

# Analyse modale des structures multicouches viscoélastiques rotatives

F. Boumediene<sup>a</sup>, F. Bekhoucha<sup>b</sup>, E-M Daya<sup>c</sup>

a. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, LMA – BP 32 El Alia 16111 Bab Ezzouar Alger, Algérie. fboumediene@usthb.dz

b. Ecole Nationale Polytechnique, LGMD - 10 Ave Hassen Badi, El Harrach, BP 182, 16200, Alger, Algérie. ferhat.bekhoucha@g.enp.edu.dz

c. University of Lorraine, LEM3, UMR CNRS 7239, Labex DAMAS, Metz, France. el-mostafa.day@univ-lorraine.fr

## Résumé :

*Cet article concerne l'analyse modale des poutres sandwichs viscoélastiques vrillées et rotatives avec une section transversale uniforme et une vitesse de rotation constante. Les équations de mouvement sont déterminées en utilisant le principe de Hamilton et discrétisées par la méthode des éléments finis. Le problème aux valeurs propres non-linéaire est résolu en couplant la méthode d'homotopie et la méthode asymptotique numérique. Les résultats obtenus à partir des tests numériques sont en parfaite cohérence avec ceux de la littérature.*

## Abstract :

*This paper deals with modal analysis of rotating pre-twisted viscoelastic sandwich beams with uniform cross section and constant angular speed. The governing equations are determined by using Hamilton's principle and discretized by the finite element method. The related nonlinear eigenvalue problem is resolved by coupling the homotopy technique and asymptotic numerical methods. The obtained results are coherent with literature ones.*

**Mots clefs :** Poutres sandwichs rotatives vrillées, amortissement passif, Homotopie, Méthode asymptotique numérique.

## 1 Introduction

L'analyse vibratoire des structures rotatives est d'une grande importance dans le processus de conception et d'évaluation des performances de plusieurs systèmes mécaniques, tels que les aubes des turbines, les pales des éoliennes et des hélicoptères. Les poutres rotatives sont soumises à des vibrations élastiques complexes pouvant induire des problèmes de bruit et de résonance, ce qui a rendu la détermination des fréquences et des modes propres ainsi que les facteurs d'amortissement primordiale. Les structures rotatives réelles sont généralement vrillées, courbées et non-homogènes, donnant naissance à un couplage entre les deux mouvements de flexion transversaux et celui de torsion.

Le comportement vibratoire linéaire et non linéaire des poutres isotropes vrillées rotatives et non rotatives a été longuement étudié. On peut citer par exemple, le travail de Yoo et al. [1] où les auteurs se sont intéressés aux poutres d'Euler-Bernoulli rotatives et le travail de Yardimoglu et al. [2] qui ont étudié les poutres de Timochenko non rotative. Une intéressante revue des méthodes de modélisation peut être trouvée dans [3]. Dans ces travaux, les auteurs utilisent souvent des modèles dynamiques simplifiés sous des hypothèses restrictives, telles que la négligence des termes de couplage induits par l'effet de Coriolis, ou la négligence des déformations de torsion dans les vibrations de flexion.

Dans les applications nécessitant des structures légères, les matériaux viscoélastiques sont souvent utilisés sous forme de couches en intercalaire afin d'introduire un amortissement passif inhérent à l'effet du cisaillement. Les poutres sandwichs viscoélastiques vrillées, rotatives et non rotatives, ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche [4], [5]. Dans ces travaux, le module de Young complexe est considéré constant. Récemment, les auteurs Boumediene et al [6], ont publié une étude sur le calcul des fréquences propres et les facteurs de perte des poutres sandwichs droites rotatives en tenant compte de la variation du module de Young du matériau viscoélastique en fonction de la pulsation. L'objectif de ce travail est d'étendre cette étude aux poutres sandwich viscoélastiques rotatives vrillées. La poutre est supposée encadrée-libre avec une section transversale rectangulaire et un vrillage linéaire le long de son axe. Les équations de mouvement sont déterminées en utilisant le principe de Hamilton et la résolution du problème de valeurs propres est faite en couplant la méthode d'homotopie et la méthode asymptotique numérique. A la fin de l'article, nous présentons l'effet de l'angle de vrillage sur les fréquences naturelles et les coefficients d'amortissement.

## 2 Formulation

Soit une poutre sandwich vrillée avec une section transversale constante (Fig.1a), où la couche centrale est viscoélastique d'épaisseur  $h_c$  et les couches des faces sont élastiques, isotropes et symétriques d'épaisseur  $h_f$ . La poutre d'une longueur  $L$  et d'une largeur  $b$  est fixée à un moyeu d'un rayon  $r_h$ . Toute la structure tourne autour de l'axe du moyeu. Pour décrire le mouvement, trois repères sont définis :

- le repère Galiléen  $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$  dont l'axe  $z_0$  est l'axe du moyeu ;
- le repère lié à la structure  $R(O, x, y, z)$ , dont l'axe  $x$  est formé par les centres géométriques de la couche centrale et l'axe  $z$  coïncide avec l'axe  $z_0$  pour définir la rotation de la structure autour de l'axe du moyeu ;
- le repère  $R_x(G_2, X, Y, Z)$  est le repère local de la section droite située à la position  $x$  tel que l'axe  $X$  coïncide avec l'axe  $x$  du repère  $R$  et les axes  $Y$  et  $Z$  sont portés par les axes principaux d'inerties de la section droite.

On suppose que le vrillage de la poutre varie linéairement. Donc, l'axe  $Y$  d'une section droite située à la position  $x$  est inclinée par rapport à l'horizontale  $y_0$  d'un angle  $\theta$  (Fig.1b) donné par l'expression suivante :

$$\theta(x) = \theta_0 + \Delta\theta x/L$$

avec  $\Delta\theta = \theta_L - \theta_0$ ;  $\theta_0$  et  $\theta_L$  sont les angles de vrillage des deux sections extrémales de la poutre en positions  $x = 0$  et  $x = L$ .

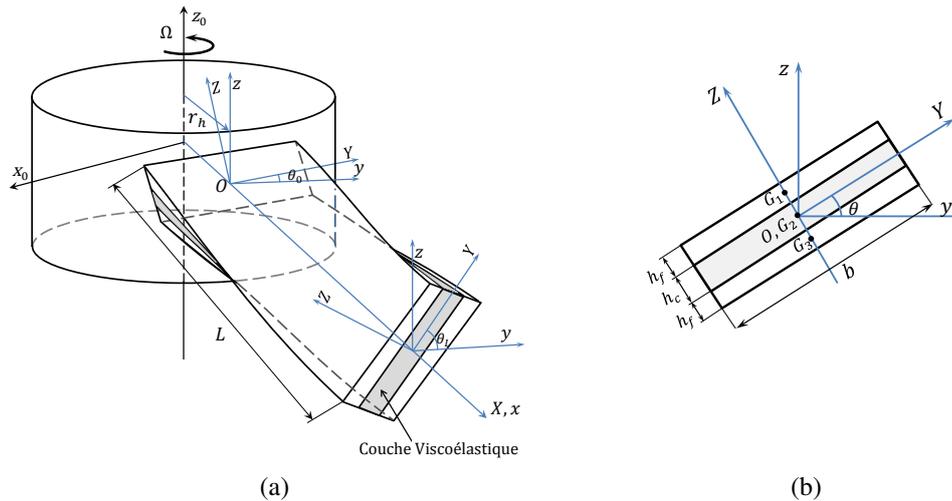


FIGURE 1 – Schémas d'une poutre sandwich vrillée rotative

La structure tourne dans le plan horizontal, autour de l'axe  $z$ , avec une vitesse de rotation constante  $\Omega$ . Les équations de mouvement sont déterminées dans le repère Galiléen  $R_0(O, x_0, y_0, z_0)$  et exprimées dans le repère  $R(O, x, y, z)$  lié à la structure. On considère que les trois couches sont parfaitement collées, les déformations transversales sont négligeables et la couche centrale se déforme principalement en cisaillement.

Les déplacements transversaux  $v(x, t)$  and  $w(x, t)$  suivant  $y$  et  $z$  sont commun pour les trois couches, tel que  $t$  est le temps. Due au cisaillement, la rotation autour de l'axe  $y$  de la couche centrale est définie par  $\beta(x, t)$ .

$u_i(x, t)$  ( $i=1, 2$  or  $3$ ) sont les déplacements longitudinaux des centres géométriques des trois couches.

Les équations de mouvement du système en vibration libre sont obtenues en appliquant le principe d'Hamilton

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U) dt = 0 \quad (1)$$

où  $\delta T$  et  $\delta U$  sont les variations de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

En utilisant les équations de continuité aux interfaces, on pourrait écrire l'équation de mouvement en fonction des variables :  $u_2(x, t)$ ,  $v(x, t)$ ,  $w(x, t)$  et  $\beta(x, t)$ . Les déplacements de flexion  $v(x, t)$ ,  $w(x, t)$  et  $\beta(x, t)$  sont découplés des déplacements longitudinaux  $u_2(x, t)$ . Dans cette étude on ne s'intéresse qu'aux mouvements de flexion. Pour cela, les solutions approximatives  $v(x, t)$ ,  $w(x, t)$  et  $\beta(x, t)$  sont supposées données comme suit :

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^m \Phi_i(x) q_{v_i}(t) \quad (2)$$

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^m \Phi_i(x) q_{w_i}(t) \quad (3)$$

$$\beta(x, t) = \sum_{i=1}^m \Phi_i'(x) q_{\beta_i}(t) \quad (4)$$

où  $q_{v_i}$ ,  $q_{w_i}$  et  $q_{\beta_i}$  sont les coordonnées généralisées,  $m$  est le nombre de modes pris en compte,  $\Phi_i(x)$

sont des fonctions connues approximant les formes propres et satisfaisant les conditions aux limites et  $\Phi'_i(x)$  sont leurs dérivées par rapport à  $x$ . Pour une poutre encastree-libre, les fonctions suivantes peuvent être utilisées :

$$\Phi_i(x) = \cosh(B_i x) - \cos(B_i x) - \sigma_i(\sinh(B_i x) - \sin(B_i x))$$

tel que :

$$\sigma_1 = 0.7341, \sigma_2 = 1.0185, \sigma_3 = 0.9992 \text{ et } \sigma_i = 1 \text{ pour } i > 3$$

$$B_1 = 1.87510407/L, B_2 = 4.69409113/L, B_3 = 7.85475744/L, B_4 = 10.99554073/L, B_5 = 14.1376839/L, \text{ et } B_i = (2i - 1)\pi/(2 * L) \text{ pour } i > 5.$$

Après substitution de ces fonctions dans l'équation de mouvement, on obtient le problème des vibrations libres défini par :

$$[K_0 + E_2^*(\omega)K_v - \lambda M]\{q\} = 0 \quad (5)$$

où,  $K_0, K_v$  sont les matrices de rigidité globales élastique et viscoélastique ;  $M$  est la matrice de masse ;  $E_2(\omega) = E_2^0 + E_2^*(\omega)$  est le module de Young de la couche centrale fonction de la pulsation ;  $\lambda$  est la valeur propre ;  $q$  est le vecteur des coordonnées généralisées

Ce problème non linéaire est résolu par la technique d'homotopie (TH) et la méthode asymptotique numérique (MAN) [6]. La technique d'homotopie consiste à introduire un paramètre  $\epsilon$  au problème (5) comme suit :

$$\mathfrak{R}(q, \lambda) = \mathfrak{R}_1(q, \lambda) + \epsilon \mathfrak{R}_2(q, \lambda) \quad (6)$$

$$\text{tel que } \mathfrak{R}_1(q, \lambda) = [K_0 - \lambda M]q \text{ et } \mathfrak{R}_2(q, \lambda) = E_2^*(\lambda)K_v q$$

Les inconnues  $q$  et  $\lambda$  sont développées sous forme de séries entières en fonction du paramètre  $\epsilon$  jusqu'à l'ordre de troncature  $n$ , comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} q = \sum_{j=0}^n \epsilon^j q_j \\ \lambda = \sum_{j=0}^n \epsilon^j \lambda_j \end{array} \right. \quad (7)$$

tel que la condition d'orthogonalité est satisfaite :

$${}^T q_0(q - q_0) = 0 \quad (8)$$

L'insertion des séries (7) dans (6) et (8) donne une suite de problèmes linéaires récurrents, comme suit :  
- à  $\epsilon = 0$ , l'équation (6) représente le problème aux valeurs propres non amortis :

$$[K_0 - \lambda_0 M]q_0 = 0 \quad (9)$$

donnant le point de départ des itérations MAN, à savoir le vecteur propre non amorti  $q_0$  et la valeur propre non amortie  $\lambda_0$ .

- et à chaque ordre  $i$ , on calcule les inconnues à l'ordre  $i$  ( $q_i, \lambda_i$ ), en résolvant le problème linéaire

suivant :

$$L(q_i, \lambda_i) = f_i^{nl} \quad (10)$$

où  $L()$  est un opérateur linéaire des inconnues à l'ordre  $i$  et  $f_i^{nl}$  dépend seulement des paramètres connus calculés dans les ordres précédents.

La solution (7) est satisfaite jusqu'à la valeur :

$$\epsilon_{max} = \left(\delta \frac{q_1}{q_n}\right)^{1/(n-1)} \quad (11)$$

où  $\delta$  est la tolérance donnée par l'utilisateur.

Après plusieurs itérations de la MAN et lorsqu'on atteint la valeur  $\epsilon = 1$  la solution du problème amorti non linéaire (5) sera atteinte. La valeur propre  $\lambda$  est un nombre complexe donné comme suit :

$$\lambda = \omega_a^2(1 + i\eta) \quad (12)$$

où  $\omega_a$  et  $\eta$  sont, respectivement, la pulsation amortie et le facteur de perte associé. Alors, de l'expression (12), on peut écrire :

$$\omega_a = \sqrt{Re(\lambda)} \quad (13)$$

$$\eta = Im(\lambda)/Re(\lambda) \quad (14)$$

où  $Re(\lambda)$  et  $Im(\lambda)$  sont respectivement, les parties réelle et imaginaire de  $\lambda$ .

### 3 Validation du code

Pour tester notre code de calcul, nous considérons une poutre isotrope vrillée étudiée dans [2]. Dans ces travaux, les auteurs ont considéré les hypothèses de Timoshenko. Les propriétés et les résultats sont donnés dans le tableau 1. Pour le calcul, nous avons pris dix modes ( $m = 10$ ). On peut constater que nos résultats sont cohérents.

TABLE 1 – Les quatre premières fréquences naturelles d'une poutre isotrope encastree vrillée [Hz]

	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$
Présent	62.10	305,78	1009,55	1229,60
Subrahmanyam et al. 1981 [7]	62.0	305.1	955.1	1214.7
Yardimoglu et al. 2004 [2]	61.8	304.8	944.5	1193.0

Longueur  $L = 15.24$  cm, Largeur  $b = 2.54$  cm, Epaisseur  $h = 0.17272$  cm  
 $E = 206.85 \times 10^9$  N/m<sup>2</sup>,  $\nu = 0.25$ ,  $\rho = 7857.6$  kg/m<sup>3</sup>, Vrillage  $\Delta\theta = 45^\circ$

### 4 Poutre sandwich rotative avec module de cisaillement du cœur variable par rapport à la pulsation

Dans cet exemple, on considère une poutre sandwich avec des faces en Aluminium et un cœur d'un matériau viscoélastique (3M ISD112) à 27 °C. Les propriétés du matériau et la géométrie sont listées

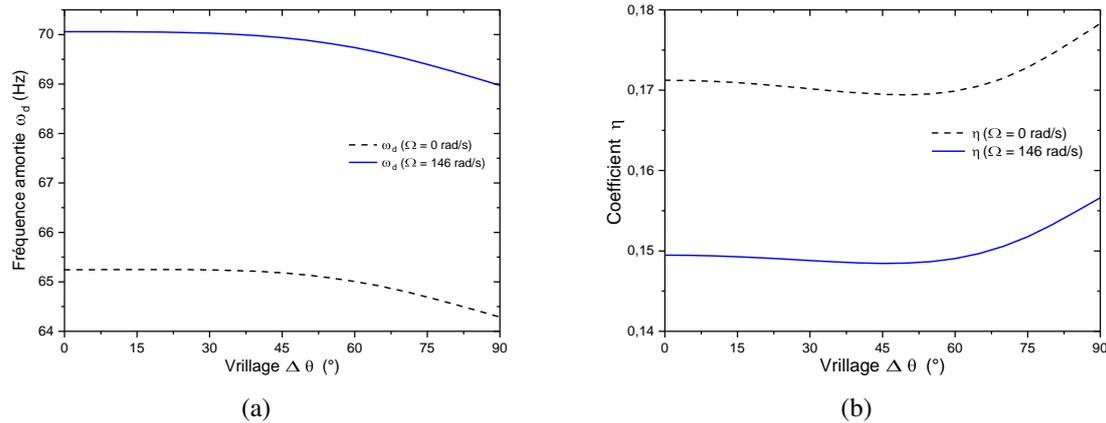


FIGURE 2 – Variation des paramètres modaux de la poutre sandwich (Table 2) en fonction de l'angle de vrillage pour deux vitesses de rotation (a) la première fréquence amortie (b) Le premier facteur de perte.

dans le tableau 2. Le cœur a un module de cisaillement variable de la forme :

$$G_c^*(\omega) = G_c \left( 1 + \sum_{j=1}^3 (\Delta_j \omega) / (\omega - i\delta_j) \right) \quad (15)$$

où  $G_c$  est le module de cisaillement retardée et  $(\Delta_j, \delta_j)$  sont les paramètres du modèle de Maxwell généralisé. Ces coefficients ainsi que les propriétés de la poutre sont regroupés dans le tableau 2.

TABLE 2 – Caractéristiques de la poutre sandwich Al/ISD112/Al à 27°

Longueur	$L = 177.8$ mm	
Largeur	$b = 12.7$ mm	
Rayon du moyeu	$r_h = 0.5 L$	
Module élastique	$E_f = 6.9 \times 10^{10}$ N/m <sup>2</sup>	$G_c = 0.5 \cdot 10^6$ N/m <sup>2</sup>
Coefficient de Poisson	$\nu_f = 0.3$	$\nu_c = 0.5$
Masse volumique	$\rho_f = 2766$ kg/m <sup>3</sup>	$\rho_c = 1600$ kg/m <sup>3</sup>
Épaisseur	$h_f = 1.524$ mm	$h_c = 0.127$ mm
$\Delta_1 = 0.746$	$\Delta_2 = 3.265$	$\Delta_3 = 43.284$
$\delta_1 = 468.7$	$\delta_2 = 4742.4$	$\delta_3 = 71532.5$

La figure 2 montre l'effet de l'angle de vrillage sur la fréquence fondamentale et le facteur de perte correspondant  $\eta$ , dans le cas où la vitesse de rotation est nulle ( $\Omega = 0$ ) et à une vitesse de rotation non nulle ( $\Omega = 146$  rd/s). Nous pouvons remarquer, dans les deux cas, que :

- lorsque l'angle de vrillage augmente, la fréquence fondamentale amortie et le facteur de perte correspondant sont presque stables jusqu'à l'angle 49.5°,
- après cet angle, l'augmentation de l'angle de vrillage rend la poutre plus souple.

On note que, pour cet exemple, l'angle initiale à  $x = 0$  est nul  $\theta_0 = 0$ .

## 5 Conclusion

Dans ce travail, nous avons calculé les fréquences propres d'une poutre sandwich viscoélastique vrillée encadrée-libre ayant une section transversale uniforme. La poutre tourne à une vitesse de rotation constante.

Nous avons présenté un seul exemple de validation dans cet article, mais différents exemples ont été étudiés montrant l'efficacité de la méthode utilisée et la cohérence de nos résultats avec ceux de la littérature et des codes commerciaux. Notre code de calcul permet de trouver directement les fréquences propres et les facteurs de pertes des poutres sandwichs rotatives ayant une rigidité qui varie en fonction de la pulsation. Ce calcul rapide et efficace n'est pas permis par les logiciels de commerce. Les résultats montrent que pour de faibles angles de vrillage, la variation des paramètres dynamiques n'est pas significative. Cependant, à partir d'un certain angle, l'augmentation de l'angle de vrillage tend à assouplir la poutre et à augmenter l'effet de l'amortissement.

## Références

- [1] HH. Yoo, JH. Park, J. Park, Vibration analysis of rotating pre-twisted blades, *Computer and Structures*, 79 (2001) 1811–1819.
- [2] B. Yardimoglu, T. Yildirim, Finite element model for vibration analysis of pre-twisted Timoshenko beam, *Journal of Sound and Vibrations*, 273 (2004) 714–754.
- [3] H. Kim, HH. Yoo, J. Chung, Dynamic model for free vibration and response analysis of rotating beams, *Journal of Sound and Vibrations*, 332 (2013) 5917–592.
- [4] DK. Rao, Transverse vibrations analysis of pre-twisted sandwich beams, *Journal of Sound and Vibrations*, 44(2) (1976) 159–168.
- [5] CY. Lin, LW. Chen, Dynamic stability of rotating pre-twisted blades with a constrained damping layer, *Composite Structures*, 61 (2003) 235–245.
- [6] F. Boumediene, F. Bekhoucha, EM. Daya, Modal analysis of rotating viscoelastic sandwich beams, *Mechanics of advanced materials and structures*, (2019) DOI :10.1080/15376494.2019.1567887.
- [7] KB. Subrahmanyam, SV. Kulkarni, JS. Rao, Coupled bending-bending vibration of pre-twisted cantilever blading allowing for shear, *International Journal of Mechanical Sciences*, 23 (1981) 517–530.