
Théorèmes de Noether et lois de conservation des équations de Navier-Stokes incompressibles

Dina Razafindralandy*^{†1} and Aziz Hamdouni^{‡2}

¹Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement (LaSIE) – CNRS : UMR3474, Université de La Rochelle – Avenue Michel Crépeau F-17042 La Rochelle Cedex 1, France

²Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement (LaSIE) – CNRS : UMR3474, Université de La Rochelle – France

Résumé

Dans cette présentation, en l'hommage au centenaire de son article [1], nous étendons les travaux d'Emmy Noether aux équations des fluides incompressibles, dans le but d'en établir des lois de conservation.

Les théorèmes de Noether ont mis en lumière le lien entre les symétries variationnelles d'un système d'un côté et ses lois de conservations et invariances de jauge de l'autre. Ils ont eu une portée considérable dans la compréhension et le développement de la physique théorique moderne. Ces théorèmes, basés sur le calcul de variations, ne sont toutefois applicables que lorsque le système dérive d'un lagrangien. Pour des systèmes plus généraux, Ibragimov [2] a proposé d'augmenter le nombre d'inconnues et d'équations de manière à ce que l'ensemble dérive d'un lagrangien. On peut ainsi appliquer les théorèmes de Noether à ce lagrangien "étendu" (c-à-d dépendant non seulement des variables originales mais aussi des nouvelles inconnues). Cela permet de déduire des lois de conservation ou des invariances de jauges, à condition de connaître des symétries variationnelles du système augmenté.

En suivant l'approche d'Ibragimov, nous présenteront des lois de conservations locales et non locales des équations de Navier-Stokes incompressibles. Pour cela, on utilisera les équations adjointes formelles linéarisées pour augmenter le système et obtenir un lagrangien étendu. Ce lagrangien dépendra de la vitesse et de la pression, ainsi que d'une vitesse duale et d'une pression duale. On déterminera ensuite les symétries de Lie du système augmenté. Puis, on en déduira quelques symétries variationnelles. Ces dernières permettront alors de retrouver des lois de conservation déjà connues mais aussi d'en calculer d'autres via les théorèmes de Noether.

Références:

E. Noether. Invariante Variationsprobleme. Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, pp. 235-257, 1918.

N. Ibragimov. A new conservation theorem. Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol 333 (1), pp 311–328, 2007

*Intervenant

[†]Auteur correspondant: drazafin@univ-lr.fr

[‡]Auteur correspondant: aziz.hamdouni@univ-lr.fr

Mots-Clés: Théorèmes de Noether, lois de conservation, invariance de jauge, symétrie, variations