

Amélioration des règles de calcul de la vitesse de circulation des matériels roulants ferroviaires en fonction des caractéristiques de la voie

M. EL MOUEDDEB^a, F. LOUF^b, P.A. BOUCARD^c, F. DADIÉ^d,
P. DUPONT^e, G. SAUSSINE^f

a. SNCF Réseau et Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT),
maryam.elmoueddeb@reseau.sncf.fr

b. Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT), francois.louf@ens-paris-saclay.fr

c. Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT), pierre-alain.boucard@ens-paris-saclay.fr

d. SNCF Réseau, franck.dadie@reseau.sncf.fr

e. SNCF Réseau, patrick.dupont@reseau.sncf.fr

f. SNCF Réseau, gilles.saussine@reseau.sncf.fr

Résumé :

Le Réseau Ferré National (RFN) est géré par SNCF Réseau dont le rôle principal est de garantir la sécurité et le confort des passagers lors de la circulation des trains. Ainsi, l'admission d'un nouveau matériel roulant sur une voie nécessite des vérifications de compatibilité entre ces deux derniers. Dans ce cas, on détermine la vitesse du véhicule en fonction de la résistance mécanique de la voie et de son tracé : on parle alors des conditions de circulation. Cet article présente un historique relatif aux règles de calcul à l'origine des conditions de circulation ainsi que la démarche actuellement utilisée par SNCF Réseau. Dans une optique d'optimisation des circulations, des améliorations peuvent être apportées aux règles de calcul des conditions de circulation. La mise en place d'une nouvelle démarche se fera à travers des modèles numériques de la voie qui permettront de comprendre sa réponse en termes de déformations et de contraintes vis à vis les efforts verticaux et latéraux appliqués par le matériel roulant. Une présentation de différents modèles de la littérature est faite afin de réaliser un état de l'art. Ces modèles de la voie permettront d'alimenter les réflexions nécessaires à la définition de modèles pertinents qui restent légers pour une exploitation industrielle. Des premiers modèles analytiques simplifiés de la voie ont été développés (poutre sur fondation élastique, poutre sur appuis discrets rigides ou élastiques) et comparés afin d'étudier l'effet de la nature des appuis sur la réponse statique de la poutre.

Abstract :

SNCF Réseau is in charge of the french railway network's management. Indeed, its main role is to ensure passengers security and comfort during trains circulations. Thus, before a railway vehicle is authorized to move on a track, some verifications should be made in order to decide at first whether or not the train is allowed to circulate and secondly with which speed, taking into account the mechanical characteristics of the track and its alignment : This is known as traffic conditions. This paper presents the origin of computation rules for traffic conditions and the procedure currently used in SNCF Réseau to set traffic

conditions. With a view to optimizing railway traffic, this research work aims to improve computation rules for traffic conditions. The implementation of a new approach will be achieved through the use of numerical models of the track allowing a better understand of the stress and strain response of the track to vertical and lateral loads of the train. An overview of different track models in litterature is given as a baseline to define relevant but light models in this work. First analytical simplified track models has been developed (beam on elastic foundation, beam on discret elastic/rigid supports) and compared in order to study the impact of supports nature on the beam static response.

Mots clefs : Transport ferroviaire ; règles DEMAUX ; vitesse maximale de circulation ; histoire de sollicitation du rail ; modèles de la voie.

1 Introduction

Le rôle principal de la voie ferrée est de guider le train en mouvement tout en supportant les efforts appliqués par ce dernier et de les distribuer jusqu’au sol support. En effet, le rail directement en contact avec la roue transmet les efforts aux traverses sur lesquelles il repose. Ces efforts sont par la suite répartis dans la couche de ballast puis dans les autres couches inférieures de la voie jusqu’au sol support [1].

Il existe deux types de voie à savoir la voie ballastée et la voie sur dalles (non ballastées).

En ce qui concerne la voie ballastée, on distingue deux sous systèmes (FIGURE 1) :

- la superstructure de la voie qui englobe le rail, la traverse et le ballast ;
- la sous-structure qui comporte la sous-couche, la couche de forme et le sol support.

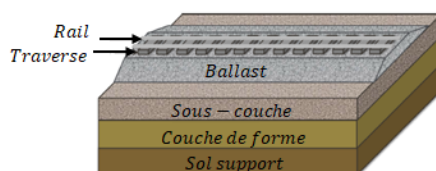


FIGURE 1 – Composition de la voie ferrée [2].

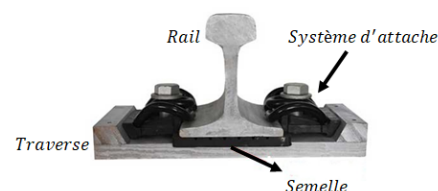


FIGURE 2 – Fixation du rail à la traverse. Source :

<http://fr.suyurailway.com>

Une description plus détaillée des éléments de la voie est donnée dans la TABLE 1 [1].

La composition de la voie lui confère donc un comportement très complexe dont la compréhension fait l’objet de recherche continue depuis les débuts d’exploitation du chemin de fer, notamment pour proposer des conditions de circulation qui respectent les normes de sécurité et qui s’adaptent à l’état de la voie.

Les travaux de modélisation numérique de la voie ont connu des avancées majeures qui pourront servir de base pour optimiser les règles de calcul des conditions de circulation des matériels roulants. En effet, les règles actuelles s’appuient sur des considérations théoriques qui datent des années quarante. Même si elles ont l’avantage d’être simples et rapides, elles ne tiennent pas compte explicitement de l’influence de plusieurs paramètres tels que la courbure de la voie, la fatigue de ses composants et l’état des systèmes d’attache nécessaires à la fixation du rail sur les traverses. Ceci a eu pour effet d’intégrer le retour d’expérience afin de faire évoluer les conditions de circulation en tenant compte de l’intensité

Composants	Rôle
Le rail	<ul style="list-style-type: none"> - offre une surface de roulement lisse au véhicule - guide le véhicule - supporte et distribue les efforts de contact - permet la conduction électrique
La semelle	<ul style="list-style-type: none"> - est placée entre le rail et la traverse - isole électriquement - contribue à la rigidité globale de la voie
La traverse	<ul style="list-style-type: none"> - supporte le rail - préserve l'alignement et l'écartement des rails - isole électrique entre les deux rails - transmet les efforts verticaux, latéraux et longitudinaux du rail au ballast
Le ballast	- assure la stabilité latérale et verticale du système {rail, traverse} pour respecter le nivellement et l'alignement de la voie
La sous-couche	<ul style="list-style-type: none"> - est une zone de transition entre la couche de ballast de bonne qualité à cause de ses larges particules et le sol à plus fines particules - évite l'interpénétration du ballast et des couches inférieures de la sous-structure
La couche de forme	<ul style="list-style-type: none"> - sépare la sous-couche du sol support - renforce l'infrastructure de la voie
Le sol support	<ul style="list-style-type: none"> - est important pour assurer la résistance mécanique de la voie aux efforts de contact - offre une souplesse et un amortissement de la voie qui atténue les phénomènes de résonance

TABLE 1 – Rôle des composants de la voie.

du trafic pour les trains de marchandises mais aussi de l'influence des efforts latéraux sur la résistance latérale du rail.

Cette méthodologie actuellement utilisée à SNCF Réseau donne des résultats cohérents avec le retour d'expérience des circulations antérieures mais nécessite une justification scientifique plus rigoureuse pour faire face à l'interopérabilité européenne et aux interactions avec les entreprises ferroviaires.

L'enjeu majeur des travaux en cours est donc de proposer une nouvelle démarche rigoureuse qui s'appuie sur l'intégration d'un plus grand nombre de paramètres sans toutefois nécessiter un temps de calcul incompatible avec une exploitation industrielle. Les modèles à développer dans ce cadre seront l'occasion d'estimer l'histoire de sollicitation d'une voie et d'étudier l'influence de chacun de ses constituants via des études de sensibilité.

2 Origine des règles de calcul des conditions de circulation

Pour faire face à l'hétérogénéité du Réseau Ferré National (RFN) lors de la création de la SNCF, un classement des voies et des matériels roulants a été réalisé par la commission Demaux en 1944 [3]. Le but était de proposer une démarche d'admission des matériels roulants du point de vue de leurs compatibilités avec la voie.

Le choix des paramètres pertinents dans la définition des différentes classes de voies et des matériels roulants s'est basé sur une démarche simple en ne considérant que les principales caractéristiques de la voie et du véhicule.

2.1 Classement des voies

Le paramètre retenu pour le classement des voies est défini à partir du calcul RDM d'une poutre élastique disposée sur deux appuis simples et soumise à une flexion sous l'effet d'un effort ponctuel Q .

Le modèle utilisé représente un rail en appui sur deux traverses et soumis à une charge de la roue du matériel roulant. Il en découle le ratio ci-dessous [3] :

$$\frac{I_x}{vl} \quad (1)$$

Où :

- I_x (mm^4) est le moment quadratique du rail par rapport à l'axe neutre horizontal compte tenu de son usure ;
- v (mm) est la distance verticale qui sépare la fibre neutre à la fibre la plus éloignée ;
- l (mm) est l'espacement entre les axes des traverses consécutives.

En supposant que l'effort s'exerce au milieu de la poutre on obtient une contrainte normale maximale dans la section la plus sollicitée :

$$\sigma_{max} = \frac{Q}{4 \frac{I_x}{vl}} \quad (2)$$

Classiquement la contrainte σ_{max} diminue quand le ratio $\frac{I_x}{vl}$ augmente. Ainsi les voies appartenant aux groupes Demaux les plus hauts supportent des contraintes maximales en flexion plus élevées. Bien que simple, ce ratio ne prend pas en considération la fatigue des éléments de la voie, l'influence des courbes et même l'état d'entretien de la voie.

De par cette démarche, 5 groupes de voies ont été dégagés, ils sont rappelés dans la TABLE 2.

Armement de voie	très léger	léger	moyen	fort	très fort
$\frac{I_x}{vl} (mm^2)$	[100;140]	[141;179]	[180;235]	[236;350]	>350

TABLE 2 – Groupes Demaux [3].

2.2 Classement des matériels roulants

Concernant l'agressivité des matériels roulants sur la voie, la commission a dégagé deux paramètres principaux [3] :

1. la charge verticale maximale à la roue Q ;
2. un facteur de nocivité $\frac{C P_m L^2 V^2}{e}$ qui traduit l'effet des efforts latéraux exercés par le matériel roulant.

Le facteur de nocivité $\frac{C P_m L^2 V^2}{e}$ prend en compte :

- le poids total de la machine P_m ;
- la vitesse V du véhicule ;
- la longueur L du véhicule ;
- l'empattement total e qui désigne la distance entre les axes d'essieux extrêmes ;
- le coefficient empirique C qui traduit l'avantage apporté par des véhicules munis de bissels ou de bogies par rapport aux véhicules à empattement rigide. En effet, un bogie ou un bissel adoucit la mise en courbe du véhicule car des degrés de libertés deviennent possibles entre la caisse et les essieux. La commission a affecté à ce coefficient la valeur de 0.5 pour un bogie, 0.6 pour un bissel et 1 en cas d'un véhicule entièrement rigide.

2.2.1 Choix de la charge verticale Q comme premier paramètre d'agressivité du matériel roulant

Le choix de la charge à la roue comme paramètre d'agressivité du matériel roulant [3] découle de l'équation de flexion d'un rail (poutre infinie) sur une fondation élastique continue de module d'élasticité k qui modélise l'ensemble {semelle, traverse, ballast jusqu'au sol support}. Ce modèle, représenté en FIGURE 3, a été introduit par Winkler en 1867 [4]. Le rail de module de Young E et de moment quadratique I_x , subit une charge ponctuelle Q en $x = 0$ assimilée à l'action de la roue sur le rail.

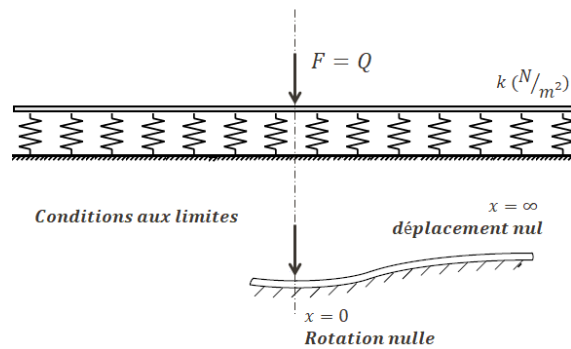


FIGURE 3 – Poutre sur fondation élastique [5].

Classiquement, le déplacement vertical u_z vérifie l'équation différentielle suivante pour une poutre de Bernoulli :

$$E I_x \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + k u_z = Q \delta(x) \quad (3)$$

Elle a pour solution :

$$\begin{cases} u_z = \frac{Q\beta}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \\ \beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI_x}} \end{cases} \quad (4)$$

On détermine aussi l'expression de la contrainte maximale en flexion qui fait donc intervenir la charge maximale à la roue (équation (5)).

$$\sigma_{max} = \frac{Q}{4\beta \frac{I_x}{v}} \quad (5)$$

2.2.2 Choix du coefficient d'agressivité comme deuxième paramètre d'agressivité du matériel roulant

Le coefficient d'agressivité traduit les effets d'oscillation de lacet du véhicule générant des efforts latéraux Y qui sollicitent la voie (FIGURE 4). Cette oscillation est caractérisée par une longueur d'onde λ . Pour déterminer l'expression de ce coefficient, il est mentionné dans [3] que le véhicule est assimilé à un rectangle rigide de longueur L , de poids P_m et d'empattement e . Le but est de remonter au moment dynamique qui est repris par les efforts latéraux [3]. Or pour un véhicule qui décrit un mouvement oscillatoire d'angle α (FIGURE 5), le moment dynamique M s'écrit :

$$M = J \ddot{\alpha} \quad (6)$$

Où

$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{e_0}{e} \sin(\omega t) \\ e_0 = a + b \\ \omega = \frac{2\pi V}{\lambda} \end{cases} \quad (7)$$

e_0 correspond au jeu total dans la voie comme il est rapporté par la FIGURE 6. Il s'agit de la marge de déplacement latéral offerte à l'essieu dans la voie et elle dépend du point de contact roue/rail qui varie au cours du temps lors des oscillations de lacet.

On retrouve ainsi un moment dynamique et donc des efforts latéraux proportionnels à $\frac{P_m L^2 V^2}{e}$.

Le coefficient C , comme il a été mentionné, est purement empirique et introduit le rôle des bissels et des bogies qui favorisent des inscriptions en courbes avec des efforts latéraux moins importants.

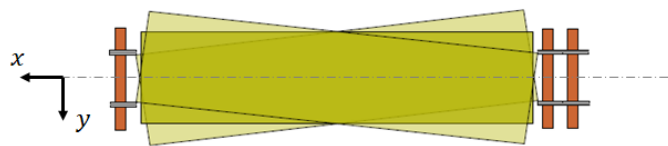


FIGURE 4 – Lacet du véhicule [6].

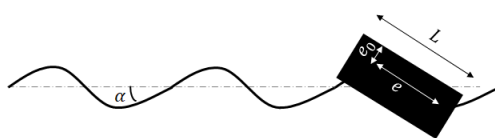


FIGURE 5 – Trajectoire du véhicule.

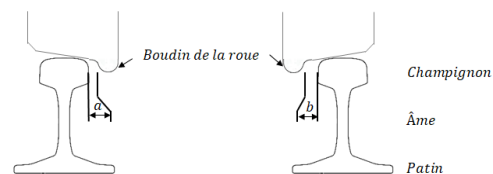


FIGURE 6 – Jeu dans la voie.

3 Démarche actuelle pour l'admission des matériels roulants sur le RFN

Les conditions de circulation actuellement mises en place à SNCF Réseau ont la même base théorique que les travaux de la commission Demaux. Elles ont cependant intégré le retour d'expérience et l'avis des experts pour faire face à l'évolution des matériels roulants ainsi que les voies du réseau. Elles se ramènent concrètement à déterminer la vitesse maximale du véhicule V_{max} et l'insuffisance de dévers maximale I_{max} à appliquer à la voie lorsqu'elle est en courbe.

Notions d'insuffisance de dévers

Un véhicule qui franchit une courbe est soumis à l'accélération de gravité g et à l'accélération latérale centrifuge $\gamma = \frac{V^2}{R}$ [7].

L'accélération totale Γ exercée sur ce véhicule est alors donnée par l'expression (8) :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\gamma} + \vec{g} \quad (8)$$

Pour compenser la force centrifuge, les voies sont inclinées en relevant la file de rail extérieure par rapport à la file de rail intérieure. Cette différence de niveau en mm entre les deux files de rail est

appelée dévers. Le dévers théorique (Figure 7) est le dévers qui permet d'obtenir une accélération totale Γ perpendiculaire au plan de la voie inclinée ainsi que des efforts normaux (perpendiculaires au plan de la voie inclinée) identiques sur les deux rails et des efforts latéraux nuls (parallèles au plan de la voie inclinée) [7].

En supposant que l'angle d'inclinaison α est faible, il est possible d'exprimer le dévers théorique d_{th} en fonction de la vitesse V , du rayon de la courbe R et de l'écartement de la voie B (équation (9)) :

$$d_{th} = \frac{V^2 B}{R g} \quad (9)$$

En réalité le dévers théorique ne peut pas être appliqué sur les voies du réseau à cause du risque de basculement du véhicule. On applique plutôt un dévers réel d et on définit ainsi :

- l'insuffisance de dévers I comptée positive et qui correspond au cas où le dévers réel est inférieur au dévers théorique ;
- l'excès de dévers compté négatif et qui correspond au cas où le dévers réel est supérieur au dévers théorique.

L'insuffisance de dévers est beaucoup plus fréquente dans les voies du réseau que l'excès de dévers. Elle s'exprime alors en fonction du dévers théorique et du dévers réel à travers la relation (10) [7] :

$$\begin{cases} d_{th} = d + I \\ I = \frac{V^2 B}{R g} - d \end{cases} \quad (10)$$

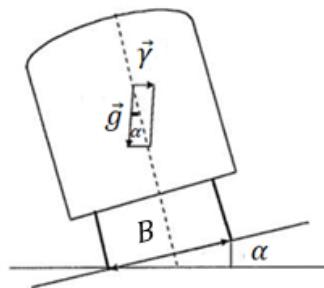


FIGURE 7 – Dévers théorique de la voie [7].

Processus de détermination de la vitesse et de l'insuffisance de dévers maximales

La démarche pour déterminer les conditions de circulation est explicitée en FIGURE 8. La première étape consiste à déterminer le ratio $\frac{I_x}{v l}$ en regard du type de pose de la voie ainsi que les types de rail et de traverses. Ce ratio permet d'évaluer la résistance à la flexion de la voie et par extension son groupe Demaux.

Une fois le classement de la voie connu, il convient de déterminer celui du matériel roulant étudié.

La catégorie du véhicule détermine quel tableau du référentiel [8] consulter. Ce dernier permet de déduire les valeurs maximales de la vitesse et de l'insuffisance de dévers accessibles au matériel roulant.

Par exemple, pour une locomotive, le classement dépend du nombre de bogies et du nombre d'essieux par bogies. En ce qui concerne les wagons, le calcul des conditions de circulation nécessite de savoir le tonnage mensuel supporté par la voie.

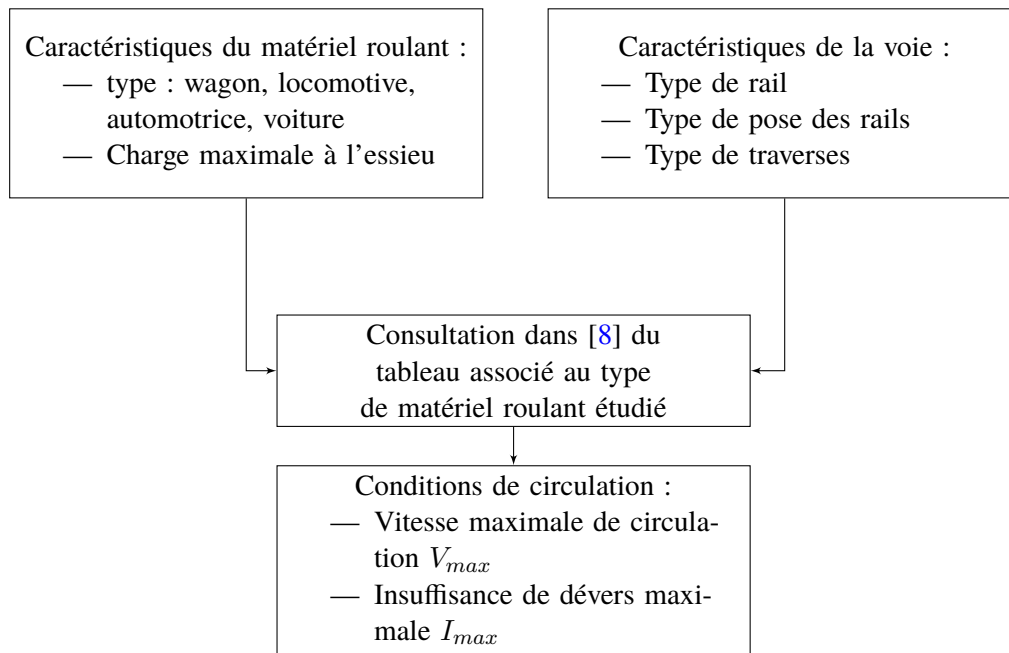


FIGURE 8 – Démarche de calcul des conditions de circulation d'un matériel roulant.

À titre d'exemple, la circulation d'un train composé d'une locomotive et d'un wagon est conditionnée par les conditions de circulation du matériel roulant le plus contraignant en termes de valeurs maximales de vitesse et d'insuffisance de dévers comme le formule l'équation (11).

$$\begin{cases} V_{max,train} = \min(V_{max,loco}, V_{max,wagon}) \\ I_{max,train} = \min(I_{max,loco}, I_{max,wagon}) \end{cases} \quad (11)$$

Pour prendre en compte le tracé de la voie, à savoir la présence de courbes de rayon R et de dévers réel d , on calcule à partir de l'insuffisance de dévers $I_{max,train}$ une vitesse dite vitesse potentielle de tracé $V_{tracé,train}$ en utilisant la relation (10) et dont l'expression finale est donnée par l'équation (12).

$$V_{tracé,train} = \sqrt{\frac{Rg(I_{max,train} + d)}{B}} \quad (12)$$

Finalement, la vitesse retenue pour la circulation du train sera :

$$V_{train} = \min(V_{max,train}, V_{tracé,train}) \quad (13)$$

4 Modèles de voie dans la littérature

Le faible coût de la modélisation par rapport aux essais réels en fait un outil pertinent pour prédire la performance de la voie et permettre son dimensionnement. Plusieurs modèles destinés à l'étude statique ou dynamique de la voie ont émergé, la méthode historique étant de considérer une poutre sur une fondation élastique. Des modèles 3D non linéaires basés sur la théorie des éléments finis ou une approche multi-corps ont également été développés. Ils décrivent l'interaction complexe entre les constituants de la voie. Quelques modèles statiques et dynamiques de la voie sont présentés dans les sections 4.1 et 4.2.

4.1 Modèles statiques de la voie ferrée

Le dimensionnement de la voie nécessite de prédire les contraintes et les déformations dans ses différents éléments notamment le rail et la traverse.

Hetényi [9] s'est intéressé en 1973 au cas des poutres sur fondations élastiques (FIGURE 3). Il a entre autres étudié le cas des poutres infinies, semi infinies et finies en considérant plusieurs cas de chargement allant de l'effort ponctuel à une distribution triangulaire. Le cas des poutres à rigidité en flexion variable et des fondations avec modules variables ont également été traités ce qui est pertinent dans les zones de transition où les propriétés du sol changent. La théorie des poutres sur fondation élastique a trouvé sa première application dans le calcul des contraintes et des déformations de la voie ferrée. Néanmoins, l'approximation d'un modèle discret de la voie par un modèle de poutre sur fondation élastique n'est possible que si l'espacement entre traverses reste petit. Il est mentionné dans [9] que la zone d'influence de l'effort appliqué Q doit contenir au minimum quatre traverses de part et d'autre de son point d'application. La zone d'influence est en fait la longueur de la voie déformée dans la direction longitudinale à la suite de l'effort appliquée. Au delà de cette longueur le déplacement vertical est négligeable devant le déplacement maximal.

Même si la valeur du module de fondation k n'est pas évidente à estimer de par les propriétés du sol et du ballast, Hetényi a démontré qu'une erreur de 100% de k n'engendre qu'une erreur de 16.5% de la contrainte maximale en flexion (équation (5)). Dans ce sens, des méthodes pour la détermination du module élastique de la fondation ont été présentées et critiquées dans [10]. Il est à noter que dans la théorie initiale de Winkler, chaque réaction en un point est proportionnelle au déplacement en ce même point, or selon Hetényi [9] la présence du ballast et du sol introduit une continuité du déplacement de la poutre entre points voisins. Pour prendre en compte cette continuité il est commode de jouer sur la définition de la rigidité des supports (en N/m) en supposant qu'elle est égale à l'effort ponctuel Q divisé par la somme des déplacements à l'ensemble des supports.

En ce qui concerne le comportement de la voie dans sa direction latérale, Prud'homme [11] a étudié sa résistance aux efforts latéraux [11]. Il a établi l'équation différentielle du déplacement de la voie sous l'action d'un effort latéral H en négligeant l'effort vertical exercé par le véhicule. Cela constitue une bonne première approximation, selon Prud'homme, du comportement latéral de la voie. Dans ce modèle l'élément de rail est soumis à (FIGURE 9) :

- des forces longitudinales de compression F dues aux contraintes thermiques ;
- un effort linéique τ dans la direction latérale considéré uniforme. Il traduit la résistance du ballast et est transmis par la traverse ;
- un couple linéique C d'axe vertical qui provient de la rotation de la tête de traverse à laquelle le rail est fixé. Il est exprimé en fonction de la rotation du rail par la relation $C = K_{tr} \frac{\partial u_y}{\partial x}$ où u_y désigne le déplacement latéral du rail ;
- des moment fléchissants M ainsi qu'à des efforts tranchants T appliqués aux extrémités de l'élément.

Ce modèle permet de tracer l'effort latéral H en fonction du déplacement latéral de la voie en son point d'application. Il s'agit en quelque sorte d'estimer la rigidité latérale de la voie qui est non linéaire comme présenté sur la FIGURE 10.

Les courbes montrent un maximum localisé dans la région des faibles déplacements pour des forces F importantes ($F - K_{tr} > 0$). Ce maximum est de moins en moins visible au fur et à mesure que $F - K_{tr}$ diminue et les courbes deviennent toujours croissantes pour des valeurs faibles de la force F .

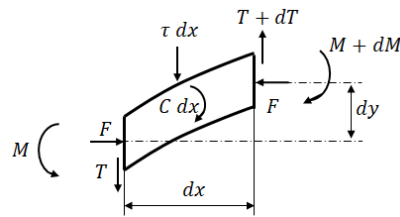
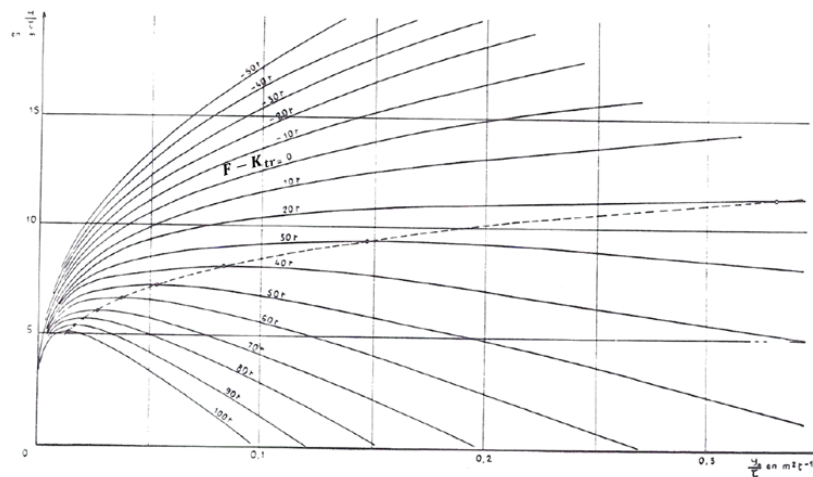
FIGURE 9 – Équilibre d'un élément de rail de longueur dx [11].

FIGURE 10 – Loi de comportement transversale du rail en absence d'efforts verticaux appliqués [11].

Johns et al. dans [12] ont mentionné que le modèle de poutre sur fondation élastique est incapable de donner des informations sur les contraintes locales proche des zones singulières du profil du rail, notamment au niveau de ses congés de raccordement. Ils ont donc proposé des modèles éléments finis 3D de la voie destinés à une analyse plus détaillée des contraintes qui varient dans la section du rail. On cite par exemple, le modèle destiné à l'estimation des contraintes proche de la zone de contact roue/rail ou le modèle de rail sur des supports (traverses) qui reposent sur un demi espace élastique {ballast, sol}. Il en est tiré les conclusions suivantes :

- le modèle de poutre sur fondation élastique donne des approximations raisonnables de la contrainte de flexion au niveau du patin (base) et du champignon (tête) du rail pour une distance supérieure à environ 4 cm sur la longueur du rail du point d'application de l'effort ;
- les modèles éléments finis donnent des contraintes très différentes dans les zones singulières du profil de rail ;
- l'augmentation du module de la fondation engendre une redistribution et une diminution des pics de contraintes dans la section du rail. Le modèle de poutre sur fondation élastique permet de mettre en évidence cette diminution de pic mais reste incapable de prédire la redistribution de la contrainte ;
- l'action combinée des efforts verticaux et transversaux engendre des contraintes de von Mises plus importantes qui peuvent conduire à des déformations plastiques et par conséquent à l'initiation de fissures.

kalliainen et al. [13] ont considéré un modèle 3D de la voie complète (FIGURE 11), ce qui permet une représentation plus physique de ses composants. Dans ce modèle, les semelles sont représentées par des solides élastiques linéaires et on tient compte du pré-chargement des semelles dû à la présence des systèmes d'attaches. L'étude a révélé que les propriétés de la sous-structure notamment la rigidité ont un

effet remarquable sur la performance de la voie. En effet, un sol support souple entraîne des déformations en cisaillement plus importantes dans le reste des composants. En revanche, une modification de l'un des composants de la superstructure n'affectera que les autres éléments de la superstructure.

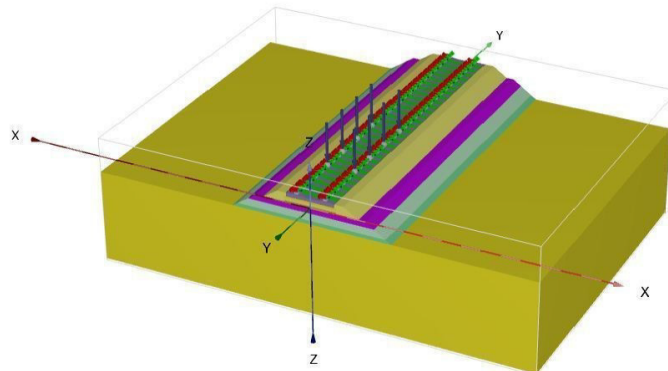


FIGURE 11 – Modèle 3D de la voie [13].

4.2 Modèles dynamiques de la voie ferrée

4.2.1 Comportement dynamique de la voie

Les mesures de réceptance de la voie permettent de caractériser le comportement dynamique de la voie. La FIGURE 12 montre la réceptance d'une voie sollicitée par un effort sinusoïdal vertical et on distingue alors 3 pics [1] :

- une première résonance se situe dans l'intervalle $[50 \text{ Hz}; 300 \text{ Hz}]$. Le système {rail, traverse} joue alors le rôle d'une masse vibrante sur la couche de ballast qui est assimilée à un ressort. Par exemple, cette résonance se trouve à 100 Hz sur la FIGURE 12 et le pic n'est presque pas visible ce qui met en évidence l'amortissement élevé introduit par le ballast ;
- une deuxième résonance se situe dans le domaine fréquentiel $[200 \text{ Hz}; 600 \text{ Hz}]$. Elle est caractérisée par le rebondissement du rail sur les semelles. En effet, la semelle joue le rôle d'un ressort placé entre deux masses qui sont le rail et la traverse. Ainsi, les mouvements du rail et de la traverse sont déphasés. Cette résonance dépend de la rigidité de la semelle ;
- un troisième pic de résonance se situe dans le domaine des hautes fréquences, aux alentours de 1000 Hz sur la FIGURE 12. On observe la résonance du rail à la fréquence "pin-pin". Elle est caractérisée par un très faible amortissement car le mouvement est localisé au niveau du rail. Cette résonance se caractérise par le mouvement de vibration du rail autour des supports (position des traverses) qui deviennent assimilés à des articulations rigides. Quand l'excitation est appliquée sur une traverse c'est le phénomène d'anti-résonance qu'on observe (courbe en trait discontinu dans la FIGURE 12) ;
- une résonance dans le domaine fréquentiel $[20 \text{ Hz}; 40 \text{ Hz}]$ peut apparaître, mais dont l'amplitude n'est pas excessive du fait de l'amortissement dans le sol support. Il s'agit d'un mode de vibration de l'ensemble des composants de la voie {rail, traverse, ballast, sous couche, couche de forme} sur le sol support.

D'après Knothe et Grassie [14], le domaine fréquentiel $[0; 20 \text{ Hz}]$ concerne l'étude de la dynamique du véhicule qui est importante dans le cas où l'on souhaite aborder des problématiques de stabilité, de

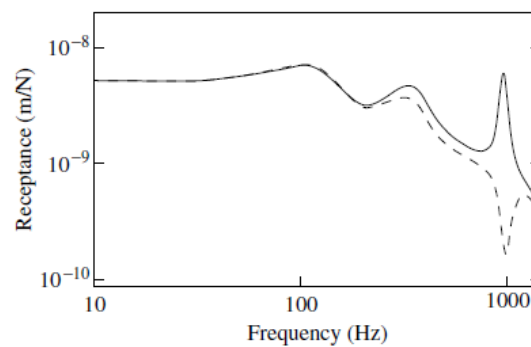


FIGURE 12 – Réponse fréquentielle de la voie au niveau du point d'excitation. Trait continu : entre deux traverses. Trait discontinu : sur la traverse [1].

confort et de sécurité lors des circulations. À ces fréquences, la voie est assimilée à un ressort relativement rigide. Ce n'est que légèrement au dessus de 20 Hz que l'inertie de la voie prend progressivement de l'importance et que les suspensions du véhicule isolent les masses non suspendues du reste du véhicule. Cela veut dire qu'il n'y aura pas d'effets néfastes sur les phénomènes de confort et de stabilité. Ainsi, au dessus de 20 Hz , la dynamique de la voie est de plus en plus importante alors que la dynamique du véhicule est de moins en moins importante.

4.2.2 Modèles de la littérature

Les travaux de la littérature concernent pour la plupart la dynamique verticale de la voie.

Le modèle de poutre (rail) sur fondation élastique est acceptable pour des chargements statiques de la poutre mais reste incapable de donner une bonne prédiction des effets dynamiques selon [1] du fait que la fondation ne comporte pas de masses.

Une première amélioration a été considérée dans la gamme des poutres sur fondation continue. Il s'agit de considérer la fondation sur laquelle repose le rail comme (FIGURE 13a) :

- une première couche qui modélise les semelles et systèmes d'attache par une distribution linéique de {ressorts, amortisseurs} ;
- Une répartition linéique des traverses le long du rail sous la couche des semelles. La traverse peut être modélisée en tant qu'une masse répartie ou une poutre avec masse et rigidité ;
- une deuxième couche qui modélise le ballast (ou ballast jusqu'au sol) par une répartition de {ressorts, amortisseurs}.

Grassie et Cox [15] ont utilisé un tel modèle continu pour étudier le comportement des supports de la voie et il a été conclu que des larges déformations de la traverse étaient associées à des résonances de traverses peu amorties.

Ces modèles ne restent valides que pour des fréquences inférieures à 500 Hz pour des excitations verticales et 400 Hz pour des excitations latérales selon Knothe et Grassie [14]. Par conséquent, la fréquence "pin-pin" ne peut pas être reproduite car le mode "pin-pin" se caractérise par le mouvement de vibration du rail autour des supports qui deviennent identiques à des articulations rigides. Il faut donc faire appel à des modèles discrets où les positions des supports sont périodiques le long de la voie (FIGURE 13b).

Dans les modèles discrets, le rail est supporté du haut vers le bas par :

- une répartition discrète de semelles et systèmes d'attache représentés par un ressort et un amortisseur en parallèles ;
- une répartition discrète de traverses représentées chacune par une masse rigide ou une poutre ;
- un lit de ballast (ou dans certains cas ballast et couches de la sous-structure) pour modéliser la fondation sur la quelle repose la traverse.

Cai et al. [16] ont utilisé un tel modèle discret (FIGURE 13b). Le rail et la traverse peuvent être modélisés par une poutre de Bernoulli ou une poutre de Timoshenko. Le but de ces travaux étaient d'étudier le comportement vibratoire de la voie et obtenir ainsi la forme de la réceptance de la voie. La résolution du problème se fait en considérant la voie comme un assemblage périodique de deux types d'éléments :

- les éléments dits "éléments généralisés" qui comportent un tronçon de rail supporté sur chaque extrémité par le système {traverse, semelle, ballast et sol support} comme il est montré en FIGURE 14a ;
- les éléments dits "adjacents" constitués uniquement d'un tronçon de rail comme il est montré en FIGURE 14b.

La réceptance de la voie pour le modèle décrit ci-dessus a été comparée avec des données de mesure. On retrouve des résultats relativement proches de la courbe expérimentale surtout pour le cas où le rail et la traverse sont modélisés en poutres de Timoshenko.

Les modèles dynamiques de la voie sont également destinés à l'étude de l'interaction véhicule/voie pour étudier entre autres l'effet de défauts géométriques de la roue et de la voie. Dans ce genre de travaux on modélise le véhicule par un assemblage multi-corps (assemblage de masses et inerties, ressorts et amortisseurs).

Nielsen et Igeland [17] ont choisi un modèle discret à deux couches (FIGURE 13b) pour explorer l'influence des défauts comme l'usure ondulatoire. Hou et al. [18] ont pris en compte cette fois dans le modèle discret à deux couches (FIGURE 13b) les deux files de rails pour étudier des défauts asymétriques. Zhai et Cai [19] ont proposé un modèle discret à 3 couches (FIGURE 13c) où la couche de ballast est améliorée en lui attribuant en plus une masse. Des ressorts et amortisseurs sont ajoutés entre les masses de ballast dans la direction longitudinale de la voie pour prendre en considération le fait qu'une déformation en un point affecte les points voisins. Les résultats obtenus étaient en bonne corrélation avec l'expérience notamment pour le cas d'un véhicule qui passe sur un joint de rail.

Sun et Dhanasekar [20] ont adopté plus au moins le même modèle de la FIGURE 13c (résolution semi-analytique des équations du mouvement). En plus de la masse, une rigidité et un amortissement sont affectés à la traverse. Le ballast et la sous-couche sont représentés chacun avec un couplage dans la direction longitudinale. Le rail étant modélisé par une poutre de Timoshenko, le déplacement vertical et la rotation du rail ont été obtenus via la méthode de décomposition modale. Le mouvement des traverses, des blocs de ballast et sous-couche ont été déterminés via les équations d'équilibre dynamique.

Ces modèles sont performants et permettent une bonne prédiction de la réponse dynamique de la voie et du véhicule. Ils permettent aussi d'étudier l'influence des paramètres de la voie et du véhicule sur les efforts dynamiques générés lors de la circulation. Cependant, pour avoir des résultats conformes aux données expérimentales, il est important d'alimenter le modèle avec les bons coefficients d'amortissement dont les valeurs auront un impact direct sur l'intensité des efforts dynamiques générés.

Des problématiques de charges défilantes sur la voie ont également été explorées. En effet dans des travaux anciens [21], il a été démontré qu'une charge défilante sur une poutre causait des déflexions plus grandes que celles causées par un effort statique de même amplitude. La voie est assimilée dans

certaines travaux à une poutre supportée par des supports rigides : Cai et al. [22] se sont intéressés au cas de supports périodiques pour une poutre infinie (N tronçons où N tend vers l'infini) en écrivant l'équation d'équilibre sur chaque tronçon et en procédant à une décomposition modale. L'influence de la vitesse de la charge défilante a été étudiée par Jezequel [23]. La vitesse critique de la poutre a été ainsi déterminée. Elle correspond à la vitesse au delà de laquelle on observe des déflexions très importantes et des propagations d'ondes avec un très faible amortissement.

Achenbach et al. [24], Chonan [25] et Mallik et al. [26] ont considéré quant à eux une poutre sur une fondation élastique amortie. Les solutions du déplacement de la poutre et de sa rotation pour une poutre de Timoshenko ont été obtenues par la transformation de Fourier. Il ressort spécialement de [24] et [26] que l'amortissement dans la fondation atténue l'amplitude des déplacements et des moments fléchissants et que le point de déflexion maximale de la courbe glisse derrière la charge quand la vitesse augmente. Frýba [27] a proposé une résolution purement analytique de la vibration d'une poutre soumise à une charge défilante comme application directe aux ponts métalliques. Il a considéré plusieurs configurations de charges défilantes (constante, harmonique, etc) et plusieurs types de structures (poutre sur deux appuis simples, poutre sur fondation élastique, etc).

Des modèles éléments finis 3D ont également été développés. À titre d'exemple, Giner et al. [28] ont proposé une analyse statique et dynamique (FIGURE 15a). Ils ont présenté d'ailleurs des outils pour pouvoir traiter le cas d'une charge défilante. La taille du maillage et le choix de la zone d'étude D par exemple sont régies par la fréquence générée par le train et la célérité des ondes dans la voie. Le problème de réflexion d'onde est typique dans le cas des modèles finis comme celui de la FIGURE 15a. Ils peuvent être surmontés si des éléments amortissants sont introduits ou si le modèle est assez long dans la direction longitudinale pour permettre à l'onde de se propager. Mais dans ce dernier cas, cela engendre des modèles très lourds et donc très coûteux.

C'est dans cette optique que des modèles réduits de la voie ont été construits, on cite à titre d'exemple [29]. Il est question dans ces travaux de comprendre la propagation des ondes dans la voie en adoptant une méthode de calcul de la réponse de la voie dans le domaine fréquentiel basée sur la transformée de Fourier en espace. Cette approche est justifiée par la périodicité de la voie dans la direction longitudinale. Par conséquent, le modèle développé est une représentation éléments finis d'une tranche de la voie (FIGURE 15b) dont la répétition périodique donne naissance à la voie complète. Enfin, grâce aux techniques de réduction modale on arrive à diminuer le nombre de degrés de liberté du modèle et avoir des temps de calcul très bas.

Les conditions de circulations introduites plus haut doivent respecter toute notion de sécurité, de confort et de stabilité. On s'oriente donc dans une première étape vers des modèles statiques de la voie. En effet d'après Knothe et Grassie [14], l'inertie de la voie est négligeable dans le domaine des basses fréquences. Ainsi, les dynamiques de la voie et du véhicule seraient découplées en basse fréquence en sachant que c'est la dynamique du véhicule qui est prépondérante.

Cependant, les matériels roulants circulent très souvent sur des voies qui présentent des défauts. Ces défauts peuvent être de courtes longueurs d'onde et introduire des phénomènes hautes fréquences.

Dans ce cas, le recours à des modèles dynamiques de la voie qui associent poutres, ressorts, amortisseurs, masses semble être pertinent pour remonter aux contraintes réellement vues par la voie.

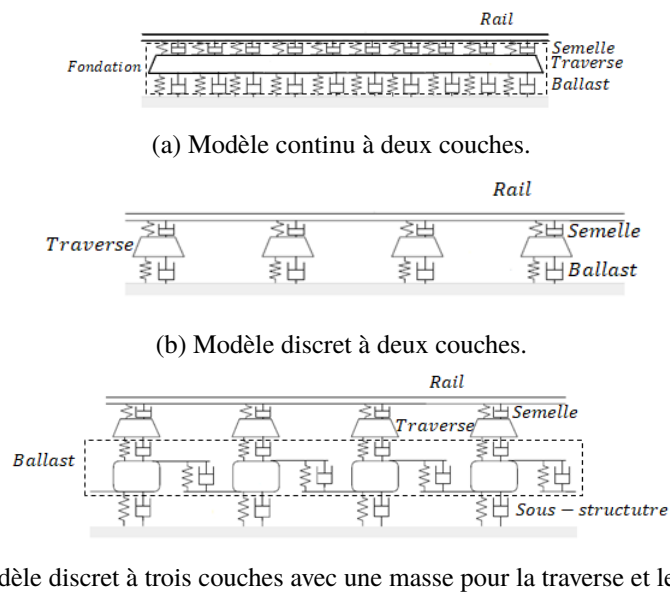


FIGURE 13 – Modèles de la voie ferrée [1].

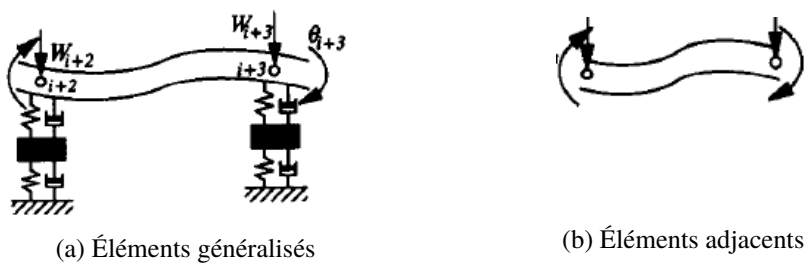


FIGURE 14 – Construction du modèle de voie par Cai et al. [16]

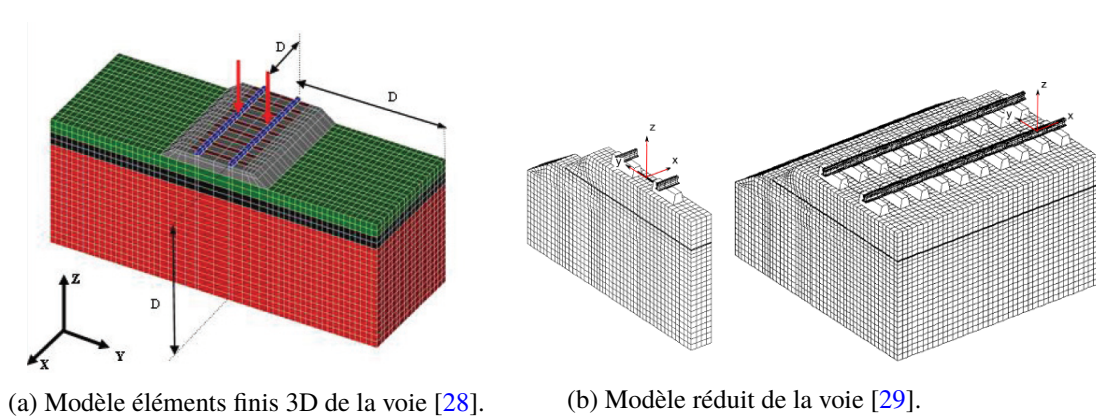


FIGURE 15 – Modèles éléments finis de la voie.

5 Étude de l'effet des appuis sur les modèles 1D de la voie

Les modèles de la littérature ont suscité des questions. Notamment, la pertinence du modèle de Winkler par rapport à un modèle discret ou l'effet de charger la voie par plusieurs forces qui modélisent chacune une roue. Ces deux points ainsi que l'utilisation du modèle de Winkler par la commission Demaux dans le cadre des conditions de circulation ont motivé le développement de modèles simplifiés discrets à comparer avec ce dernier (modèle de Winkler) en statique pour voir l'impact de la nature des appuis sur

la réponse et vérifier la zone d'influence d'une charge en termes de nombre de traverses.

5.1 Construction des modèles simplifiés

Pour vérifier la validité du modèle de Winkler et étudier l'effet des appuis sur la réponse, on a construit 2 modèles :

- poutre de Bernoulli sur plusieurs appuis rigides discrets (FIGURE 16a) ;
- poutre de Bernoulli sur plusieurs appuis élastiques discrets (FIGURE 16b).

La voie est soumise à un effort Q qui désigne la charge à la roue et les positions des appuis sont celles des traverses.

Comme le modèle de Winkler est purement analytique, ces modèles sont construits analytiquement. Cependant, au delà de 3 appuis on constate qu'une résolution purement analytique du problème devient de plus en plus difficile du fait de l'hyperstaticité de ces modèles sur appuis discrets. De ce fait, la résolution du déplacement devient plutôt numérique et il devient possible d'étudier le cas d'un nombre important d'appuis N .

Pour le modèle à appuis élastiques, on considère que chaque tronçon est assimilé à une poutre d'Euler Bernoulli et tous les appuis ont la même rigidité K qui tient compte dans sa valeur de la rigidité de la semelle, de la traverse, du ballast et du sol support. La valeur numérique de K a été tirée d'un document SNCF [30] à partir de la valeur du module de la fondation équivalente de Winkler k , en utilisant la formule :

$$K = k l \quad (14)$$

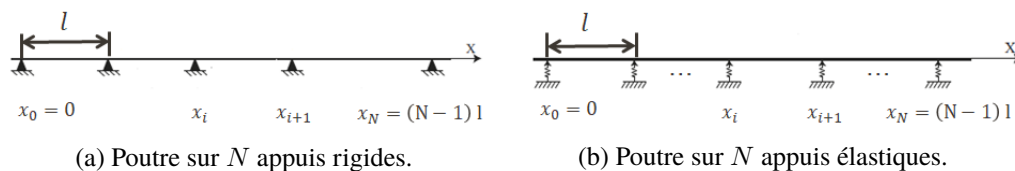


FIGURE 16 – Développement de modèles simplifiés de la voie.

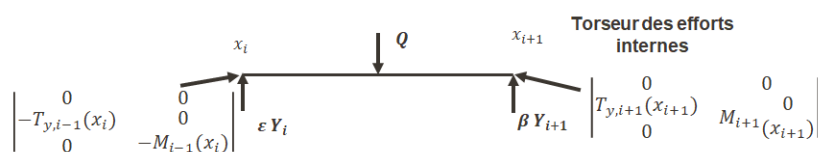


FIGURE 17 – Tronçon de la voie isolé.

La construction de ces deux modèles hyperstatiques se fait en isolant un tronçon de longueur l entre $x_i = (i-1)l$ et $x_{i+1} = il$. Deux cas se présentent alors :

- le tronçon est soumis à l'effort Q ;
- le tronçon n'est pas soumis à un effort.

À part la force Q , chaque tronçon est soumis à la réaction aux appuis Y_i et Y_{i+1} et aux efforts internes qui prennent en compte l'action des tronçons adjacents sur ce tronçon en question, soit le moment fléchissant $M_{i-1}(x_i)$ et $M_{i+1}(x_{i+1})$ et l'effort tranchant $T_{y,i-1}(x_i)$ et $T_{y,i+1}(x_{i+1})$ en x_i et x_{i+1} respectivement comme il est schématisé sur la FIGURE 17.

Pour chaque tronçon i , on écrit donc l'expression du moment fléchissant en un point x pour un tronçon

avec effort Q (équations (15)) et pour un tronçon sans effort (équation (16)).

$$\begin{cases} M_i(x) = M_{i-1}(x_i) + (\epsilon Y_i - T_{y,i-1}(x_i)) (x - (i-1)l) & \text{si } x < x_Q \\ M_i(x) = M_{i-1}(x_i) + (\epsilon Y_i - T_{y,i-1}(x_i)) (x - (i-1)l) - Q(x - x_Q) & \text{si } x > x_Q \end{cases} \quad (15)$$

$$M_i(x) = M_{i-1}(x_i) + (\epsilon Y_i - T_{y,i-1}(x_i)) (x - (i-1)l) \quad (16)$$

Pour éviter que les réactions aux appuis soient comptées en double dans les tronçons intérieurs quand ils sont assemblés on introduit les coefficients ϵ et β tel que :

$$\epsilon = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x_N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

L'expression de la déformée verticale s'exprime facilement en utilisant la relation (17).

$$EI \frac{\partial^2 u_{z,i}}{\partial x^2} = M_i(x) \quad (17)$$

Les constantes d'intégration sont déterminées pour la structure globale en admettant la continuité des déplacements entre deux tronçons adjacents, des déplacements connus aux appuis et une rotation nulle au point d'application de la force Q . Elles seront tout de même exprimées en fonction de $T_{y,i}$, M_i et Y_i .

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u_{z,i}}{\partial x} \right)_{x_Q} = \left(\frac{\partial u_{z,i+1}}{\partial x} \right)_{x_Q} & \text{si } i = \lfloor (x_Q) \rfloor + 1 \\ u_{z,i}(x_Q) = u_{z,i+1}(x_Q) & \text{si } i = \lfloor (x_Q) \rfloor + 1 \\ u_{z,i}(il) = u_{z,i+1}(il) & \text{si } 1 \leq i \leq N-1 \\ Y_i = -K u_{z,i}((i-1)l) & \text{si } 1 \leq i \leq N-1 \end{cases} \quad (18)$$

Pour déterminer les inconnus du torseur des efforts internes et des réactions aux appuis, on exploite la continuité des rotations entre deux tronçons adjacents, le fait que la poutre est libre quand N tend vers l'infini (équations (19)) et on écrit également le principe fondamental de la statique pour chaque tronçon.

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{z,i}}{\partial x} = \frac{\partial u_{z,i+1}}{\partial x} & \text{si } 1 \leq i \leq N-1 \\ T_{y,0}(0) = 0 \\ M_0(0) = 0 \\ T_{y,N+1}(x_N) = 0 \\ M_{N+1}(x_N) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Le déplacement en chaque point de la poutre est alors déterminé par résolution du système d'équations.

Dans la TABLE 3 sont listés les paramètres du modèle discret et celui de Winkler.

5.2 Résultats

5.2.1 Comparaison entre appuis élastiques et rigides

Les courbes de la FIGURE 18 pour les modèles à appuis discrets montrent une réponse plus importante en termes de déplacement vertical et de moment fléchissant de la poutre avec à peu près un rapport de 2.5 pour le moment fléchissant et par conséquent pour la contrainte en flexion.

	Fondation élastique de Winkler	Appuis élastiques discrets
Effort appliqué Q (tonnes)	11.25	
Espacement des traverses l (m)		0.6
Caractéristiques du rail	Rail 60E1	
Module de Young E (Mpa)	210000	
Moment quadratique I (cm ⁴)	3038.3	
Module de fondation/rigidité	$k = 42.74$ (MN/m ²)	$K = kl = 52.64$ (MN/m)

TABLE 3 – Paramètres des modèles.

On caractérise quantitativement la zone d'influence en choisissant un coefficient $\alpha = 0.01$ tel que $M(x) < \alpha M_{max}$. On passe alors d'une zone d'influence de 3 à 8 traverses environ de part et d'autre de l'effort appliqué en passant de la poutre sur appuis rigides à la poutre sur appuis élastiques. Par ailleurs les traverses ne voient pas la même distribution des réactions (FIGURE 19).

Comme le problème est linéaire, il est facile d'observer la réponse d'une poutre sollicitée par plusieurs efforts en appliquant le principe de superposition. C'est d'ailleurs ce qui a été fait par Alhbeck [31]. On considère donc pour cette étude deux efforts Q_1 et Q_2 séparés d'une distance $e_{bogie} = 2.4$ m qui correspond à l'empattement d'un bogie pour une locomotive désignée par une charge de 22.5 tonnes à l'essieu.

D'après les courbes de la FIGURE 20, les extrema du déplacement et du moment fléchissant restent identiques à ceux observés dans le cas où les charges seraient appliquées séparément. Cependant, un maximum local apparaît entre les deux déplacements minima (FIGURE 20a). Il engendre l'apparition d'un nouveau minimum (palier) dans la courbe du moment fléchissant (FIGURE 20b). Or, en comparant le minimum $M_{min, 2 efforts}$ et le maximum du moment fléchissant $M_{min, 1 effort}$ en valeurs absolues, on trouve :

$$|M_{min, 2 efforts}| < M_{max, 2 efforts} \approx M_{max, 1 effort} \quad (20)$$

Ainsi, le dimensionnement de la voie sera toujours conditionné par le moment maximal. L'hypothèse de ne considérer qu'un seul effort pour le dimensionnement statique d'une voie est de ce fait valable pour cette valeur de l'empattement qui reste relativement importante par rapport à l'espacement entre traverses.

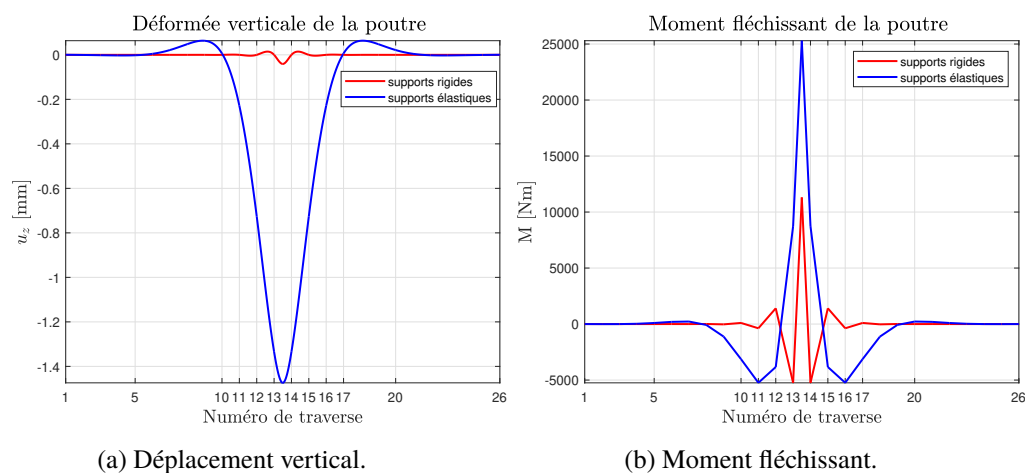


FIGURE 18 – Réponse de la voie à un effort vertical.

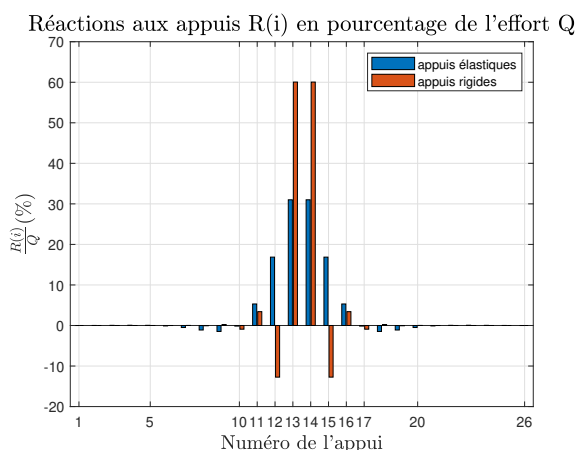
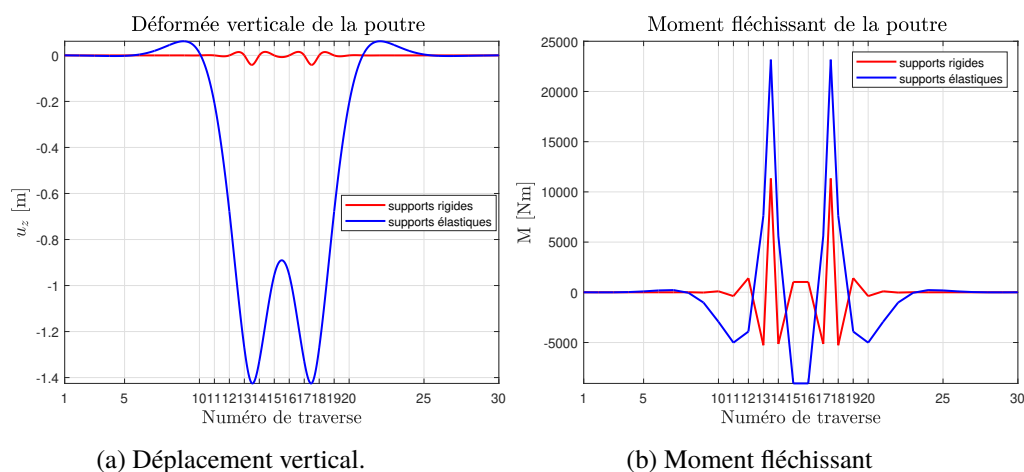


FIGURE 19 – Réactions aux appuis.



(a) Déplacement vertical.

(b) Moment fléchissant

FIGURE 20 – Réponse de la voie à deux efforts verticaux.

5.2.2 Comparaison entre la fondation et les appuis discrets

On compare maintenant l'effet des appuis élastiques discrets par rapport à une fondation élastique (modèle de Winkler). On retrouve des réponses (déplacement vertical et moment fléchissant) qui se superposent pour les deux modèles. Néanmoins, un zoom dans la zone du déplacement maximal (en valeur absolue) dans les FIGURES 22a et 22b montre une meilleure précision dans le cas d'appuis discrets. En effet, si l'effort est appliqué sur un appui le déplacement sera moins important du fait qu'un appui présente un maximum de rigidité et dans le cas opposé, si l'effort s'applique entre deux traverses le déplacement sera légèrement plus important.

Ceci ne peut pas être observé dans le modèle de Winkler à cause du tapis homogène de la fondation.

L'écart de contrainte E_σ est défini par la formule (21).

$\sigma_{max,discret}$ et $\sigma_{max,win}$ définissent la contrainte maximale dans le cas des appuis discrets et de la fondation de Winkler respectivement. Quand l'effort est appliqué sur un appui, l'écart est forcément négatif alors qu'il est positif quand l'effort est appliqué entre deux appuis. Les valeurs numériques de ces écarts sont données dans la TABLE 4.

$$E_\sigma = 100 \left(\frac{\sigma_{max,discret} - \sigma_{max,win}}{\sigma_{max,win}} \right) \quad (21)$$

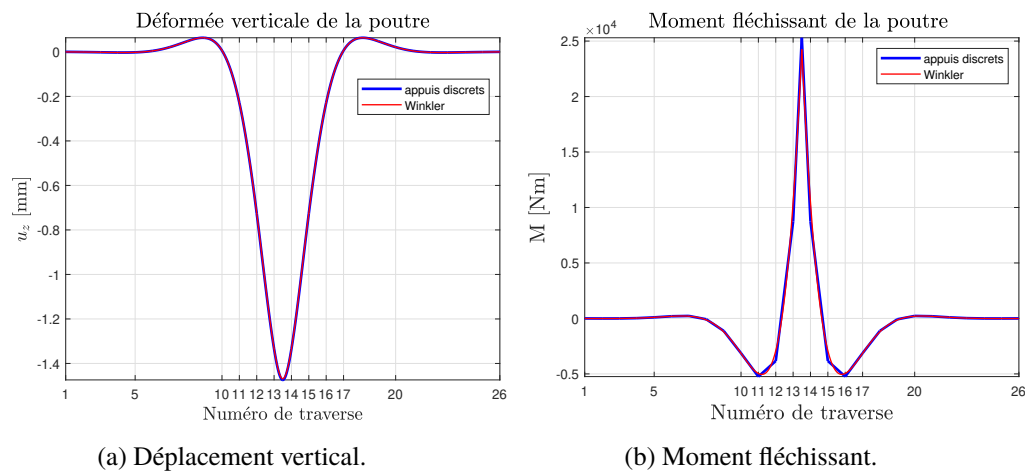
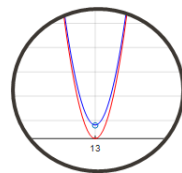
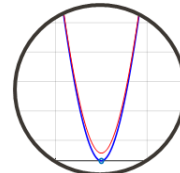


FIGURE 21 – Réponse de la voie à un effort vertical appliqué entre deux appuis.



(a) Effort appliqué sur l'appui.



(b) Effort appliqué entre deux appuis.

FIGURE 22 – Zoom sur le déplacement.

	Q appliqué sur un appui	Q appliqué entre deux appuis
Écart de contraintes (%)	8	4

TABLE 4 – Écarts de la contrainte maximale en flexion entre le modèle de Winkler et de poutre sur appuis élastiques discrets.

6 Conclusion et perspectives

Le développement d'un modèle numérique de la voie qui reste léger pour une application industrielle représente l'enjeu majeur de ces travaux. Cela conduira dans un premier temps à une maîtrise de l'origine scientifique des règles actuelles puis dans un deuxième temps à leur amélioration en introduisant de nouveaux paramètres comme l'effet des composants de la voie (semelle, traverse, ballast) sur sa réponse.

Le nombre important de modèles qu'on trouve dans la littérature témoigne de l'intérêt porté à la compréhension du comportement de la voie pour un dimensionnement en statique ou en dynamique. Les modèles éléments finis 3D qui offrent une représentation fine et réaliste sont une méthode intéressante pour couvrir une large gamme de phénomènes que subit la voie. Néanmoins, dans le cadre des présents travaux, il est d'intérêt de proposer des modèles légers mais fiables destinés à l'exploitation industrielle.

À ce stade, des questions se posent quant au choix d'une gamme de phénomènes à prendre en considération. On a vu notamment que pour des basses fréquences $[0; 20 \text{ Hz}]$ la voie se comportait comme un

ressort rigide et que son inertie était négligeable. De plus, la littérature concernant les efforts latéraux est beaucoup moins exhaustive ce qui pourra nécessiter des investigations approfondies.

Les prochaines étapes sont de vérifier s'il y a un couplage entre les efforts latéraux et verticaux exercés par le matériel roulant. Il est également intéressant de vérifier si le comportement dynamique de la voie et du véhicule peuvent réellement être considérés comme indépendants dans les basses fréquences.

Références

- [1] T. Dahlberg, Track issues, Handbook of railway vehicle dynamics, 2006, pp. 143–179.
- [2] H. Pinault, Étude de l'influence des hétérogénéités du ballast sur le comportement dynamique des voies ferrées, Rapport d'avancement de thèse, 2018.
- [3] Commission de circulation des machines, Rapport de la commission Demaux, SNCF, 1944.
- [4] E. Winkler, Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit : mit besonderer Rücksicht auf ihre Anwendung in der Technik für polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architekten, etc. Dominicus, 1867.
- [5] T. Haukass, From buoyancy stiffness Beams on Elastic Foundation, 2014.
- [6] Y. Noblet, Tracé de la voie : Notions fondamentales, 2006.
- [7] J. Molinari, Éléments de mécanique ferroviaire : Relations entre paramètres de voie, sécurité et vitesses de circulation, 1999.
- [8] SNCF. Règles d'admission des matériels roulants sur le RFN en fonction de la sollicitation de la voie, RFN-IG-MR 00 A-00-n 001, 2013.
- [9] M. Hetényi, Beams on elastic foundation : theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering, University of Michigan, Book, 1973.
- [10] A. Kerr, The determination of the track modulus k for the standard track analysis. In : Proc., AREMA 2002 Annual Conference. 2002.
- [11] M.A. Prud'Homme, La résistance de la voie aux efforts transversaux exercés par le matériel roulant, Revue générale des chemins de fer, 1967.
- [12] T.G. Johns, S.G. Sampath, J.C. Bell, K.B. Davies and others, Engineering Analysis of Stresses in Railroad Rails, Federal Railroad Administration, United States, 1981.
- [13] A. Kalliainen, P. Kolisoja, et A. Nurmikolu, 3D Finite element model as a tool for analyzing the structural behavior of a railway track, Procedia engineering, 2016, vol. 143, p. 820-827.
- [14] K.L. Knothe, S.L. Grassie, Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies, Vehicle system dynamics, 1993, vol. 22, no 3-4, p. 209-262.
- [15] S.L. Grassie, S.J. Cox, The dynamic response of railway track with flexible sleepers to high frequency vertical excitation, Proceedings of the institution of Mechanical Engineers, Part D : Transport Engineering, 1984, vol. 198, no 2, p. 117-124.
- [16] Z. Cai, G. P. Raymond, et R. J. Bathurst, Natural vibration analysis of rail track as a system of elastically coupled beam structures on Winkler foundation, Computers & structures, 1994, vol. 53, no 6, p. 1427-1436.
- [17] J.C.O NIELSEN, A. IGELAND, Vertical dynamic interaction between train and track influence of wheel and track imperfections, Journal of sound and vibration, 1995, vol. 187, no 5, p. 825-839.

- [18] K. Hou, J. Kalousek, R. Dong, A dynamic model for an asymmetrical vehicle/track system, *Journal of Sound and Vibration*, 2003, vol. 267, no 3, p. 591-604.
- [19] W. Zhai, et Z. Cai, Dynamic interaction between a lumped mass vehicle and a discretely supported continuous rail track, *Computers & structures*, 1997, vol. 63, no 5, p. 987-997.
- [20] Y.Q. Sun, M. Dhanasekar, A dynamic model for the vertical interaction of the railtrack and wagon system, *International Journal of Solids and Structures*, 2002, vol. 39, no 5, p. 1337-1359.
- [21] R. Willis, The effect produced by causing weights to travel over elastic bars, Report of the commissioners appointed to inquire into the application of iron railway structures, 1849.
- [22] C.W. Cai, Y.K. Cheung, et H.C. Chan, Dynamic response of infinite continuous beams subjected to a moving force—an exact method, *Journal of Sound and Vibration*, 1988, vol. 123, no 3, p. 461-472.
- [23] JEZEQUEL, L. Analysis of the critical speeds of a moving load on an infinite periodically supported beam, *Journal of Sound Vibration*, 1980, vol. 73, p. 606-609.
- [24] J.D. Achenbach et C.T. Sun, Moving load on a flexibly supported Timoshenko beam, *International Journal of Solids and Structures*, 1965, vol. 1, no 4, p. 353-370.
- [25] S. Chonan, The elastically supported Timoshenko beam subjected to an axial force and a moving load, *International Journal of Mechanical Sciences*, 1975, vol. 17, no 9, p. 573-581.
- [26] A.K. Mallik, Sarvesh Chandra et Avinash B. Singh, Steady-state response of an elastically supported infinite beam to a moving load, *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol. 291, no 3-5, p. 1148-1169.
- [27] L. Frýba, *Vibration of solids and structures under moving loads*, Academia, 1972.
- [28] I.G Giner, A.R. Alvarez, S.S.C. García-Moreno, et al. Dynamic modelling of high speed ballasted railway tracks : analysis of the behaviour, *Transportation research procedia*, 2016, vol. 18, p. 357-365.
- [29] E. Arlaud, *Modèles dynamiques réduits de milieux périodiques par morceaux : application aux voies ferroviaires*, Diss. Paris, ENSAM, 2016.
- [30] J. Trevin, *Manuel de la voie ferrée*, Interne SNCF, 2010.
- [31] D.R. Ahlbeck, H.C. Meacham, et R.H. Prause, The development of analytical models for railroad track dynamics, In : *Railroad track mechanics and technology*, Pergamon, 1978, p. 239-263.