

# Interpolation sur les variétés de Grassmann et applications à la mécanique

**R. Mosquera<sup>a</sup>, A. Hamdouni<sup>a</sup>, A. Falaize<sup>a</sup>, A. El Hamidi<sup>a</sup>**

a. Équipe M2N, LaSIE, UMR 7356 - CNRS - Université de la Rochelle  
Avenue Michel Crépeau 17042 La Rochelle cedex 1.

rolando.mosquera meza@univ-lr.fr

aziz.hamdouni@univ-lr.fr

antoine.falaize@univ-lr.fr

abdallah.el-hamidi@univ-lr.fr

## Résumé :

*Dans cette communication, nous proposons deux méthodes d'interpolation des bases POD paramétriques sur la variété de Grassmann : (i) une généralisation de la méthode Inverse Distance Weighting (IDW) à la variété Grassmann, qui ne dépend pas du choix d'un point de référence sur la variété pour effectuer l'interpolation. (ii) une généralisation de la méthode de krigeage, qui permet de quantifier l'auto-corrélation spatiale des données à travers un semi-variogramme expérimental géodésique.*

## Abstract :

*In this paper, we propose two methods of interpolation of parametric POD bases on the Grassmann manifold : (i) a generalization of the Inverse Distance Weighting (IDW) method to the Grassmann manifold, which does not depend on the choice of a point reference to the manifold to perform the interpolation. (ii) a generalization of the kriging method, which quantifies the spatial autocorrelation of data through a geodesic experimental semi-variogram.*

**Mots clefs : Géométrie différentielle, mécanique, réduction de modèles.**

## Introduction

La plupart des simulations numériques des problèmes réels de mécanique sont souvent très coûteuses à la fois en temps de calcul et en capacité de stockage en mémoire. Aussi, depuis plus d'une décennie on remarque un fort engouement pour les méthodes de réduction de modèles (ROM) en mécanique. Une des méthodes la plus populaire pour construire les modèles réduits est basée sur la projection des équations du problème complet de départ (discrétisé ou non) sur une base réduite POD (Proper Orthogonal Decomposition). Cette approche est devenue maintenant très connue, nous ne la détaillerons pas ici. Pour des équations aux dérivées partielles dépendantes de paramètres, un des problèmes importants qui se pose en réduction de modèles, via la POD, est l'évolution de cette base en fonction des paramètres.

Pour résoudre ce problème, il faut remarquer au préalable que le modèle réduit obtenu par projection sur une base POD ne dépend pas de la base elle-même mais du sous-espace vectoriel qu'elle engendre. Aussi, les modèles réduits peuvent être étudiés dans le cadre des variétés de Grassmann (une variété de Grassmann est l'ensemble des sous-espaces vectoriels d'une dimension donnée d'un espace vectoriel fixé). C'est D. Amsallem et C. Farhat qui sont les premiers à avoir fait cette remarque et à en avoir tiré les conséquences en proposant un algorithme d'interpolation du sous-espace vectoriel engendré par une base POD pour un paramètre donné en fonctions de ceux connus pour d'autres paramètres [1].

Dans cette communication, nous proposons deux nouvelles méthodes d'interpolation sur les variétés de Grassmann utilisant leurs structures riemanniennes afin de construire des modèles réduits paramétrés. La première méthode est une généralisation de l'algorithme IDW (Inverse Distance Weighting) aux variétés de Grassmann. Elle présente l'avantage par rapport à l'algorithme proposé par D. Amsallem et C. Farhat de ne pas dépendre du choix d'un point de référence sur la variété de Grassmann. Cette méthode, dénommée IDW-G, est basée sur la minimisation d'une fonction quadratique qui fait intervenir la distance géodésique aux points d'interpolation pondérée par des coefficients dépendants de l'inverse de la distance aux paramètres d'interpolation. Nous avons montré la convergence de notre méthode de minimisation sous des conditions assez raisonnables [4]. La mise en oeuvre sur des exemples d'écoulements autour d'un cylindre a montré la performance de l'approche proposée. La deuxième méthode est une extension de la méthode de krigeage aux variétés de Grassmann. Cette méthode possède quelques similarités avec la méthode IDW-G dans la mesure où la valeur estimée de l'interpolé est cherchée également comme un barycentre pondéré. Cependant, les coefficients de pondération sont calculés de manière optimale en se basant sur les matrices de covariances statistiques construites à partir des distances géodésiques entre les points d'interpolation considérés. Lors de notre exposé, nous détaillerons ces deux méthodes et nous les comparerons sur quelques configurations d'écoulements à l'algorithme proposé par D. Amsallem et C. Farhat, cité plus haut.

## 1 Formulation du problème et notations

Le problème semi-discrétisé associé à une équation aux dérivées partielles d'évolution paramétré peut-être écrit comme :

$$\begin{cases} \frac{du_h}{dt} = F_h(u_h, \lambda) & t > 0, \\ u_h(0) = u_{h,0} \end{cases} \quad (1)$$

où  $V_h \simeq \mathbb{R}^n$  et  $F_h$  est un champ de vecteurs de  $V_h$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^P$  des paramètres. Pour un ensemble de paramètres  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subset \mathbb{R}^P$  soient  $\Phi(\lambda_1), \dots, \Phi(\lambda_N) \in \mathbb{R}^n \times m$  les bases PODs associées aux solutions numériques  $u_h(\lambda_1), \dots, u_h(\lambda_N) \in \mathbb{R}^{n \times n'}$ , où  $n' \in \mathbb{N}$  nombre de clichés temporels. Nous souhaitons estimer la base POD  $\Phi(\lambda)$  pour un nouveau paramètre  $\lambda \notin \Lambda$  par l'interpolation des bases  $\{\Phi(\lambda_i)\}_{1 \leq i \leq N}$ .

Nous savons depuis les travaux d'Amsallem et Farhat [1] que le modèle réduit ainsi construit dépend du sous-espace  $\overline{\Phi(\lambda)} = \text{span}(\Phi(\lambda))$  engendré par la base, et non du représentant particulier  $\Phi(\lambda)$  de ce sous-espace. Ainsi, l'interpolation doit s'effectuer sur l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ . Cet ensemble n'est pas un espace vectoriel mais possède une structure de variété différentielle : c'est la variété de Grassmann  $G_m(\mathbb{R}^n)$ .

La méthode proposée dans [1] consiste (i) à choisir un point de référence  $\overline{\Phi(\lambda_r)}$ , (ii) à associer aux points  $\{\overline{\Phi(\lambda_i)}\}_{1 \leq i \leq N}$  les vecteurs  $\xi(\lambda_i)$  dans  $T_{\overline{\Phi(\lambda_r)}}G_m(\mathbb{R}^n)$  via l'application dite *logarithme géodésique*, (iii)

à réaliser une interpolation classique pour obtenir le vecteur interpolé  $\xi(\lambda) \in G_m(\mathbb{R}^n)$  et (iv) à associer à  $\xi(\lambda)$  le point  $\bar{\Phi}^I(\lambda) \in G_m(\mathbb{R}^n)$  via l'application dite *exponentielle géodésique*. Les limites de cette procédure sont (i) la dépendance au choix de la valeur de référence  $\lambda_r$  et (ii) la perte de l'information intrinsèque sur la répartition des points de l'échantillon sur la variété. Les deux méthodes proposées dans ce travail permettent de lever ces difficultés et sont décrites dans les deux sections suivantes. Dans la suite, la base associée au paramètre  $\lambda_i$  sera notée  $\bar{\Phi}_i$  et le sous-espace engendré sera noté  $\bar{\Phi}_i$ .

## 2 Pondération par distance inverse sur la variété de Grassmann

Le barycentre d'un ensemble fini de points dans un espace métrique, peut être caractérisé en termes de distance de l'espace. Karcher [5]<sup>1</sup> profite de cette caractérisation pour généraliser la notion de barycentre au cadre des variétés riemanniennes comme solution d'un problème de minimisation. Nous allons utiliser cette notion de barycentre, pour généraliser la méthode de pondération par distance inverse (Inverse Distance Weighting, ou IDW [9, 7]) à la variété de Grassmann  $G_m(\mathbb{R}^n)$ . Plus précisément, nous considérons le problème de minimisation suivant :

$$(\mathcal{P}_{\text{IDW}}) \quad \begin{cases} \text{Étant donné } \lambda \in \mathbb{R}^P, \text{ trouver } \bar{\Phi}_{\text{IDW}} \in G_m(\mathbb{R}^n) \text{ tel que :} \\ \bar{\Phi}_{\text{IDW}} = \arg \min_{\bar{\Phi} \in G_m(\mathbb{R}^n)} \left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) d^2(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}_i) \right) \end{cases}$$

où  $d$  est la distance géodésique sur  $G_m(\mathbb{R}^n)$  (dont une définition est donnée dans *e.g.* [3, théorème 2.3.34]),

$$\alpha_i(\lambda) = \frac{1}{S(\lambda) d(\lambda_i, \lambda)^q}, \text{ avec } S(\lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{d(\lambda, \lambda_i)^q} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*.$$

Nous appellerons cette méthode IDW-G. Le théorème énoncé ci-après donne les hypothèses sous lequel le problème  $(\mathcal{P}_{\text{IDW}})$  admet une solution unique et montre aussi une procédure pour construire une suite qui converge vers la solution. Une preuve de ce théorème est disponible dans [3, 4].

**Theorem 2.1** (Solution du problème  $(\mathcal{P}_{\text{IDW}})$ ). *Si les points  $(\bar{\Phi}_i)_{1 \leq i \leq N}$  sont contenus dans une boule  $B(\bar{\Phi}_C, r)$  de centre  $\bar{\Phi}_C \in G_m(\mathbb{R}^n)$  et de rayon  $r < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ , alors le problème  $(\mathcal{P}_{\text{IDW}})$  admet une unique solution  $\bar{\Phi}_{\text{IDW}}$  dans  $B(\bar{\Phi}_C, r)$ . De plus, pour toute initialisation  $\bar{\Phi}_0 \in B(\bar{\Phi}_C, r)$ , la suite  $\{\bar{\Phi}_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$  définie par*

$$\bar{\Phi}_{\ell+1} = \exp_{\bar{\Phi}_\ell} \left( \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) \exp_{\bar{\Phi}_\ell}^{-1}(\bar{\Phi}_i) \right), \quad (2)$$

*converge vers  $\bar{\Phi}_{\text{IDW}}$ .*

1. Notion introduite par Élie Cartan en 1920 dans le cadre des groupes de Lie à courbure non-positive.

La démonstration de ce théorème fait intervenir la courbure sectionnelle de la variété de Grassmann pour assurer la convexité locale de la fonction distance. De plus, si nous considérons l'application

$$F_\lambda : G_m(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\bar{\Phi} \quad \mapsto \quad F_\lambda(\bar{\Phi}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) d^2(\bar{\Phi}, \bar{\Phi}_i)$$

l'unique solution  $\bar{\Phi}_{\text{IDW}}$  du problème  $(\mathcal{P}_{\text{IDW}})$  dans la boule  $B(\bar{\Phi}_C, r)$  est caractérisée par

$$\nabla F_\lambda(\bar{\Phi}_{\text{IDW}}) = 0$$

où

$$\nabla F_\lambda(\bar{\Phi}) = - \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) \exp_{\bar{\Phi}}^{-1}(\bar{\Phi}_i).$$

La représentation en termes de matrices de l'application exponentielle géodésique est :

$$\widehat{\exp}_{\bar{\Phi}_r}(\xi) = \left( \Phi_r \cdot (\mathbb{T}\Phi_r \cdot \Phi_r)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathbf{V} \cdot \cos(\mathbf{S}) + \mathbf{U} \cdot \sin(\mathbf{S}) \right) \cdot \mathbb{T}\mathbf{V} \cdot (\mathbb{T}\Phi_r \cdot \Phi_r)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{avec } \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbb{T}\mathbf{V} = \text{SVD} \left( \xi \cdot (\mathbb{T}\Phi_r \cdot \Phi_r)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (3)$$

où  $\text{SVD}(\mathbf{M})$  dénote la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{M}$ . La représentation en termes de matrices de l'application logarithme géodésique est :

$$\widehat{\log}_{\bar{\Phi}_r}(\bar{\Phi}) = \mathbf{U} \cdot \arctan(\mathbf{S}) \cdot \mathbb{T}\mathbf{V} \cdot (\mathbb{T}\Phi \cdot \Phi)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{avec } \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbb{T}\mathbf{V} = \text{SVD} \left( (\Phi \cdot (\mathbb{T}\Phi_r \cdot \Phi)^{-1} - \Phi_r) \cdot (\mathbb{T}\Phi_r \cdot \Phi_r)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (4)$$

Ces expressions générales se simplifient pour des matrices orthogonales  $\mathbb{T}\Phi \cdot \Phi = \text{Id}$ .

En pratique, on supposera que la suite  $(\bar{\Phi}_{\ell+1})$  définie dans (2) a convergé lorsque la norme du gradient est sous un seuil de tolérance prédéfini [4]. Cette séquence donne lieu à l'algorithme 1 qui prend en entrée les matrices  $(\bar{\Phi}_i)_{1 \leq i \leq N}$  et retourne une approximation de la matrice  $\bar{\Phi}_{\text{IDW}}$ .

**Data:**

- $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$  Ensemble de paramètres ,
- $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq N}$  Ensemble de bases POD associées aux paramètres,
- $\lambda$  Paramètre cible,
- $q$  Paramètre de la méthode,
- $\epsilon_{\text{tol}}$  Tolérance.

**Result:** Base interpolée  $\Phi_{\text{IDW}} \simeq \Phi(\lambda)$ .

- 1  $r = \underset{i \in [1, N]}{\operatorname{argmin}} \|\lambda - \lambda_i\|$  // Sélection de la valeur initiale ;
- 2  $\Phi_\ell = \Phi_r$  ;
- 3  $S = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\|\lambda - \lambda_i\|^q}$  // Coefficient de normalisation;
- 4 **for**  $i \in [1, N]$  **do**
- 5      $w_i = \frac{1}{S \|\lambda - \lambda_i\|^q}$  // Poids IDW;
- 6 **end**
- 7  $\epsilon = \infty$  ;
- 8  $\ell = 0$  ;
- 9 **while**  $\epsilon > \epsilon_{\text{tol}}$  **do**
- 10      $\ell = \ell + 1$  ;
- 11     **for**  $i \in [1, N]$  **do**
- 12          $\xi_i = \widehat{\log}_{\Phi_{\ell-1}}(\Phi_i)$  // Vecteurs de  $T_{\Phi_r} G_m(\mathbb{R}^n)$  ;
- 13     **end**
- 14      $\xi_\ell = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N w_i \xi_i$  // Barycentre pondéré;
- 15      $\Phi_\ell = \widehat{\exp}_{\Phi_{\ell-1}}(\xi_\ell)$  // Point sur  $G_m(\mathbb{R}^n)$ ;
- 16      $\epsilon = \|\xi_\ell\|_F$  // Vérification du résidu ;
- 17 **end**
- 18  $\Phi_{\text{IDW}}^* = \Phi_\ell$  // Résultat;

**Algorithm 1:** Algorithme IDW-G pour l'interpolation de bases POD, où  $\|\bullet\|$  représente la norme euclidienne et  $\|\bullet\|_F$  représente la norme de Frobenius. Les expressions des représentations en termes de matrices des applications exponentielle et logarithme géodésique, sont notées  $\widehat{\exp}$ ,  $\widehat{\log}$  et données dans les expressions (3) et (4), respectivement.

### 3 Méthode de Krigeage grassmannienne

La méthode d'interpolation par krigeage [10, 11, 12, 13] est une technique d'interpolation stochastique initialement développée pour la géostatistique [14, 15] pour prédire la valeur d'un phénomène naturel en des sites non échantillonnés. Cette méthode permet d'obtenir le meilleur estimateur linéaire sans biais et à variance minimale. Dans cette section, nous présentons une possible généralisation de cette méthode à la variété de Grassmann.

Nous rappelons que dans le cadre classique de la méthode, la solution des équations du krigeage dépend seulement du semi-variogramme théorique, qui en pratique est modélisé à partir des données. Dans le cas de la variété de Grassmann, en adaptant l'estimateur classique des moments avec tolérance, propose par N.Cressie [11], nous allons définir un semi-variogramme expérimental géodésique. Plus précisément, nous considérons une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^P$  tel que  $\Lambda \subset D$  et définissons les nombres :

$$m(\Lambda) = \min\{\|\lambda_i - \lambda_j\| : 1 \leq i < j \leq N\} \quad (5)$$

$$M(\Lambda) = \max\{\|\lambda_i - \lambda_j\| : 1 \leq i < j \leq N\} \quad (6)$$

et  $K^* = \max\{K \in \mathbb{N} : K \cdot m(\Lambda) < M(\Lambda)\}$ .

Ces nombres permettent de définir le vecteur  $\mathbf{h} = (h_0, \dots, h_{K^*+1}) \in \mathbb{R}^{K^*+2}$  où  $h_k = k \cdot m(\Lambda)$  pour tout  $k \in \{1, \dots, K^*\}$ ,  $h_0 = 0$  et  $h_{K^*+1} = M(\Lambda)$ . Finalement, nous définissons pour tout  $k \in \{1, \dots, K^* + 1\}$  les ensembles :

$$N(h_k) = \{(\lambda_p, \lambda_q) \in \Lambda^2 : 1 \leq p < q \leq N \text{ et } h_{k-1} < \|\lambda_p - \lambda_q\|_{\mathbb{R}^P} \leq h_k\}$$

Le graphique suivant donne une idée de la construction des ensembles  $N(h_k)$ .

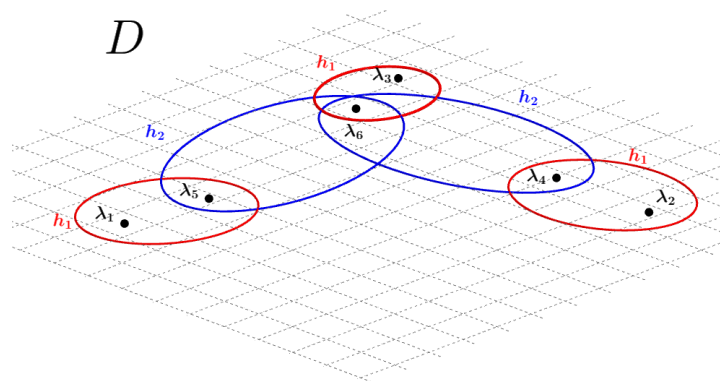


FIGURE 1 – Distances  $h_k = k \cdot m(\Lambda)$  intervenant dans la construction du semi-variogramme expérimental.

Le semi-variogramme expérimental associé aux données  $\overline{\Phi(\lambda_1)}, \dots, \overline{\Phi(\lambda_N)}$  est défini comme le vecteur  $v = (v_0, \dots, v_{K^*+1}) \in \mathbb{R}^{K^*+2}$ , où

$$v_k = \frac{1}{\text{Card}(N(h_k))} \sum_{(\lambda_p, \lambda_q) \in N(h_k)} d^2(\overline{\Phi(\lambda_p)}, \overline{\Phi(\lambda_q)}) \quad (7)$$

pour tout  $k \in \{1, \dots, K^* + 1\}$  avec  $v(0) = 0$  et  $d$  la distance géodésique sur la variété de Grassmann. La distance géodésique exprimée en termes de matrice est

$$\begin{aligned} \widehat{d}(\Phi_1, \Phi_2) &= \|\tan^{-1}(\Sigma)\|_F, \\ \text{avec } \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V} &= \text{SVD} \left( \Phi_2 \cdot (\mathbf{r}\Phi_1 \cdot \Phi_2)^{-1} - \Phi_1 \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Comme dans le cas du krigeage sur un espace vectoriel, la valeur  $a = h_{d+1}$  sera nommée « portée » et le terme  $c = v(d+1)$  « palier ». Cette construction du semi-variogramme expérimental est décrite dans l'algorithme 2.

**Data:**

- i. Ensemble de  $N$  paramètres :  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \subset \mathbb{R}^P$ .
- ii. Ensemble de  $N$  bases POD :  $\{\Phi(\lambda_1), \dots, \Phi(\lambda_N)\} \subset \mathbb{R}_*^{n \times m}$ .

**Result:** Portée  $a$  et palier  $c$ 

```

1 Définir  $m(\Lambda)$ ,  $M(\Lambda)$  comme dans (5) et (6) respectivement.
2  $h_0 = 0$ 
3 for  $k = 1$  à  $K^* + 1$  do
4    $h_k = k \cdot m(\Lambda)$  si  $k < K^* + 1$ , sinon  $h_k = M(\Lambda)$ 
5    $D_k = \emptyset$ 
6   for  $p = 1$  à  $N$  do
7     for  $q = p + 1$  à  $N$  do
8       if  $h_{k-1} < \|\lambda_p - \lambda_q\| \leq h_k$  then
9         Ajouter  $d^2(\overline{\Phi(\lambda_p)}, \overline{\Phi(\lambda_q)})$  à l'ensemble  $D_k$ 
10        end
11      end
12    end
13    if  $\text{Card}(D_k) \neq 0$  then
14       $\tilde{v}_k = \frac{1}{\text{Card}(D_k)} \text{Somme}(D_k)$ 
15    end
16 end
17  $a = h_{K^*+1}$  // Portée
18  $c = \tilde{v}_{K^*+1}$  // Palier

```

**Algorithm 2:** Construction du semi-variogramme expérimental dans la méthode de krigeage grassmannien. La distance géodésique est exprimée en termes de matrices comme dans (8).

Une fois le semi-variogramme estimé, un variogramme analytique est défini par ajustement d'une fonction  $\tilde{v} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  de type négatif conditionnel [11, 12]. Le choix d'une fonction comme modèle se fait selon l'auto-corrélation spatiale des données décrites par les valeurs de portée  $a = h_{d+1}$  et de palier  $c = v(d+1)$ . Dans ce travail, nous avons utilisé deux modèles classiques de variogramme isotropes de type sphérique.

Maintenant, comme toutes les notions statistiques sous-jacentes de la méthode de krigeage sont bien définies dans les cas des fonctions à valeurs vectorielles [17, 18], nous choisissons un espace vectoriel tangent de référence pour formuler les équations du krigeage. Celle-ci est possible grâce à l'application exponentielle, qui réalise un difféomorphisme local entre la variété et un espace vectoriel. Plus précisément, nous choisissons un point  $\bar{\Phi}_r \in G_m(\mathbb{R}^n)$  et considérons les vecteurs  $Z(\lambda_1), \dots, Z(\lambda_N) \in T_{\bar{\Phi}_r} G_m(\mathbb{R}^n)$  où

$$Z(\lambda_i) = \exp_{\bar{\Phi}_r}^{-1}(\overline{\Phi(\lambda_i)})$$

pour tout  $\lambda_i \in \Lambda$ . Ensuite, nous définissons l'estimateur

$$\overline{\hat{\Phi}}(\lambda) = \exp_{\overline{\Phi}_r} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) Z(\lambda_i) \right).$$

De manière similaire au cas de fonctions à valeurs réelles, nous supposons l'existence d'un processus aléatoire intrinsèquement stationnaire  $(\delta_\lambda^r)_{\lambda \in D}$  tel que

$$\delta_\lambda^r = \exp_{\overline{\Phi}_r}^{-1} \left( \overline{\Phi}(\lambda) \right)$$

pour tout  $\lambda \in D$ . Nous pouvons ainsi considérer le problème : Trouver  $(\alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_N(\lambda)) \in \mathbb{R}^N$  tel que

$$(\alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_N(\lambda)) = \underset{(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} \left[ \left\| \sum_{i=1}^N \alpha_i Z(\lambda_i) - \delta_\lambda^r \right\|^2 \right] \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$$

Le problème (9) se résout de manière similaire que le cas du krigeage classique. Une démonstration est disponible dans [3, chapitre 5].

Pour un ensemble  $\{\overline{\Phi}_i\}_{1 \leq i \leq N}$  de  $N$  points sur la variété de Grassmann  $G_m(\mathbb{R}^n)$  associés aux paramètres  $\Lambda = \{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq N} \subset \mathbb{R}^P$  et un nouveau paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}^P$ , les étapes de la méthode de krigeage grassmannien peuvent être résumées de la manière suivante :

1. Obtenir par l'algorithme 2 la portée  $a$  et le palier  $c$  du semi-variogramme expérimental associé aux données.
2. Modéliser le semi-variogramme expérimental à l'aide d'un modèle analytique et obtenir les poids  $\alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_N(\lambda)$  comme solution du problème (9).
3. Calculer la valeur estimée  $Z_{\text{KRI}} = \sum_{i=1}^N \alpha_i(\lambda) \exp_{\overline{\Phi}_r}^{-1}(\overline{\Phi}_i)$ .
4. Associer la base interpolée via l'exponentielle géodésique :  $\overline{\Phi}_{\text{KRI}} = \exp_{\overline{\Phi}_r}(Z_{\text{KRI}})$ .

## 4 Application

Les performances des deux méthodes proposées dans cette communication sont illustrées sur l'interpolation de bases POD en mécanique des fluides. Nous considérons le cas des détachements tourbillonnaires derrière un obstacle circulaire de diamètre 1m dans l'écoulement d'un fluide incompressible en 2D dans un canal de dimensions 40m×10m (voir figure 2). Le modèle discret complet est obtenu par projection de Galerkin des équations de Navier-Stokes adimensionnelles sur des éléments de type *Taylor-Hood* (P2 pour la vitesse et P1 pour la pression). La masse volumique du fluide est  $\rho = 1\text{kg/m}^3$  et la viscosité dynamique pilote l'inverse du nombre de Reynolds qui sera choisie comme paramètre d'interpolation  $\lambda = \frac{1}{\text{Re}}$ . Le modèle discret est résolu par une méthode de type prédicteur/correcteur pour les paramètres  $\text{Re} \in \{100, 120, 130, 160, 170, 200\}$ , et dans chaque cas nous construisons la base POD par une décomposition en valeurs singulières de la matrice des clichés du champ de vitesse fluctuante (troncature



à 10 valeurs). L'interpolation est réalisée pour  $Re^* = 110$  et une base POD de référence est construite pour ce paramètre par simulation du modèle discret complet.

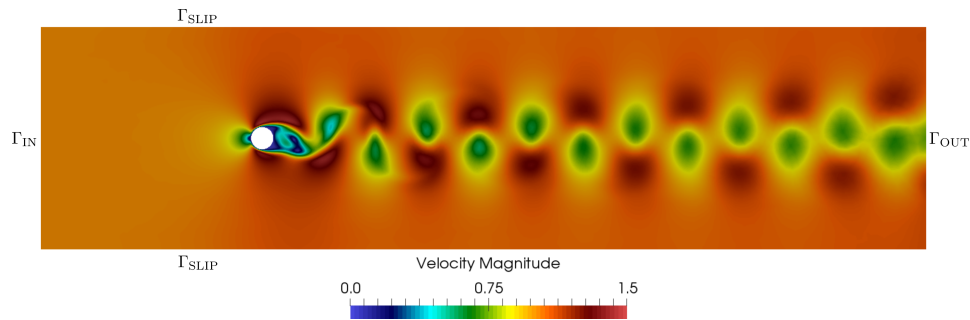


FIGURE 2 – Configuration utilisée dans les tests numériques, avec des conditions limites de Dirichlet  $\mathbf{v} = (1, 0)$  sur  $\Gamma_{IN}$ ,  $\mathbf{v} = (0, 0)$  sur le solide circulaire et  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (0, 0)$  sur  $\Gamma_0$  avec  $\mathbf{n}$  le vecteur normal au bord, et sortie libre  $\sigma \cdot \mathbf{n} = (0, 0)$  sur  $\Gamma_{OUT}$ , avec  $\sigma$  le tenseur des contraintes de Cauchy.

Les modèles réduits sont réalisés par projection des équations continues sur la base POD de référence et les bases interpolées par la méthode d'Amsallem et Farhat, par IDW-G et par krigeage grassmannien. Les premiers coefficients temporels  $(a_i(t))_{1 \leq i \leq 4}$  obtenus par simulation des modèles réduits sont présentés en figure 3. Il apparaît clairement que le modèle réduit construit sur la base IDW-G approche mieux le comportement du modèle réduit de référence (POD) que celui construit sur la base interpolée par la méthode d'Amsallem et Farhat. Ces résultats se répercutent sur les coefficients aérodynamiques (trainée, portance), non présentés ici.

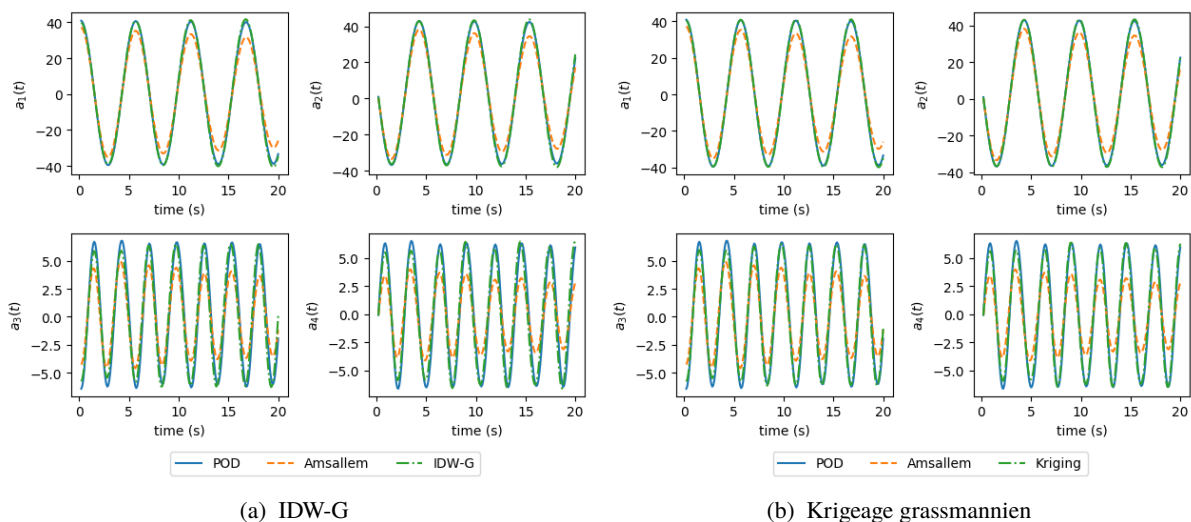


FIGURE 3 – Quatre premiers coefficients temporels des modèles réduits obtenus par projection sur la base de référence (POD) et les bases interpolées par la méthode d'Amsallem et Farhat, par IDW-G (3a) et par krigeage grassmannien (3b).

## Conclusions

Dans ce travail, nous avons proposé deux méthodes d'interpolation sur la variété de Grassmann. La méthode IDW-G, est une généralisation de la méthode de pondération inverse de la distance à la variété

de Grassmann. Elle ne nécessite pas de choisir un espace de référence, auquel la méthode d'interpolation existante était sensible. La méthode de Krigeage grassmannienne est inspirée de la méthode de krigeage classique. Cette méthode exploite la répartition des points interpolés sur la variété à travers la distance géodésique. L'exemple de validation numérique que nous avons présenté montre la pertinence des deux méthodes proposées. Cependant, la méthode par krigeage présente l'avantage d'être explicite. Les perspectives de ce travail sont l'estimation *a priori* des erreurs d'interpolations et la généralisation des méthodes proposées à d'autres variétés (*e.g.* variétés de tenseurs).

## Références

- [1] D. Amsallem, C. Farhat, Interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity, *AIAA journal* 46 (7), 1803–1813, 2008.
- [2] P. A. Absil, R. Mahony, & R. Sepulchre, Riemannian geometry of Grassmann manifolds with a view on algorithmic computation, *Acta Applicandae Mathematica*, Springer, 80, 199-220, 2004.
- [3] R. Mosquera, Interpolation sur les variétés grassmanniennes et applications à la réduction de modèles en mécanique, Université de La Rochelle, École Doctorale EUCLIDE, 2018.
- [4] Rolando Mosquera, Aziz Hamdouni, Abdallah El Hamidi, Cyrille Allery. POD basis interpolation via Inverse Distance Weighting on Grassmann manifolds. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - S*, 2019, 12 (6) : 1743-1759.
- [5] H. Karcher, Riemannian center of mass and mollifier smoothing, *Communications on pure and applied mathematics*, Wiley Online Library, 30, 509-541, 1977.
- [6] Y.-C. Wong, Differential geometry of grassmann manifolds, *Proceedings of the National Academy of Sciences* 57 (3) , 589–594, 1967.
- [7] D. Zimmerman, C. Pavlik, A. Ruggles, et M. P. Armstrong, An experimental comparison of ordinary and universal kriging and inverse distance weighting, *Mathematical Geology*, Springer, 31, 375-390, 1999.
- [8] G. Y. Lu, et D. W. Wong, An adaptive inverse-distance weighting spatial interpolation technique, *Computers & geosciences*, Elsevier, 34, 1044-1055, 2008.
- [9] D. Shepard, A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data, *Proceedings of the 23rd ACM national conference*, 517-524, 1968.
- [10] N. Cressie, The origins of kriging *Mathematical geology*, Springer, 22, 239-252, 1990.
- [11] N. Cressie, *Statistics for spatial data*, Terra Nova, 4(5), 613-617, 1992.
- [12] C. Gaetan, & X. Guyon, *Spatial statistics and modeling*, Springer, (2010).
- [13] M. L. Stein, *Interpolation of spatial data : some theory for kriging*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [14] E. Verfaillie, V. Van Lancker, & M. Van Meirvenne, Multivariate geostatistics for the predictive modelling of the surficial sand distribution in shelf seas, *Continental Shelf Research*, Elsevier, 26, 2454-2468, 2006.
- [15] R. J. Barnes, & T. B. Johnson, *Positive kriging Geostatistics for natural resources characterization*, Springer, 231-244, 1984.

- [16] E. Liberge, Réduction de modèles par POD-Galerkin pour les problèmes d'interaction fluide-structure, Université de La Rochelle, 2008.
- [17] R. Gouet, A. Lopez, and JM Ortiz. Geodesic kriging in the wasserstein space. In Proceedings of the 17th annual conference of the international association for mathematical geosciences, freiberg, 2015.
- [18] Alessandra Menafoglio, Piercesare Secchi, Matilde Dalla Rosa, et al. A universal kriging predictor for spatially dependent functional data of a hilbert space. *Electronic Journal of Statistics*, 7 :2209–2240, 2013