

Un élément fini enrichi 1D pour la modélisation d'un joint à simple recouvrement

T.H. NGUYEN^a, P. LE GROGNEC^a

a. ENSTA Bretagne, UMR CNRS 6027, IRDL, F-29200 Brest, France
tuan_hung.nguyen@ensta-bretagne.fr

Résumé :

Dans ce travail, un élément fini enrichi 1D a été développé pour la modélisation d'un joint à simple recouvrement. Il est basé sur la définition de cinématiques appropriées pour chacune des couches (substrats et adhésif) et particulièrement sur le choix d'une représentation 2D de la couche d'adhésif. L'intégration dans l'épaisseur et l'assemblage des trois couches mènent à la construction d'un élément fini 1D très peu coûteux, qui fournit malgré tout une description complète et précise des champs de contraintes, en particulier au sein de l'adhésif. L'élément développé a été validé par comparaison avec des résultats 2D de référence issus de calculs numériques effectués sur le code de calcul Abaqus, dans le cas d'un adhésif élastique puis élastoplastique.

Abstract :

This study deals with the development of a 1D enriched finite element devoted to the numerical modeling of single-lap joints. It is based on the identification of appropriate kinematics for each layer (substrates and adhesive) and particularly on the choice of a 2D representation of the adhesive layer. The numerical integration through the whole thickness and the assembly of the three layers lead to the definition of a very low-cost 1D finite element, which provides nevertheless a complete and accurate description of the stress fields, especially within the adhesive layer. The new finite element is finally validated by comparison with 2D reference results computed with Abaqus software, in both cases of an elastic and elastoplastic constitutive law for the adhesive material.

Mots clefs : Simple recouvrement, cinématique enrichie, élément fini, élasto-plasticité

1 Introduction

Le collage structural est un mode d'assemblage qui offre de nombreux avantages vis-à-vis d'autres méthodes dites conventionnelles comme le rivetage ou le soudage, d'où son utilisation croissante dans de nombreux domaines d'application industriels. Le joint à simple recouvrement (JSR) est l'assemblage par collage fondamental par excellence et est fréquemment utilisé, entre autres, pour caractériser le comportement d'une colle structurale au sein d'un assemblage. La caractérisation d'une telle colle par essai

JSR nécessite la connaissance précise de la distribution de contraintes dans l'adhésif. De nombreux modèles reproduisant l'essai JSR ont alors vu le jour dans la littérature, afin d'estimer au mieux de telles contraintes. On peut citer en premier lieu des modélisations analytiques comme celle de Volkersen [1], le plus souvent limitées à certaines configurations et impliquant des hypothèses fortes sur le comportement mécanique et la distribution même des contraintes. A l'opposé, de nombreux auteurs s'appuient sur des simulations 2D/3D de l'assemblage, qui s'avèrent très coûteuses, en particulier lorsqu'elles doivent être répétées dans le cadre d'approches inverses [2]. Enfin, un compromis consiste à utiliser des modèles numériques simplifiés (1D) [3], mais de telles solutions sont pour l'instant basées sur des hypothèses simples (de type poutre) avec un comportement le plus souvent élastique.

Dans cet ordre d'idées, la présente étude est consacrée au développement d'un élément fini enrichi 1D original, dédié à la modélisation du comportement mécanique d'un joint à simple recouvrement. Le choix d'une représentation 2D de l'adhésif avec une cinématique polynomiale enrichie permet de décrire, de manière efficace, l'ensemble des contraintes avec une très bonne précision. Dans un premier temps, on présente la formulation du modèle élément fini et en particulier la cinématique retenue. Ensuite, on décrit brièvement la construction d'un code de calcul "maison" basé sur cet élément. Enfin, les résultats obtenus avec ce programme sont comparés avec ceux de calculs 2D de référence (réalisés sur Abaqus), dans le cas d'un comportement élastique puis élastoplastique de l'adhésif.

2 Définition du modèle

Dans cette étude, on s'intéresse au joint à simple recouvrement dont la géométrie est présentée à la figure 1.

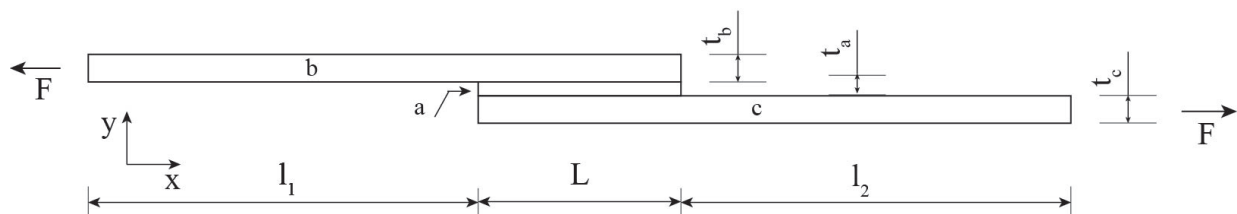


FIGURE 1 – Configuration du joint à simple recouvrement

2.1 Formulation théorique 1D

2.1.1 Substrats

Les deux substrats (couches b et c dans la figure 1) sont modélisés comme étant des poutres de Timoshenko, en tenant compte donc des effets de cisaillement transverse. La cinématique correspondante prend la forme suivante :

$$\mathbf{U}(X, Y) = \begin{cases} U(X) - Y\theta(X) \\ V(X) \\ 0 \end{cases} \quad (1)$$

où $U(X)$ et $V(X)$ représentent les déplacements respectivement longitudinal et transversal (dans les directions X et Y) alors que $\theta(X)$ représente la rotation de la section autour de l'axe Z . Le tenseur des déformations de Green-Lagrange s'écrit comme suit :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U}) \quad (2)$$

Les seules déformations non nulles en pratique sont les suivantes :

$$E_{XX} = \frac{\partial U(X)}{\partial X} - Y \frac{\partial \theta(X)}{\partial X} \quad (3)$$

$$2E_{XY} = \frac{\partial V(X)}{\partial X} - \theta(X) \quad (4)$$

On introduit ensuite le vecteur des contraintes (non nulles) $\mathbf{s}_i = \{\Sigma_{XX}^i, \Sigma_{XY}^i\}$ associé au vecteur des déformations $\boldsymbol{\epsilon}_i = \{E_{XX}^i, 2E_{XY}^i\}$ pour chaque substrat $i = (b, c)$. Le comportement des substrats est considéré comme élastique, d'où la relation de comportement :

$$\mathbf{s}_i = \mathbf{L}_i \boldsymbol{\epsilon}_i \quad i = (b, c) \quad (5)$$

avec :

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} E_i & 0 \\ 0 & \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

où E_i et ν_i sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson des matériaux considérés.

2.1.2 Adhésif

La couche d'adhésif a est, quant à elle, représentée par une cinématique enrichie en 2D (dans les deux directions X et Y). Pour les deux déplacements d'un point courant (suivant X et Y), on choisit une fonction polynomiale en la variable d'épaisseur Y , de degré approprié compte tenu d'observations numériques effectuées préalablement sur Abaqus. Le champ de déplacement s'écrit finalement :

$$\mathbf{U}(X, Y) = \begin{cases} \phi_5(X) + \frac{\phi_6(X)Y}{2t_a} + \phi_7(X) \left(\frac{Y}{2t_a}\right)^2 \\ \phi_1(X) + \phi_2(X) \left(\frac{Y}{2t_a}\right) + \phi_3(X) \left(\frac{Y}{2t_a}\right)^2 + \phi_4(X) \left(\frac{Y}{2t_a}\right)^3 \end{cases} \quad (7)$$

où Y est la coordonnée verticale d'un point courant par rapport à l'axe neutre de l'adhésif. Les coefficients $\phi_1(X), \phi_2(X), \phi_3(X), \phi_4(X), \phi_5(X), \phi_6(X), \phi_7(X)$ sont les champs inconnus du problème qui ne dépendent plus que de la variable X . Ces champs, ajoutés aux inconnues de déplacement des substrats, constitueront les degrés de liberté du futur modèle élément fini 1D, après discrétisation. Il est nécessaire, au préalable, de tenir compte des conditions de continuité entre les différentes couches, en écrivant respectivement aux deux interfaces :

$$\mathbf{U}^a(X, t_a) = \mathbf{U}^b(X, -t_b) \quad (8)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_1(X) + \frac{\phi_2(X)}{2} + \frac{\phi_3(X)}{4} + \frac{\phi_4(X)}{8} = V^b(X) \\ \phi_5(X) + \frac{\phi_6(X)}{2} + \frac{\phi_7(X)}{4} = U^b(X) + t_b\theta^b(X) \end{cases} \quad (9)$$

$$\mathbf{U}^a(X, -t_a) = \mathbf{U}^c(X, t_c) \quad (10)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi_1(X) - \frac{\phi_2(X)}{2} + \frac{\phi_3(X)}{4} - \frac{\phi_4(X)}{8} = V^c(X) \\ \phi_5(X) - \frac{\phi_6(X)}{2} + \frac{\phi_7(X)}{4} = U^c(X) - t_c\theta^c(X) \end{cases} \quad (11)$$

où les indices a, b, c sont associés respectivement à l'adhésif, le substrat supérieur et le substrat inférieur. En exploitant ces équations, on peut exprimer par exemple $\phi_1(X), \phi_2(X), \phi_5(X), \phi_6(X)$ en fonction des autres inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(X) = \frac{1}{2}V^c(X) + \frac{1}{2}V^b(X) - \frac{1}{4}\phi_3(X) \\ \phi_2(X) = \frac{1}{4}\phi_4(X) - V^c(X) + V^b(X) \\ \phi_5(X) = \frac{1}{2}t_b\theta^b(X) - \frac{1}{4}\phi_7(X) + \frac{1}{2}U^b(X) - \frac{1}{2}t_c\theta^c(X) + \frac{1}{2}U^c(X) \\ \phi_6(X) = t_c\theta^c(X) + t_b\theta^b(x) - U^c(X) + U^b(x) \end{array} \right. \quad (12)$$

et ne garder que les grandeurs restantes comme inconnues principales.

En se plaçant dans l'hypothèse de contraintes planes, la loi de comportement élastique 2D s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{XX}^a \\ \Sigma_{YY}^a \\ \Sigma_{XY}^a \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{XX}^a \\ E_{YY}^a \\ 2E_{XY}^a \end{pmatrix} \quad (13)$$

où E et ν représentent respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson de l'adhésif, ou encore :

$$\mathbf{s}_a = \mathbf{L}_a \boldsymbol{\epsilon}_a \quad (14)$$

en introduisant les vecteurs des contraintes $\mathbf{s}_a = \{\Sigma_{XX}^a, \Sigma_{YY}^a, \Sigma_{XY}^a\}$ et des déformations $\boldsymbol{\epsilon}_a = \{E_{XX}^a, E_{YY}^a, 2E_{XY}^a\}$.

Dans le cas d'un comportement élastoplastique de l'adhésif, on choisit de vérifier le critère de Von Mises, qui s'exprime par exemple de la manière suivante en contraintes planes (2D) [4] :

$$f(\mathbf{s}_a, p) = \frac{1}{2} \mathbf{s}_a^T \mathbf{P} \mathbf{s}_a - \frac{1}{3} (\sigma_0 + \kappa(p))^2 \quad (15)$$

où \mathbf{P} est l'opérateur déviatorique approprié et σ_0 la limite élastique du matériau. On considère ici un écrouissage purement isotrope linéaire en supposant $\kappa(p) = H_a p$ avec H_a le module d'écrouissage (constant) et p la déformation plastique cumulée.

2.2 Modélisation numérique par éléments finis

2.2.1 Formulation faible et discrétisation du problème

La discrétisation numérique du problème s'appuie sur l'écriture du principe des travaux virtuels, qui s'écrit :

$$\forall \delta \mathbf{U}, \quad \delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (16)$$

Le travail virtuel des efforts extérieurs δW_{ext} dépend du chargement appliqué et ne concerne ici que les degrés de liberté des nœuds extrêmes des substrats (là où les efforts sont appliqués). Son expression ne sera pas précisée.

Le travail virtuel des efforts internes δW_{int} s'exprime quant à lui :

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= - \sum_{a,b,c} \int_{\Omega_i} \boldsymbol{\Sigma}^i : \mathbf{E}^i dV_i \\ &= - \int_0^L \left(\int_{-t_a}^{t_a} (\Sigma_{XX}^a \delta E_{XX}^a + \Sigma_{YY}^a \delta E_{YY}^a + 2\Sigma_{XY}^a \delta E_{XY}^a) dY \right. \\ &\quad \left. + \int_{-t_b}^{t_b} (\Sigma_{XX}^b \delta E_{XX}^b + 2\Sigma_{XY}^b \delta E_{XY}^b) dY \right. \\ &\quad \left. + \int_{-t_c}^{t_c} (\Sigma_{XX}^c \delta E_{XX}^c + 2\Sigma_{XY}^c \delta E_{XY}^c) dY \right) dX \end{aligned} \quad (17)$$

Pour faciliter l'écriture, on définit le vecteur global des contraintes $\mathbf{s} = \{\Sigma_{XX}^b, \Sigma_{XY}^b, \Sigma_{XX}^a, \Sigma_{YY}^a, \Sigma_{XY}^a, \Sigma_{XX}^c, \Sigma_{XY}^c\}$, ainsi que le vecteur global des déformations $\boldsymbol{\epsilon} = \{E_{XX}^b, 2E_{XY}^b, E_{XX}^a, E_{YY}^a, 2E_{XY}^a, E_{XX}^c, 2E_{XY}^c\}$, qui peuvent être reliés par une matrice d'élasticité générale $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ dans le cas d'un comportement élastique. Pour finir, on peut définir également le vecteur des déplacements généralisés :

$$\mathbf{q} := \left[U^b(X), \frac{\partial U^b(X)}{\partial X}, V^b(X), \frac{\partial V^b(X)}{\partial X}, \theta_b(X), \frac{\partial \theta_b(X)}{\partial X}, U^c(X), \frac{\partial U^c(X)}{\partial X}, V^c(X), \frac{\partial V^c(X)}{\partial X}, \theta_c(X), \frac{\partial \theta_c(X)}{\partial X}, \phi_3(X), \frac{\partial \phi_3(X)}{\partial X}, \phi_4(X), \frac{\partial \phi_4(X)}{\partial X}, \phi_7(X), \frac{\partial \phi_7(X)}{\partial X} \right]$$

Dans le contexte de ce travail, on se place dans le cadre des petites déformations, ce qui permet de relier linéairement le vecteur des déformations dans chaque couche au vecteur global des déplacements généralisés \mathbf{q} :

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{q} \quad i = (a, b, c) \quad (18)$$

A partir de ces nouvelles définitions, le travail virtuel dans les substrats (élastiques linéaires) peut être réécrit de la manière suivante :

$$\delta W_{int}^i = - \int_0^L \left(\int_{-t_i}^{t_i} \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{H}_i^T \mathbf{L}_i \mathbf{H}_i) \mathbf{q} dY \right) dX \quad i = (b, c) \quad (19)$$

Pour la contribution de la couche d'adhésif au travail virtuel des efforts internes, on choisit l'expression suivante :

$$\delta W_{int}^a = - \int_0^L \left(\int_{-t_a}^{t_a} \delta \mathbf{q}^T (\mathbf{H}_a^T \mathbf{s}_a) \mathbf{q} dY \right) dX \quad (20)$$

dans laquelle les contraintes \mathbf{s}_a sont calculées itérativement par intégration locale de la loi de comportement élastoplastique, dans le cas général. L'intégration dans l'épaisseur des substrats apparaissant dans l'équation (19) peut s'effectuer de manière analytique, tandis qu'on procède à une intégration numérique dans l'épaisseur de l'adhésif (équation (20)), du fait de la cinématique et surtout du comportement non-linéaire éventuel.

On construit finalement un élément fini 1D à 3 nœuds (en utilisant des fonctions d'interpolation quadratiques). Chaque nœud présente 9 degrés de liberté qui correspondent aux 9 inconnues principales répertoriées précédemment, qui peuvent être rassemblées dans un seul vecteur de champs de déplacements inconnus $\mathbf{u} = \{U^b(X), V^b(X), \theta_b(X), U^c(X), V^c(X), \theta_c(X), \phi_3(X), \phi_4(X), \phi_7(X)\}$. En introduisant le vecteur élémentaire des inconnues nodales \mathbf{u}^e composé de 27 degrés de liberté, on obtient la relation d'interpolation suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}^e \quad (21)$$

où la matrice \mathbf{N} est formée des fonctions d'interpolation quadratiques agencées de manière conforme à la définition des vecteurs de déplacements courants et nodaux. Le vecteur des déplacements généralisés \mathbf{q} précédemment introduit s'exprime simplement en fonction du vecteur \mathbf{u} par l'intermédiaire d'un opérateur \mathbf{T} . On peut écrire alors finalement :

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{N}\mathbf{u}^e = \mathbf{G}\mathbf{u}^e \quad (22)$$

Après discrétisation et intégration numérique (par points de Gauss, par exemple) dans un élément fini de référence, l'expression du travail virtuel des efforts internes (17) peut être reformulée de la façon suivante :

$$\delta W_{int}^e = - \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=b,c} \left(\int_{-t_i}^{t_i} \delta \mathbf{u}^{eT} (\mathbf{B}_i^T \mathbf{L}_i \mathbf{B}_i) \mathbf{u}^e dY \right) + \left(\int_{-t_a}^{t_a} \delta \mathbf{u}^{eT} (\mathbf{B}_a^T \mathbf{s}_a) \mathbf{u}^e dY \right) \right) \frac{L_e}{2} d\xi \quad (23)$$

où $\mathbf{B}_i = \mathbf{H}_i \mathbf{G}$ pour $i = (a, b, c)$.

2.2.2 Procédure de résolution

L'équation d'équilibre matricielle régissant le problème peut s'exprimer finalement comme suit :

$$\mathbf{d}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}^{int} - \mathbf{f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (24)$$

Compte tenu des non-linéarités éventuellement rencontrées (du fait du comportement élastoplastique de l'adhésif), le problème est traité de manière incrémentale, où chaque incrément de calcul consiste en la résolution itérative (par l'algorithme de Newton-Raphson) de l'équation d'équilibre :

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \underbrace{\left(\frac{\partial \mathbf{d}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_i} \right)^{-1}}_{\mathbf{K}_T} (-\mathbf{d}(\mathbf{u}_i)) \quad (25)$$

Dans cette relation, les grandeurs \mathbf{u}_i et \mathbf{u}_{i+1} consistent en les vecteurs des déplacements nodaux (sur l'ensemble de la structure) aux itérations successives i et $i + 1$. Le terme $\mathbf{d}(\mathbf{u}_i)$ représente le résidu à annuler à chaque nouvelle itération et \mathbf{K}_T est la matrice raideur tangente, calculée à partir de l'opérateur

tangent constant issu de l'intégration locale en plasticité.

Un code élément fini "maison" a été développé à partir de la formulation précédente pour simuler le comportement d'un JSR, qui allie des éléments enrichis tels que présentés précédemment (pour modéliser la partie à trois couches au niveau de l'adhésif) à des éléments poutres standard (pour représenter les substrats seuls, de part et d'autre de la partie collée).

3 Validation

3.1 Données géométriques et matérielles

À des fins de comparaison, pour valider l'élément enrichi développé, on modélise l'essai JSR également sur Abaqus, à l'aide d'éléments 2D standard, toujours en contraintes planes. Le comportement des substrats est élastique alors que le comportement de l'adhésif est respectivement élastique dans le cas 1 et élastoplastique dans le cas 2. Le JSR est soumis à un chargement de traction de $F = 5000N$. Les dimensions géométriques retenues sont listées dans le tableau 1.

| b (mm) | t_a (mm) | $t_b = t_c$ (mm) | L (mm) | $l_1 = l_2$ (mm) |
|----------|------------|------------------|----------|------------------|
| 25 | 0.4 | 2 | 25 | 75 |

TABLE 1 – Paramètres géométriques

où t_a, t_b, t_c sont respectivement l'épaisseur de la couche de colle et celles des deux substrats. L et b sont la longueur et la largeur du joint de colle. Les propriétés mécaniques sont résumées dans le tableau 2.

| $E_b = E_c$ (MPa) | $\nu_b = \nu_c$ | E_a | ν_a | σ_0 (MPa) | H_a (MPa) |
|-------------------|-----------------|-------|---------|------------------|-------------|
| 2.1E6 | 0.3 | 6500 | 0.36 | 12 | 100 |

TABLE 2 – Propriétés matérielles

Tous les calculs sont réalisés dans le cadre de petites déformations.

3.2 Comparaison des résultats

On considère tout d'abord le cas de l'élasticité. La figure 2 présente l'évolution des contraintes Σ_{XX} , Σ_{XY} et Σ_{YY} le long de l'axe moyen (longitudinal) du joint de colle. Pour l'ensemble des trois contraintes, on observe une parfaite concordance entre les résultats d'Abaqus et ceux issus de notre modèle. En particulier, l'élément fini enrichi développé permet d'estimer les contraintes normales dans la direction longitudinale (Σ_{XX}), contrairement à la plupart des modèles analytiques ou numériques simplifiés existants. On remarque que ces contraintes sont ici bien décrites par le modèle 1D, et affichent une valeur maximale qui est loin d'être négligeable vis-à-vis des autres contraintes.

À la figure 3, on s'intéresse à l'évolution des mêmes contraintes toujours dans la direction longitudinale, mais cette fois à l'interface (supérieure) entre la colle et le substrat. Les résultats sont encore en parfaite adéquation, y compris en $X = 0$ (bord libre). Ce point est théoriquement singulier et donc le lieu de contraintes infinies, ce qui se traduit ici, aussi bien pour Abaqus que pour le modèle enrichi, par une asymptote verticale pour chacune des contraintes. On remarque également que ces nouvelles contraintes diffèrent des précédentes, ce qui montre les limites d'un modèle où l'adhésif est réduit à une simple ligne et qui ne prend ainsi pas en compte l'évolution des contraintes dans l'épaisseur du joint de colle.

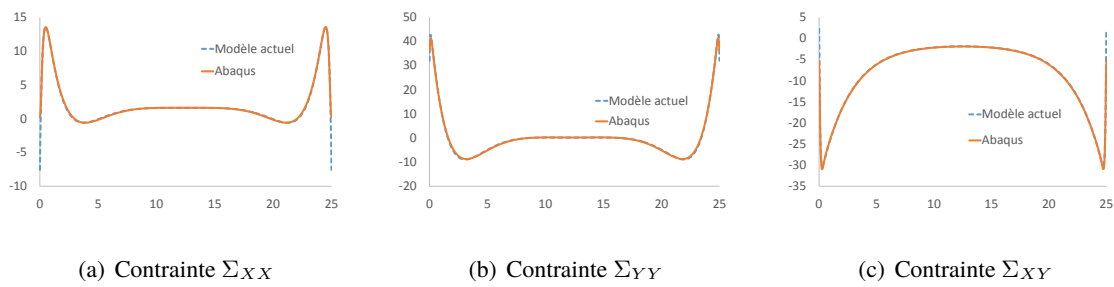


FIGURE 2 – Cas 1 : Distribution des contraintes dans l'adhésif le long de l'axe moyen

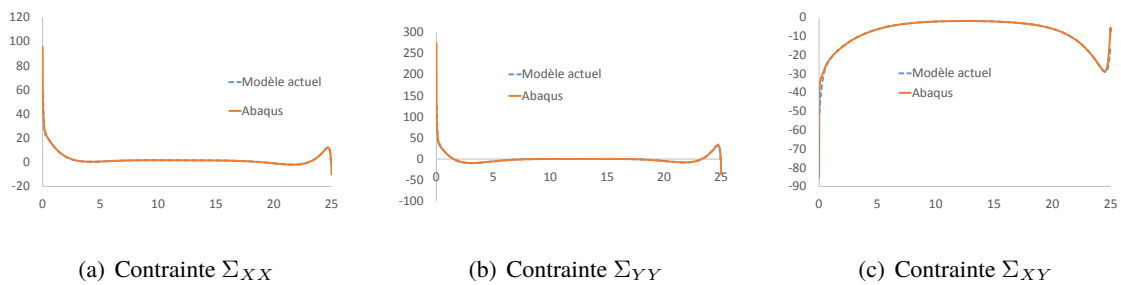


FIGURE 3 – Cas 1 : Distribution des contraintes dans l'adhésif le long de l'interface supérieure

Les mêmes résultats sont ensuite présentés dans le cas de la plasticité. La figure 4 présente la nouvelle évolution des contraintes le long de l'axe moyen, alors que la figure 5 montre l'évolution des contraintes le long de l'interface supérieure. Les résultats obtenus avec le modèle actuel sont encore parfaitement similaires aux résultats obtenus avec Abaqus dans les mêmes conditions. On remarque juste la disparition des singularités, vis-à-vis du cas de l'élasticité.

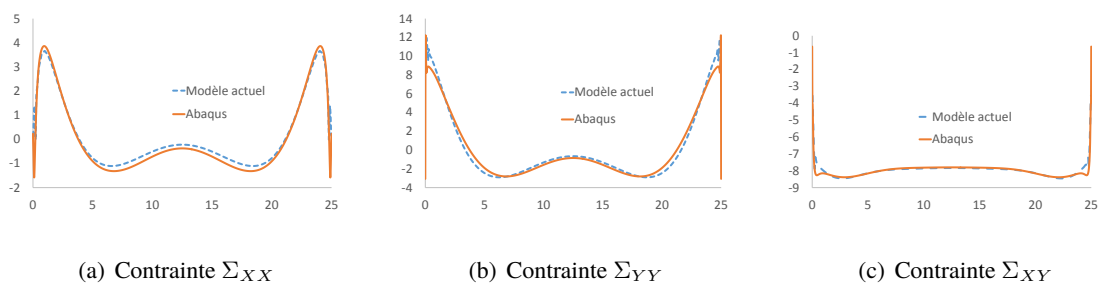


FIGURE 4 – Cas 2 : Distribution des contraintes dans l'adhésif le long de l'axe moyen

4 Conclusion

Un modèle élément fini enrichi 1D a été proposé et implémenté dans un programme "maison" de façon à simuler le comportement d'un joint à simple recouvrement de manière efficace et précise. La validation des résultats vis-à-vis de calculs 2D sur Abaqus est très satisfaisante, tant en élasticité qu'en plasticité. On obtient en particulier avec ce modèle l'ensemble des trois contraintes dans le plan du problème au sein de l'adhésif, qui n'est pas réduit ici à une simple interface entre les deux substrats et donc à deux champs de contraintes de cisaillement et d'arrachement variant uniquement de manière longitudinale. Ce

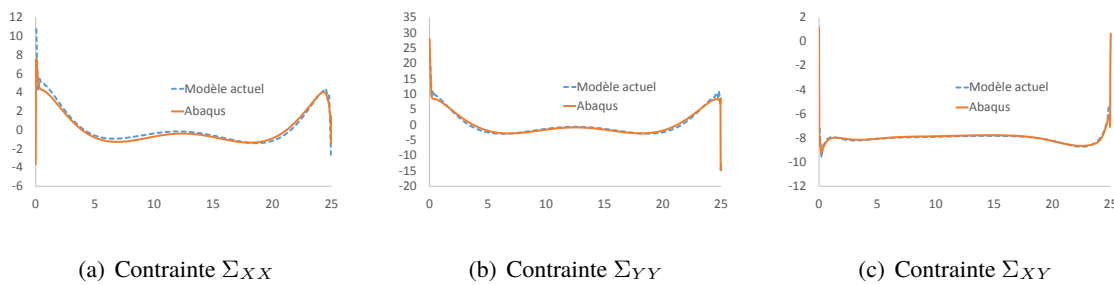


FIGURE 5 – Cas 2 : Distribution des contraintes dans l'adhésif le long de l'interface supérieure

modèle (et le programme associé) sont amenés à être étendus à de nouveaux types de comportements matériels, incluant progressivement de l'endommagement, spécifiquement aux interfaces, et est voué finalement à la calibration du comportement des adhésifs ainsi qu'au dimensionnement d'assemblages collés.

Références

- [1] O. Volkersen. Die Niekraftverteilung in Zugbeanspruchten mit Konstanten Laschenquerchritten, Luftfahrtforschung (1938) 55–72.
- [2] J.Y. Cognard, R. Créac'hacdec, J. Maurice. Numerical analysis of the stress distribution in single-lap shear tests under elastic assumption — Application to the optimisation of the mechanical behaviour, International Journal of Adhesion and Adhesives, 31 (2011) 715–724.
- [3] S.E. Stapleton, A.M. Waas, S.M. Arnold. Functionally graded adhesives for composite joints, International Journal of Adhesion and Adhesives, 35 (2012) 36–49.
- [4] J.C. Simo, R.L. Taylor. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, International Journal for numerical methods in engineering, 22 (1986) 649–670.