

Commande LQR d'un pendule de Furuta sans capteur de courant

Jean-Matthieu BOURGEOT^a

a. ENIB, UMR CNRS 6027, IRDL, F-29200 Brest, France. bourgeot@enib.fr

Résumé :

Le contrôle dans sa position d'équilibre instable d'un pendule de Furuta est réalisé sans l'utilisation d'un capteur de courant pour mesurer le couple de commande. Une modélisation du pendule couplant les variables mécaniques et électriques est proposée. Le courant dans le moteur est reconstruit par un observateur de Luenberger construit sur le modèle linéarisé. La pertinence de la solution proposée est validée sur un pendule réel.

Abstract :

This paper deals with the control of the unstable equilibrium position of a Furuta pendulum. This control is achieved without the use of a current sensor to measure the control torque. A modeling of the pendulum coupling mechanical and electrical variables is proposed. The current in the DC-motor is rebuilt by a Luenberger observer made on the linearized model. The relevance of the proposed solution is validated on a real pendulum.

Mots clefs : Pendule, stabilité, observateur, commande LQR.

1 Introduction

Le pendule de Furuta est un système non linéaire et sous-actionné, il est composé d'un premier bras en rotation dans le plan horizontal et d'un second bras en rotation perpendiculairement au premier, seul le premier bras est actionné par un moteur à courant continu (le pendule et sa cinématique sont présentés figures 1 et 2). Les positions angulaires des deux liens sont instrumentées avec des encodeurs.

Le sujet de ce papier est le contrôle de ce pendule dans sa position haute instable. Ce système non linéaire est un exemple classique de dispositif expérimental pour étudier des lois de commande évoluées, ce système complexe présente plusieurs difficultés de contrôle :

- système multi-variables,
- système sous-actionné,
- système à non-minimum de phase,
- forte non-linéarité.

Classiquement la commande du pendule de Furuta nécessite deux contrôleurs : un contrôleur pour la phase de balancement (pour amener le pendule de sa position d'équilibre stable vers sa position d'équilibre instable), et un second contrôleur pour la phase de stabilisation dans sa position haute. En ce qui

concerne le contrôle du balancement, plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature [9] [7]. Dans ce travail, la méthode proposée par [9] est utilisée, le propos de ce papier concerne simplement le contrôle de stabilisation.

Le problème de la stabilisation du pendule a été traité de façon détaillée dans la littérature. Des commandes par régulateur linéaire quadratique (LQR) sont proposées dans [2] [5], une commande par mode glissant est développée dans [5] [8]. Le pendule peut également être stabilisé par des schémas de type : commande prédictive [4] [3] [7], commande plate [2] ou logique floue [6].

Toutes ces commandes évoluées contrôlent le pendule en couple. Ce qui sous-entend qu'il y a une seconde boucle de commande qui contrôle le courant (dans le moteur) avec une dynamique très rapide pour imposer le couple souhaité calculé par la commande haut niveau, cette boucle de commande nécessite donc un capteur de courant suffisamment précis pour assurer le contrôle correct du couple.

Dans ce papier, la stabilisation du pendule dans la position haute est faite sans utiliser de capteur de courant et donc sans structure de commande hiérarchisée. Classiquement, les variables d'états du système sont les positions et vitesses articulaires, la commande du système est le couple moteur, dans notre cas la commande sera directement la tension appliquée en entrée du moteur par le hacheur par le contrôle du rapport cyclique, l'état du système sera donc augmenté de la variable courant. La dynamique électromécanique rapide du moteur doit donc être prise en compte dans le modèle du pendule. La section 2 présente cette modélisation dynamique ainsi que sa linéarisation autour de la position d'équilibre instable. La valeur des vitesses articulaires est reconstruite à partir de la mesure des positions (encodeurs) par différentiation et filtrage dans la section 3.1. La valeur du courant nécessaire à la commande par retour d'état est reconstruite par un observateur de Luenberger dans la section 3.2. La matrice de gain de la commande par retour d'état est calculée sur le modèle linéarisé par une méthode de contrôle optimal LQR dans la section 3.3.2. La méthode proposée est validée numériquement par simulation puis expérimentalement sur un pendule réel à la section 3.4. La figure 1 présente le pendule expérimental développé pour cette étude.

2 Modélisation

Le modèle dynamique du pendule est donné sous la forme :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau - F_v\dot{q} - F_{sec} \quad (1)$$

où q représente les variables articulaires, $\tau = [\tau_1 \ 0]^T$ le couple moteur, $M(q)$, $C(q, \dot{q})$ et $G(q)$ représentent respectivement la matrice d'inertie, la matrice des effets centrifuges et de Coriolis, la gravité.

$F_V = \begin{pmatrix} f_v1 & 0 \\ 0 & f_v2 \end{pmatrix}$ la matrice de frottement visqueux, et F_{sec} les frottements secs.

En partant du paramétrage du tableau 2, il est possible d'obtenir les matrices de passage entre chaque repère. On peut calculer la matrice d'inertie généralisée $M(q)$. La matrice $C(q, \dot{q})$ est déterminée par le calcul des symboles de Christoffel [1, p. 22], la matrice $G(q)$ est obtenue par dérivation de l'énergie potentielle.

D'où les matrices suivantes :

$$M(q) = \begin{pmatrix} m_2 l_1^2 + I_1 & m_2 \cos(q_2) r_2 l_1 \\ m_2 \cos(q_2) r_2 l_1 & I_2 \end{pmatrix} \quad C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0 & -m_2 r_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 l_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

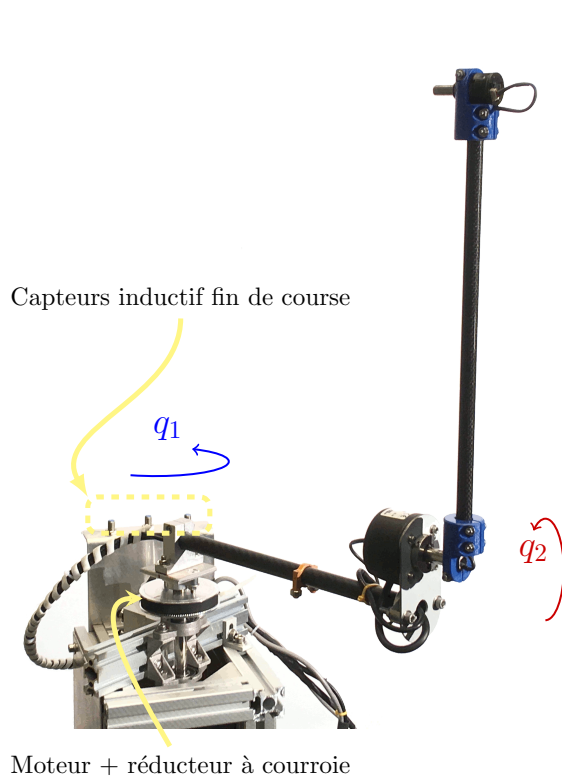


FIGURE 1 – Pendule de Furuta.

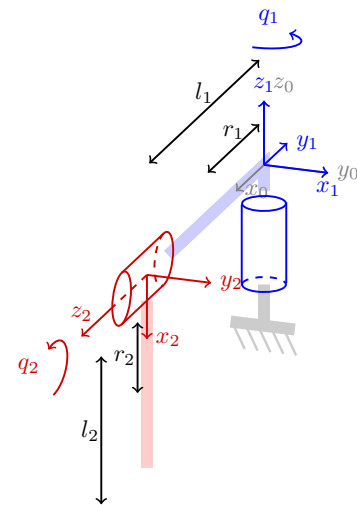


FIGURE 2 – Pendule de Furuta.

k	α_k	d_k	r_k	θ_k
1	0	0	0	$\frac{\pi}{2} + q_1$
2	$\frac{\pi}{2}$	0	l_1	$q_2 - \frac{\pi}{2}$

TABLE 2 – Représentation de Khalil-Kleinfinger du pendule de Furuta utilisé.

$$G(q) = \left(0 \quad g m_2 \sin(q_2) r_2 \right)^T$$

Avec I_i l'inertie du lien i , l_i la longueur du lien i , r_i la position du centre de gravité du lien i , m_i la masse du lien i .

Il est à noter qu'en absence de commande alors \dot{q} tend vers $(0, 0)^T$ et q_2 tend vers zéro 0, ce qui permet d'initialiser la position initiale de l'encodeur associé à cet axe. La position initiale de l'axe q_1 sera initialisée avec des capteurs fin de course placés approximativement en $\pm 175^\circ$. Ce modèle dynamique est augmenté de la dynamique électromécanique du moteur à courant continu suivante :

$$L \frac{di}{dt} + \frac{K_\omega}{n} \dot{q}_1 + Ri = \alpha V_{cc}, \text{ et } \tau_1 = \frac{K_t}{n} i \quad (2)$$

où i , L , R , K_ω , K_t sont respectivement le courant dans le moteur, l'inductance, la résistance, la constante de vitesse et de couple du moteur (on suppose ces deux dernières constantes égales; on note $K_m = K_\omega = K_t$), n est le rapport de réduction de la transmission à courroie entre le moteur et l'axe q_1 , V_{cc} est la tension d'alimentation du hacheur pilotant le moteur à courant continu, et enfin α est le rapport cyclique de commande du hacheur.

Pour les aspects de commande, nous définissons la variable d'état suivante :

$$x = (q_1 \quad \dot{q}_1 \quad q_2 - \pi \quad \dot{q}_2 \quad i)^T$$

de telle sorte que la position d'équilibre haute instable que nous souhaitons maintenir se trouve à l'origine. Nous pouvons maintenant écrire le modèle linéarisé du système autour du point $x_0 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T$,

en prenant $\sin x_k \sim x_k$ et $\cos x_k \sim 1$, et en négligeant les frottements secs, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} J_1 \dot{x}_2 - m_2 r_2 l_1 \dot{x}_4 - \frac{K_m}{n} x_5 + f_{v1} x_2 &= 0, \\ -m_2 r_2 l_1 \dot{x}_2 + I_2 \dot{x}_4 - g m_2 r_2 x_3 + f_{v2} x_4 &= 0, \\ L \dot{x}_5 + \frac{K_m}{n} x_2 + R x_5 &= \alpha V_{cc} \end{aligned} \quad (3)$$

Avec $J = m_2 l_1^2 + I_1$. Le système d'équation linéarisé peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ 0 & A_{52} & 0 & 0 & A_{55} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{V_{cc}}{L} \end{pmatrix} \alpha \quad (4)$$

En posant $J_a = m_2 r_2 l_1$ et $d = J_1 I_2 - a^2$, on obtient :

$$\begin{aligned} A_{22} &= \frac{I_2}{d} f_{v1} \quad , \quad A_{42} = \frac{J_a}{d} f_{v1} \quad , \quad A_{52} = \frac{-K_m}{n L} \\ A_{23} &= \frac{J_a m_2 g r_2}{d} \quad , \quad A_{43} = \frac{J_1 m_2 g r_2}{d} \\ A_{24} &= \frac{J_a}{d} f_{v2} \quad , \quad A_{44} = \frac{J_1}{d} f_{v2} \\ A_{25} &= \frac{I_2 K_m}{d n} \quad , \quad A_{45} = \frac{J_a K_m}{d n} \quad , \quad A_{55} = \frac{-R}{L} \end{aligned} \quad (5)$$

Ce modèle linéaire sera utilisé pour définir la matrice de gain de la commande par retour d'état, et pour concevoir l'observateur de Luenberger.

3 Observateurs et commande

La commande utilisée est une commande par retour d'état, il est donc nécessaire de reconstruire les variables d'états pour lesquelles nous ne disposons pas de capteur.

3.1 Dérivateurs

Les vitesses articulaires x_2 et x_4 sont obtenues par différenciation des positions articulaires x_1 et x_3 . Il est à noter que le fait de réguler le pendule autour d'une position d'équilibre implique que les vitesses seront assez faibles (nulles à l'équilibre). Ces faibles déplacements étant mesurés avec des encodeurs rotatifs (mesure discrète) cela entraînent beaucoup de bruit lors de la différenciation. Les vitesses articulaires seront donc filtrées numériquement par une moyenne glissante sur 20 échantillons ce qui ajoute un retard de l'ordre de 10ms ($10.T_s$).

3.2 Observateur pour le courant dans le moteur

Ne disposant pas de capteur de courant, il faut le reconstruire pour pouvoir calculer la commande par retour d'état. Ceci est effectué par un observateur de Luenberger. Soit le modèle linéarisé (3) du système calculé au paragraphe 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (6) \quad \text{avec } u = \alpha \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le zéro en C_{55} traduit le fait que le courant x_5 n'est pas disponible dans la mesure de l'état de sortie y . On définit l'observateur de Luenberger suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A_o \hat{x} + B_o u + L(y - \hat{y}) \\ \hat{y} = C \hat{x} \end{cases} \quad (7)$$

En admettant que la modélisation et l'identification du système soient bonnes (c'est-à-dire que $A = A_o$ et $B = B_o$) alors la dynamique de l'erreur de régulation est régie par l'équation différentielle suivante $\dot{e} = (A - LC)e$. Il reste à choisir L tel que les valeurs propres de $(A - LC)$ soient à valeurs réelles négatives pour que l'erreur d'observation tende vers zéro. Par une méthode de placement de pôle, L est déterminée tel que les valeurs propres de $(A - LC)$ soient $-250 * [6 \ 5.1 \ 4 \ 3.1 \ 6]$.

3.3 Balancement et Commande LQR

Deux commandes différentes sont utilisées pour les phases de balancement ou de stabilisation en position haute.

3.3.1 Balancement vers la position haute

La phase de balancement utilise la méthode proposée par Åström et Furuta dans [9]. Cette méthode est basée sur l'énergie que possède le pendule. Admettons que la position haute correspond au zéro de l'énergie potentielle. La commande de balancement tend à apporter à chaque balancement un peu plus d'énergie (cinétique + potentielle) au pendule pour qu'il puisse s'approcher suffisamment proche de sa position d'équilibre haute. Soit la commande suivante :

$$u = \text{sat}(k_v(E - E_0)) \text{sign}(x_4 \cos(x_3)) \quad (8)$$

Où E correspond à l'énergie mécanique du pendule et E_0 l'énergie cible. Nous fixons $E_0 = -0.02$, en toute rigueur nous pourrions prendre $E_0 = 0$ (l'énergie du pendule est nulle dans sa position d'équilibre haute), mais prendre une valeur cible légèrement plus faible permet de s'assurer d'arriver en haut avec une vitesse suffisamment faible au moment de la commutation entre la commande de balancement et la commande de stabilisation, et ce même en présence d'erreur sur les paramètres identifiés du modèle.

3.3.2 Stabilisation autour de l'origine

La stabilisation autour de la position haute instable est assurée par la commande par retour d'état suivante :

$$u = -K_{SS}x \quad (9)$$

paramètre	valeur	paramètre	valeur	paramètre	valeur
R ⁽¹⁾	10.22 Ω	m_1 ⁽¹⁾	470 g	m_2 ⁽¹⁾	94 g
L ⁽¹⁾	10.59 mH	l_1 ⁽¹⁾	29.65 cm	l_2 ⁽¹⁾	34.8 cm
K_w ⁽²⁾	0.11636 V.s.rad ⁻¹	r_1 ⁽¹⁾	21.7 cm	r_2 ⁽¹⁾	20.6 cm
K_t ⁽²⁾	0.11636 N.m.A ⁻¹	I_1 ⁽²⁾	30.4 g.m ²	I_2 ⁽²⁾	6 g.m ²
n ⁽¹⁾	20/110	fv_1 ⁽²⁾	2.710 ⁻³ USI	fv_2 ⁽²⁾	9.3610 ⁻⁴ USI
V_{CC} ⁽¹⁾	24 V	fs_1 ⁽²⁾	60.510 ⁻³ N.m	fs_2 ⁽²⁾	5.5110 ⁻³ N.m

TABLE 3 – Valeurs des paramètres mesurés ⁽¹⁾ et identifiés ⁽²⁾ sur des essais expérimentaux.

Nous calculons la matrice de gain K_{SS} par la méthode de commande optimale LQR. Soit le critère suivant à minimiser

$$J = \int_0^{+\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt \quad (10)$$

Q est une matrice de pondération sur l'état permettant de prioriser la régulation d'une variable par rapport à une autre, par exemple dans notre cas $Q = C_{lqr}^T C_{lqr}$ avec $C_{lqr} = [1 \ 2 \ 2 \ 6 \ 2 \ 0]$. La matrice R permet de pénaliser des commandes trop énergivores (ici $R = 220$). Dans le cas d'étude ceci permet d'appliquer des commandes plus douces pour éviter que le système réel ne rentre en vibration à cause des frottements secs. La théorie LQR nous donne que le retour d'état minimisant ce critère est donné par

$$K_{SS} = R^{-1} B^T P \quad (11)$$

où P est solution de l'équation de Riccati $A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$

3.4 Résultats

3.4.1 Présentation du pendule expérimental

Le pendule est construit autour d'un moteur à courant continu de 24 V-2000 rpm, associé à un réducteur à courroie composé de 2 poulies GT2 de 20 et 110 dents.

Les positions angulaires de chaque axe sont mesurées par des encodeurs BEAUMER GI342 à axe traversant délivrant 2048 impulsions par tour. Les bras 1 et 2 sont constitués de tube de carbone de respectivement 16 mm et 12 mm de diamètre. Les pièces de connexions sont réalisées en plastique par impression 3D. Un encodeur supplémentaire en attente est visible sur la figure 1 en bout du bras 2 pour de futurs travaux. La structure porteuse est réalisée en profilés d'aluminium rainurés 3030. Le moteur à courant continu est piloté par un hacheur intégré LMD18200. Le pendule est commandé par un système dSPACE RTI1005 (PowerPC 750GX à 1Ghz) programmé depuis Matlab/Simulink. Le temps d'échantillonnage est fixé à $T_s = 1$ ms.

3.4.2 Simulation et Identification des paramètres

Trois simulations sont développées pour cette étude :

- le bras 1 seul,
- le bras 2 seul (moteur bloqué en $q_1 = 0$),
- le pendule complet.

Les deux premiers simulateurs permettent d'identifier les paramètres d'inertie des deux liens, en effectuant un calcul d'optimisation sur les paramètres I_i , fv_i et fs_i minimisant l'erreur entre un essai

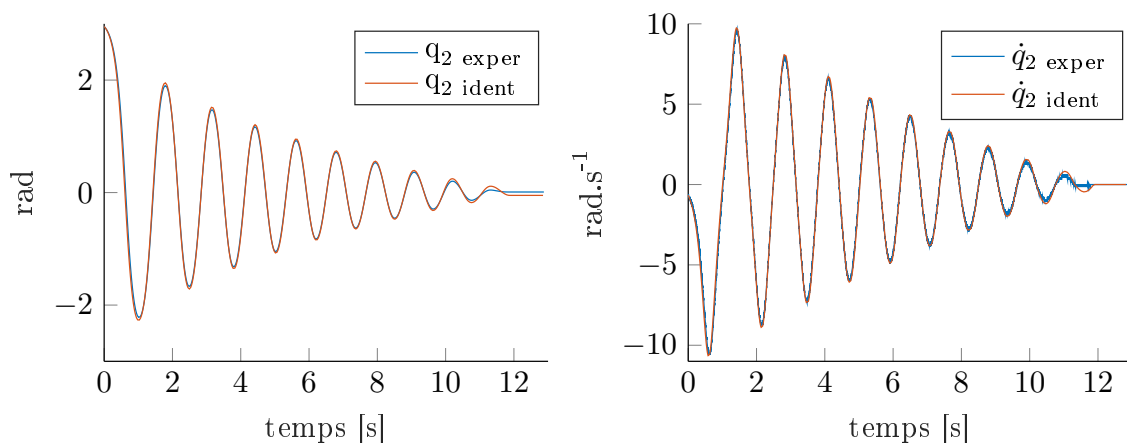


FIGURE 3 – Identification des paramètres dynamiques du lien 2 (lien 1 bloqué $q_1 = 0$), position à gauche, vitesse à droite.

expérimental et la sortie du simulateur. La figure 3 montre le résultat de l'identification pour le lien 2 (pendule lâché depuis la position haute, avec le lien 1 mécaniquement bloqué en $q_1 = 0$). Un essai moteur (pour plusieurs valeurs de α) à vide a permis d'identifier les paramètres moteurs (R et L sont mesurés au RLC-mètre). La table 3 résume les paramètres utilisés pour les simulations et pour l'implémentation de la commande et de l'observateur. Le troisième simulateur permet de valider les réglages du correcteur et de l'observateur.

3.4.3 Résultats expérimentaux

L'observateur et le retour d'état développé sur simulateur sont implémentés sur le PowerPC en utilisant la suite dSPACE. La figure 4 montre l'évolution des positions angulaires du pendule au cours des 3 modes de fonctionnement. La variable "mode de fonctionnement" peut prendre trois valeurs différentes :

- **3** : Le pendule est dans la phase d'initialisation (prise de référence zéro pour initialiser les encodeurs incrémentaux). À la fin de cette phase, le pendule est à l'arrêt dans sa position d'équilibre stable ($q_2 = 0$ ou $x_3 = \pm\pi$).
- **2** : Le pendule est dans la phase de balancement, la commande (8) apporte de l'énergie au pendule jusqu'au seuil suffisant ($E_0 = -0.02$) pour qu'il s'approche suffisamment de la position d'équilibre haute. Dès que $|x_3| < \epsilon_3$, le fonctionnement commute en mode de stabilisation haute.
- **1** : Le pendule est stabilisé dans sa position d'équilibre instable ($x_3 = 0$) par une commande par retour d'état. Autour des instants 30 s et 36 s des perturbations extérieures sont appliquées au pendule (petits coups de doigt donnés par l'auteur sur la tête du pendule).

La figure 4 montre la pertinence du schéma de commande proposé, les perturbations sont rejetées.

Pour étudier la qualité de l'observateur utilisé, un capteur de courant bas de gamme (référence ACS712 5A) est ajouté en série avec l'induit du moteur à courant continu. Les données du capteur de courant ne sont utilisées qu'au titre de l'étude de la performance de l'observation. Les données utilisées par la commande sont uniquement celles issues de l'observateur.

Les figures 5, 6 et 7 présentent l'évolution du courant mesuré par rapport au courant estimé. Sur ces figures les courbes ont les significations suivantes :

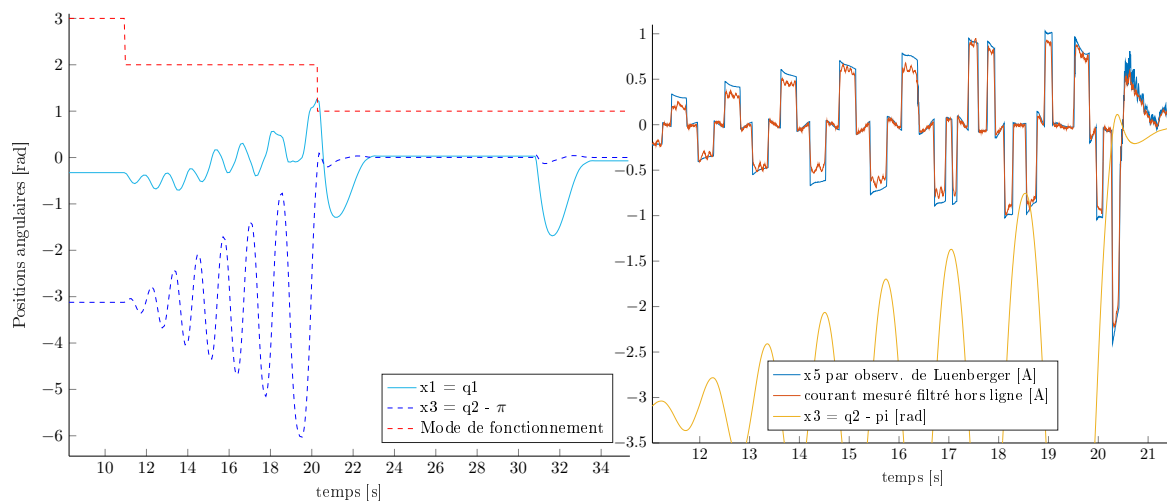


FIGURE 4 – Évolution des positions angulaires durant les phases de balancement et de stabilisation.

FIGURE 5 – Lien entre erreur d'estimation et écart au modèle linéarisé.

- "courant mesuré" correspond aux données brutes du capteur qui sont sensiblement bruités
- "courant mesuré filtré en ligne" correspond à une moyenne glissante des données brutes sur une fenêtre de $2n_p + 1$ échantillons ($n_p = 10$) : $\langle x_{\text{inline}}(k) \rangle = \frac{1}{2n_p+1} \sum_{j=k-(2n_p+1)}^k x(j)$. Ce filtre moyenneur introduit donc un retard de n_p échantillons.
- "courant mesuré filtré hors ligne" est une moyenne glissante sur $2n_p + 1$ échantillons sans retard $\langle x_{\text{offline}}(k) \rangle = \frac{1}{2n_p+1} \sum_{j=k-n_p}^{k+n_p} x(j)$.
- " x_5 par observ. de Luenberger" est le résultat de l'observateur utilisé dans ce travail.

La figure 5 compare le courant estimé avec sa valeur mesurée pendant la phase de balancement. On remarque que lorsque $|x_3|$ est grand, c'est-à-dire que le pendule est loin de sa position haute, le courant est surestimé. Ceci s'explique par le fait que l'estimateur est basé sur le modèle linéarisé du pendule qui n'est plus totalement valide lorsque l'état s'éloigne de point de linéarisation.

La figure 6 compare la sortie de l'estimateur avec les mesures brutes du capteur de courant lors de la réponse à une perturbation externe (le pendule étant en position haute, l'opérateur le pousse du doigt). Nous constatons que le système rejette bien la perturbation, que la sortie de l'observateur décrit bien l'évolution du courant, et permet même d'obtenir un signal beaucoup moins bruité.

La figure 7 compare la sortie de l'estimateur avec les données capteurs filtrées numériquement. L'estimateur permet d'obtenir en ligne des résultats similaires à un filtre moyenneur sans l'inconvénient du retard introduit par une moyenne glissante faite en ligne.

4 Conclusion

Dans ce travail nous avons présenté la réalisation d'un pendule de Furuta ainsi que sa modélisation. Nous avons proposé une commande par retour d'état qui ne nécessite pas l'utilisation d'un capteur de courant pour la commande en couple du pendule. Un observateur de Luenberger a été utilisé pour reconstruire le courant. Les résultats expérimentaux sur le pendule réel montrent la pertinence de cette approche. L'observateur proposé permet de reconstruire efficacement la variable d'état du courant, et ceci sans trop de bruit et sans introduire de retard dans la boucle de contrôle.

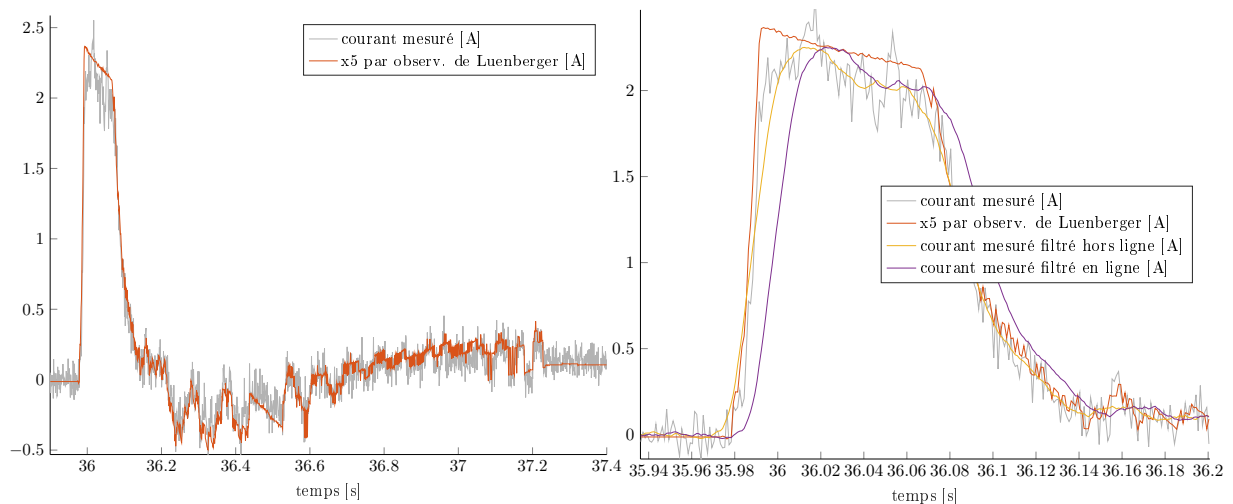


FIGURE 6 – Courant durant la réponse à une perturbation externe. **FIGURE 7** – Zoom sur le courant durant la réponse à une perturbation externe.

Remerciement

Ce travail a été réalisé sur du matériel en parti financé par le CPER EcoSysMer : Projet cofinancé par l'Union européenne, la région Bretagne, le conseil départemental du Finistère et Brest Métropole. L'Europe s'engage en Bretagne avec le Fonds européen de développement régional.

Références

- [1] Carlos Canudas de Wit, Bruno Siciliano, and Georges Bastin. *Theory of Robot Control*. Springer London, London, 1996. OCLC : 853263033.
- [2] Novica Dakovi. FLATNESS AND LQR CONTROL OF FURUTA PENDULUM. 21(1) :9.
- [3] J. L. D. Madrid, E. A. G. Querubín, and P. A. Ospina-Henao. Predictive control of a furuta pendulum. In *2017 IEEE 3rd Colombian Conference on Automatic Control (CCAC)*, pages 1–6, October 2017.
- [4] L. Magni, R. Scattolini, and K. J. Åström. GLOBAL STABILIZATION OF THE INVERTED PENDULUM USING MODEL PREDICTIVE CONTROL. *IFAC Proceedings Volumes*, 35(1) :141–146, January 2002.
- [5] Navin John Mathew, K. Koteswara Rao, and N. Sivakumaran. Swing Up and Stabilization Control of a Rotary Inverted Pendulum. *IFAC Proceedings Volumes*, 46(32) :654–659, December 2013.
- [6] Stelian-Emilian Oltean. Swing-up and Stabilization of the Rotational Inverted Pendulum Using PD and Fuzzy-PD Controllers. *Procedia Technology*, 12 :57–64, January 2014.
- [7] Pavol Seman, Boris Rohal'-Ilkiv, Martin Juh'as, and Michal Salaj. Swinging up the Furuta Pendulum and its Stabilization Via Model Predictive Control. *Journal of Electrical Engineering*, 64(3) :152–158, May 2013.
- [8] A. Wadi, J. Lee, and L. Romdhane. Nonlinear sliding mode control of the Furuta pendulum. In *2018 11th International Symposium on Mechatronics and its Applications (ISMA)*, pages 1–5, March 2018.
- [9] K. J. Åström and K. Furuta. Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica*, 36(2) :287–295, February 2000.