b-tu.de

...

## Résumé :

*Nous présentons ici la première étude - à notre connaissance - de l'instabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille plan lorsque le fluide est stratifié dans une direction perpendiculaire au cisaillement. À l'aide d'expériences de laboratoire, d'analyses théoriques et de simulations numériques directes, nous décrivons l'apparition d'une instabilité qui provient de la résonance d'ondes de gravité internes transportées par l'écoulement et subissant un décalage Doppler. Cette instabilité fait apparaître des méandres visibles dans des plans horizontaux et disposés en couche le long de l'axe vertical.*

## Abstract :

*We present here the first study - to our knowledge - of the linear instability of the plane Poiseuille flow when the fluid is stratified in a direction perpendicular to shear. Using laboratory experiments, theoretical analyzes and direct numerical simulations, we describe the appearance of an instability that results from the resonance of internal gravity waves carried and Doppler shifted by the flow. This instability reveals meanders visible in horizontal planes and arranged in layers along the vertical axis.*

**Mots clefs : Instabilités écoulements cisailés ; stratification ; ondes internes**

## 1 Introduction

L'écoulement de Poiseuille plan est un des écoulements cisailés les plus simples. Dans le cas non stratifié, il est connu pour être linéairement instable pour des nombres de Reynolds supérieurs à 5572 [1]. Au-dessus de cette valeur, des ondes bi-dimensionnelles - appelées ondes de Tollmien-Schlichting - sont visqueusement instables et peuvent se propager dans l'écoulement. Nous présentons ici l'analyse de stabilité d'un écoulement de Poiseuille plan et – *ce qui est original* - stratifié en densité dans la

direction verticale, c'est-à-dire orthogonalement au cisaillement horizontal. Les fluides stratifiés sont omniprésents dans la nature et dans un contexte géophysique, on peut penser à des écoulements dans des canyons sous-marins, au vent dans des vallées profondes ou à des écoulements laminaires dans des rivières ou des canaux où la stratification peut être due aux gradients de température ou de salinité. Notre étude est fondée sur des expériences de laboratoire, sur une analyse linéaire de stabilité et sur des simulations numériques directes. Cette étude fait suite à de récentes analyses des instabilités des écoulements cisailés stratifiés et tournants ou pas: l'instabilité stratorotationnelle [2,3], l'instabilité de la couche limite stratifiée [4] ou l'instabilité de l'écoulement de Couette stratifié [5], où il est montré que ces instabilités appartiennent à une classe d'instabilités provoquées par l'interaction résonnante d'ondes de gravité internes ayant subies un décalage Doppler par leur transport par l'écoulement. Une particularité de notre étude est que les ondes de Tollmien-Schlichting de l'écoulement de Poiseuille pourraient également interagir et éventuellement résonner avec des ondes de gravité.

## 2 Installation expérimentale

### 2.1 Le canal annulaire en rotation

Nos expériences sont réalisées dans un canal annulaire ayant un diamètre intérieur de 1,43 m et une section verticale rectangulaire de  $D \times H = 85 \times 200 \text{ mm}^2$ . Ce canal est rempli jusqu'à un niveau compris entre 130 mm et 200 mm (position de la surface libre) avec de l'eau stratifiée linéairement en sel au moyen de la technique classique du « double bucket ». Le fluide à surface libre est ensuite entraîné par les parois latérales et le fond du canal lorsque celui-ci est mis en rotation lente à une vitesse angulaire comprise entre 0.1 et 0.5 tr/mn. Cependant, une barrière, placée radialement à l'intérieur du canal, bloque l'écoulement, interdisant la rotation solide et créant un profil de vitesse horizontale presque parabolique. La figure 1 illustre le montage expérimental.

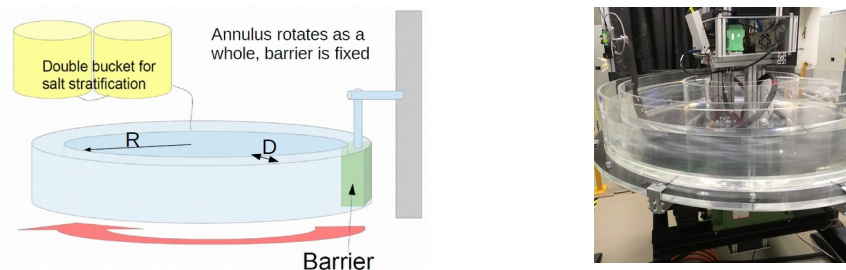


Figure 1 : Schéma et photographie de l'installation expérimentale à l'Université de Cottbus : canal annulaire de section rectangulaire  $85 \times 200 \text{ mm}^2$  et de rayon intérieur  $R = 71.5 \text{ cm}$ , mis en rotation à une vitesse angulaire comprise entre 0.1 et 0.5 tr/mn.

### 2.1 L'écoulement de base

A très faible vitesse, des mesures par PIV dans le plan horizontal ont tout d'abord permis de caractériser l'écoulement de base à différentes altitudes. La figure 2-a montre un exemple de profil horizontal de vitesse qui est comparé d'une part à l'écoulement bidimensionnel parabolique de Poiseuille (qui ne tient pas compte de la présence du fond) et d'autre part au profil de l'écoulement de canal c'est-à-dire en tenant compte cette fois du cisaillement au fond. Comme on peut le constater, le profil expérimental est très proche du profil parabolique bi-dimensionnel avec un flux nul. De même, le profil vertical de vitesse (figure 2-b) est très plat sur la majeure partie de la hauteur de l'écoulement. Ce phénomène est certainement dû à la présence d'un écoulement de fuite sous la barrière qui génère

le mélange du fluide initialement linéairement stratifié au voisinage du fond. Cette couche mélangée agit alors comme un écoulement de lubrification et localise le gradient vertical de vitesse sur quelques centimètres à proximité du fond. Ainsi, l'écoulement de base étudié est très proche de l'écoulement idéal bi-dimensionnel de Poiseuille plan stratifié.

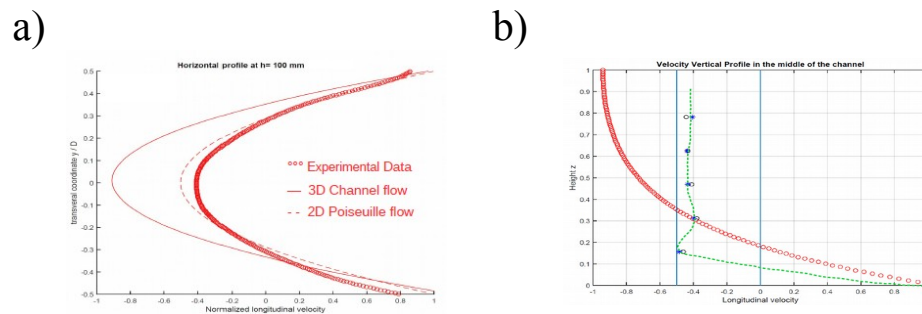


Figure 2: a) Exemple de profil horizontal de vitesse longitudinale mesuré (o) et comparaison avec l'écoulement de Poiseuille plan (--) et avec l'écoulement de canal (-). b) Exemple de profil vertical de vitesse longitudinale mesuré (-\*-) et comparé à l'écoulement de canal (o).

### 3 Principaux Résultats

#### 3.1 Observation de l'instabilité et comparaison avec la théorie

Des visualisations et des mesures de PIV montrent l'apparition d'un motif stationnaire (par rapport au laboratoire) composé d'ondes et qui apparaît au-dessus d'un seuil dépendant des nombres de Reynolds  $Re = 3\Omega R D / 4\nu$  (où  $\nu$  est la viscosité du fluide) et de Froude  $F = 3\Omega R / ND$  (où  $N$  est la fréquence de Brunt-Väisälä caractérisant la stratification linéaire en densité). La figure 3 présente une visualisation par kalliroscope et plan laser de l'instabilité qui se manifeste par des méandres dans le plan horizontal.

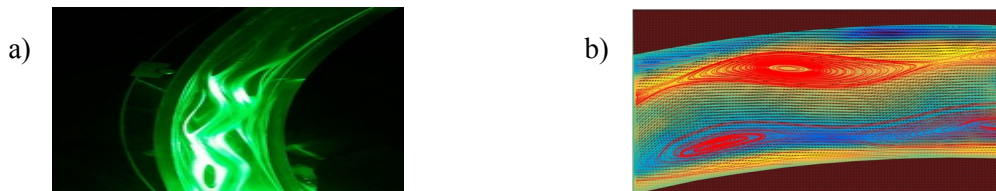


Figure 3 : a) Visualisation des méandres et des recirculations dans le plan horizontal. b) Mesure PIV du champ de vitesse illustré ici par ses lignes de courant et la vorticité verticale associée (couleur).  $F = 0.45$ ,  $Re = 2750$ .

Nous avons également réalisé des visualisations et des mesures de vitesse dans le plan vertical « médiant » (en négligeant la courbure du canal). La figure 4 montre un exemple de nos mesures PIV qui illustrent le motif en couche, similaire à celui déjà observé dans l'écoulement de Couette plan [5].

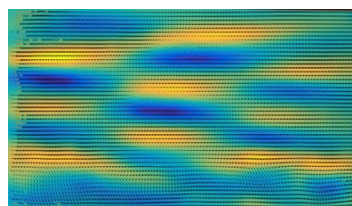


Figure 4 : Observation du champ de vorticité horizontale dans le plan vertical qui montre l'organisation en couches et réminiscentes de l'interaction d'ondes de gravité.  $F = 0.45$ ,  $Re = 2750$ .

En répétant l'expérience pour différents nombres de Reynolds et de Froude, il est possible de mesurer les variations du seuil d'instabilité. La figure 4 montre les valeurs de ces seuils ainsi que les valeurs des seuils théoriques calculés par une analyse linéaire d'instabilité. Bien que ces analyses théoriques soient réalisées pour des nombres de Schmidt valant 1 et non 700 comme dans l'expérience avec le sel, la comparaison est excellente.

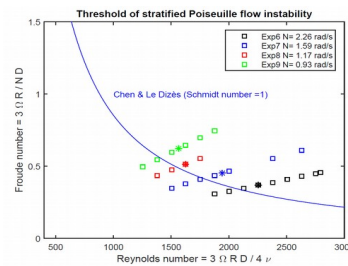


Figure 5 : Comparaison des seuils d'instabilité observés dans les expériences (\*) et le calcul théorique (-). Malgré la différence en nombre de Schmidt, l'accord est très bon.

### 3.2 Résultats numériques

Finalement, nous avons réalisé des simulations numériques directes des équations de Navier-Stokes 3D complétées par l'équation de transport du sel à l'aide du code aux éléments spectraux Nek5000. Le domaine de la simulation est un canal rectiligne, périodique dans la direction verticale. Comme le montre la figure 6 suivante, l'instabilité est parfaitement reproduite avec ses méandres visibles dans les plans horizontaux et disposés en couches visibles dans les plans verticaux.

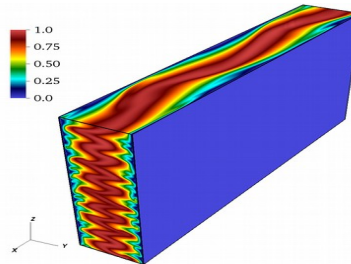


Figure 6 : Illustration du champ de vitesse longitudinale de l'écoulement de Poiseuille plan stratifié instable calculée par DNS.  $F=1$ ,  $Re=2500$ .

### Références

- [1] Orszag, S. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, *Journal of Fluid Mechanics*, 50(4), 689-703, 1971.
- [2] M. Le Bars, P. Le Gal, Experimental analysis of the stratorotational instability in a cylindrical Couette flow, *Physical Review Letters* 99, 064502, 2007.
- [3] G. Rudiger, T. Seelig, M. Schultz, M. Gellert, Ch. Egbers & U. Harlander, The stratorotational instability of Taylor-Couette flows with moderate Reynolds numbers, *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 111, 429-447, 2017.
- [4] Chen, J., Bai, Y., & Le Dizès, S., Instability of a boundary layer flow on a vertical wall in a stably stratified fluid, *Journal of Fluid Mechanics* 795, 262-277, 2016.
- [5] G. Facchini, B. Favier, P. Le Gal, M. Wang, M. Le Bars, The linear instability of the stratified plane Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 853, 205-234, 2018.