

Un mélangeur actif efficace pour les fluides à seuil de contrainte

Yann Moguen ^a, Eliane Younes ^{b,c}, Kamal El Omari ^c, Teodor Burghilea ^d,
Cathy Castelain ^d, Yves Le Guer ^c

a. Univ. Pau & Pays Adour, SIAME / LMAP (yann.moguen@univ-pau.fr)

b. Université de Nantes, Laboratoire de Thermocinétique - UMR 6607 (eliane.younes@univ-nantes.fr)

c. Univ. Pau & Pays Adour, SIAME (kamal.elomari@univ-pau.fr, yves.leguer@univ-pau.fr)

d. CNRS / Université de Nantes, Laboratoire de Thermocinétique - UMR 6607

(teodor.burghilea@univ-nantes.fr, cathy.castelain@univ-nantes.fr)

Résumé :

Nous présentons quelques résultats d'une étude numérique du mélange d'un scalaire passif par advection chaotique à bas nombre de Reynolds. Le mélange est effectué par un nouveau mélangeur actif en écoulement ouvert, appelé RAW pour Rotating Arc-Walls. Un modèle phénoménologique est proposé, permettant d'obtenir un critère de mélange portant sur deux paramètres adimensionnels : le nombre de Strouhal basé sur la vitesse débitante du fluide et le rapport de la vitesse transverse d'écoulement à la vitesse débitante. Pour un protocole donné correspondant à un choix de ces paramètres favorable au mélange dans le cas d'un fluide newtonien, nous étudions la dépendance de l'efficacité du mélange d'un fluide de Bingham vis-à-vis du nombre de Bingham. Le rôle complexe du seuil de contrainte est mis en évidence.

Abstract :

We present some results of a numerical study of the mixing of a passive scalar by chaotic advection, at low Reynolds number. The mixing is carried out by a new active open flow mixer, called RAW for Rotating Arc-Walls. A phenomenological model is proposed, making it possible to obtain a mixing criterion based on two dimensionless parameters : the Strouhal number based on the bulk velocity of the fluids and the ratio of the transverse velocity to the bulk velocity. For a given protocol corresponding to a choice of these parameters favourable for mixing in the case of a Newtonian fluid, the dependence on the Bingham number of the efficiency of the mixing of a Bingham plastic fluid is investigated. The complex role of the yield stress is evidenced.

Mots clefs : Mélangeur actif, advection chaotique, écoulement ouvert, fluides à seuil.

1 Introduction

Nous considérons ici le mélange actif par advection chaotique d'un scalaire passif dans un fluide à seuil en écoulement incompressible périodique ouvert. Nous utilisons pour cela un nouveau mélangeur,

appelé RAW pour *Rotating Arc-Walls*. Ce mélangeur est constitué d'un canal rectiligne le long duquel sont répartis trois cylindres en rotation suivant un protocole périodique.

D'une façon générale, le mélange par advection chaotique consiste en une combinaison complexe d'advection des particules de fluide et de diffusion moléculaire [1]. L'homogénéisation finale, en général partielle dans le cas d'un mélangeur ouvert, est effectuée par la diffusion moléculaire. Le choix du protocole appliqué pour l'advection des particules détermine l'efficacité du mélangeur, l'objectif étant le plus souvent de réduire autant que possible le temps nécessaire à la diffusion moléculaire pour atteindre un niveau d'homogénéisation souhaité. Dans le cas que nous considérons du mélange en écoulement ouvert, l'efficacité de mélange est une question critique du fait qu'en pratique le temps de séjour caractéristique des particules de fluide est souvent déterminé par un débit imposé.

Le mélange par advection chaotique repose sur une dynamique d'étirement/repliement des régions de fluide [1]. L'étirement est souvent associé à la présence de points hyperboliques dans l'écoulement, que celui-ci soit périodique ou non [2]. Dans le cas périodique, l'étirement en filaments des régions de fluide est associé à la présence de points-selles situés à l'intersection de lignes dont les faisceaux sont les variétés hyperboliques stables et instables de codimension un [3]. Les variétés stables sont répulsives pour les particules de fluide situées dans leur voisinage, tandis que les variétés instables sont attractives. Dans le cas 2D qui sera considéré ici, le caractère attractif ou répulsif correspond aux valeurs propres de la forme $\lambda > 0$ et $1/\lambda$ de l'application de premier retour linéarisée [4] représentée par la matrice de Floquet de l'orbite périodique. Dans le cas général où l'écoulement n'est ni stationnaire ni périodique, une définition objective des régions hyperboliques peut être basée sur une approche variationnelle utilisant des propriétés du tenseur de Cauchy-Green sur un intervalle de temps d'intérêt [5, 6]. Les régions hyperboliques sont, en 2D, les lignes d'étirement les plus attractives et les lignes de contraction les plus répulsives. Une région de fluide entraînée vers un point-selle le long d'une région hyperbolique répulsive (variété stable dans le cas périodique) sera ainsi étirée en filament suivant la direction de la région hyperbolique attractive (variété instable dans le cas périodique). C'est ce mécanisme qui est à l'origine des structures filamentaires de concentration destinées à être ensuite repliées au cours du processus de mélange. Une autre caractérisation variationnelle des régions hyperboliques consiste à déterminer des courbes stationnaires de cisaillement moyenné [7]. Comme lignes sans cisaillement, elles sont des barrières de transport qui délimitent dans l'écoulement des zones entre lesquelles il n'y a pas d'échange de particules fluides. Les variétés hyperboliques sont donc à la fois des structures indispensables au mélange et des barrières au transport de matière. L'efficacité du mélange dépend alors fortement de leur géométrie, leurs intersections, ainsi que des aires des lobes de fluide piégés entre elles [8, 9, 10].

Les régions elliptiques, également appelées "îlots de KAM" en 2D, sont en général également présentes dans un écoulement ouvert. Dans le cas périodique, leurs centres sont les points correspondant à des valeurs propres de la forme $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ de la matrice de Floquet. Les régions elliptiques ne subissent donc ni étirement ni contraction. Pour des écoulements instationnaires apériodiques, elles peuvent être identifiées comme étant des régions dont les bords sont à haut niveau de cisaillement [1], ce qui est à la base d'une définition objective par une approche variationnelle basée sur des propriétés du tenseur de Cauchy-Green [5]. Du fait de ce haut niveau de cisaillement, elles constituent, comme les régions hyperboliques, des barrières de transport pour les particules de fluide. Lorsque les régions elliptiques ont des aires trop grandes pour que la diffusion puisse les resorber compte tenu du temps de séjour limité dans un mélangeur ouvert, elles peuvent constituer des "zones mortes" en termes de mélange. Elles peuvent également gêner le processus de mélange associé aux variétés hyperboliques [11]. Enfin, bien que cela ait été peu étudié, elles peuvent également jouer un rôle favorable au mélange, au moins

dans des cas d'écoulements ouverts [12].

Les régions paraboliques correspondent, dans le cas périodique, aux points pour lesquels la matrice de Floquet est la matrice identité ou la somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente [13]. Mais l'action sur les lignes matérielles de l'application de premier retour ne peut être caractérisée qu'en prenant en compte les termes quadratiques de son approximation [14]. Le cas où la matrice de Floquet est la matrice identité correspond à des points de réinjection de fluide le long des variétés instables depuis la paroi, avec peu d'étirement et donc des filets de fluide repérables visuellement par leur épaisseur. Le cas où la matrice de Floquet s'écrit comme la somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente correspond à une incurvation parabolique, et donc, au fur et à mesure des itérations de l'application, à un repliement des filets de fluide avec augmentation de la courbure locale. Le repliement se fait le long de la variété instable de l'orbite. L'augmentation de la courbure locale correspond à une perte d'uniformité de l'étirement des lignes matérielles, souvent considérée comme défavorable au mélange [15]. Dans le cas d'écoulements instationnaires apériodiques, les régions paraboliques peuvent également être définies de manière objective par une approche variationnelle comme courbes stationnaires de cisaillement moyenné [7]. À ce titre, comme les régions hyperboliques vues précédemment, elles sont des barrières de transport qui peuvent être des obstacles aux écoulements transverses nécessaires au processus de mélange [16]. Cependant, une région parabolique peut aussi être associée au repliement d'une structure filamentaire associée à une région hyperbolique, et ainsi participer à un processus d'étirement/repliement favorable au mélange [14].

En conclusion, les régions hyperboliques sont généralement considérées *a priori* comme favorables au mélange, à la différence des régions non hyperboliques, que celles-ci soient elliptiques ou paraboliques, qui sont généralement considérées *a priori* comme défavorables. Cependant, l'action combinée de ces dernières avec des régions hyperboliques, ou d'autres régions non hyperboliques, peut être favorable au mélange. Pour le mélangeur RAW que nous proposons, nous verrons ainsi que des filaments de concentration sont générés par des régions elliptiques proches des parois mobiles. Ces régions jouent alors un rôle clairement favorable au mélange.

Le plan de la présente communication est le suivant. La géométrie du mélangeur RAW et le protocole de mélange sont présentés dans la section 2. Dans la section 3, une condition de mélange d'origine purement phénoménologique est présentée. Elle permet de déterminer des paramètres adimensionnels du mélangeur assurant un mélange efficace pour un fluide newtonien. Pour un choix de tels paramètres, des simulations directes de mélange d'un fluide à seuil sont présentées dans la section 4. Un fluide à seuil ne s'écoule que lorsque la contrainte de cisaillement dépasse une certaine valeur. Mélanger un fluide à seuil présente donc d'autant plus de difficultés que le niveau du seuil de contrainte est élevé. Nous considérerons ici, comme première étape d'investigation, le cas d'une rhéologie de Bingham, pour différents nombres de Bingham. Nous mettrons en évidence le rôle complexe du seuil de contrainte vis-à-vis de l'efficacité du mélange.

2 Le mélangeur RAW et le protocole choisi

Le mélangeur RAW est ici décrit en 2D par souci de simplicité (voir Fig. 1). Il consiste en un canal rectangulaire de longueur L et largeur W , équipé de trois cylindres de même rayon R , dont les axes de rotation sont perpendiculaires au plan du canal. Les trois cylindres sont en saillie dans le canal, avec la même profondeur Δ . Deux d'entre eux sont situés du même côté du canal, à la distance $2D$ l'un de

l'autre. Le troisième cylindre est positionné de l'autre côté du canal, au milieu des deux cylindres qui lui font face. Les rotations des trois cylindres sont *a priori* indépendantes les unes des autres.

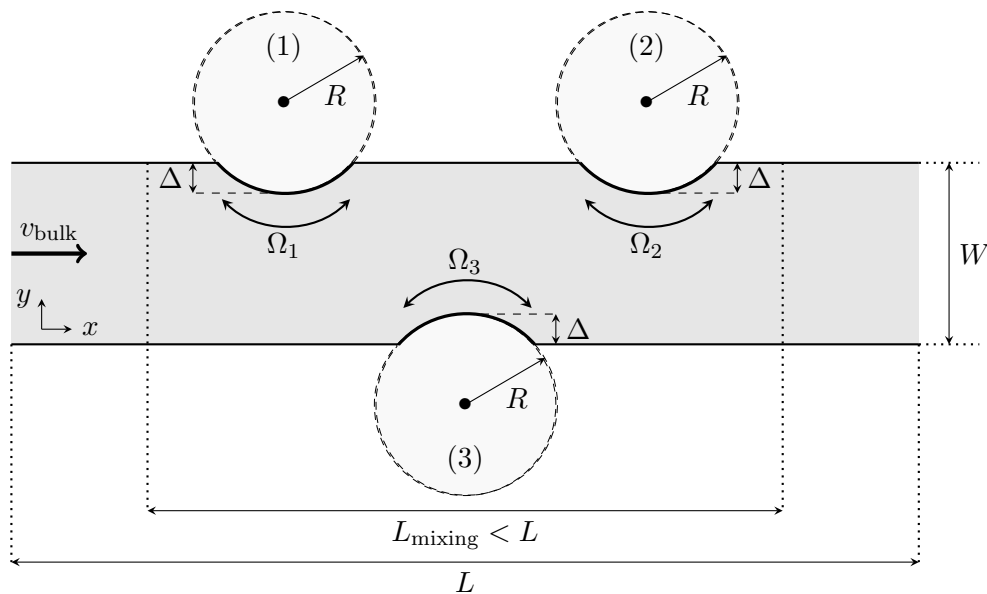


FIGURE 1 – Schéma du mélangeur RAW (pour *rotating arc-walls*) en 2D (le dessin n'est pas à l'échelle). v_{bulk} représente une vitesse débitante donnée à l'entrée du mélangeur.

La forme du protocole de mélange, c'est-à-dire les vitesses angulaires Ω_i des trois cylindres du mélangeur RAW schématisé Fig. 1, est choisie de manière à pouvoir appliquer à une grande partie du fluide situé dans la zone de mélange les phases consécutives d'étirement et de repliement des filaments de fluide (voir l'analyse de la section 4.2). Le protocole retenu à la suite d'un grand nombre de simulations directes de l'écoulement dans le mélangeur est le suivant :

$$\Omega_i(t) = \Omega_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \phi_i\right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

où t représente le temps, T la période et Ω_0 l'amplitude de la vitesse angulaire. Les déphasages ϕ_i sont choisis de manière à ce que la rotation du cylindre (3) soit en sens inverse de celle des cylindres (1) et (2) :

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, \quad \phi_3 = \pi. \quad (2)$$

3 Une condition de mélange basée sur un modèle phénoménologique

Le résultat présenté dans cette section est obtenu d'un raisonnement inspiré par Stroock *et al.* [17] et Ober *et al.* [18]. Le raisonnement est détaillé dans notre travail [19], auquel nous renvoyons le lecteur intéressé.

Nous considérons que le niveau de vitesse débitante v_{bulk} est donné. Nous définissons la vitesse transverse caractéristique dans le mélangeur RAW par

$$v_{\text{cross}} = R\bar{\Omega},$$

où $\bar{\Omega}$ est la moyenne de la vitesse angulaire d'un cylindre sur le temps de séjour caractéristique d'une particule fluide dans la zone de mélange (voir Fig. 1). Le rapport

$$K = \frac{v_{\text{cross}}}{v_{\text{bulk}}}$$

indique alors l'importance relative de l'écoulement transverse et de l'écoulement de transport longitudinal sur cette durée caractéristique. D'autre part, nous définissons un nombre de Strouhal débitant par

$$\text{St}_{\text{bulk}} = \frac{W}{T v_{\text{bulk}}}.$$

Par des arguments purement phénoménologiques, une condition de mélange peut être obtenue sous la forme suivante [19] :

$$K_0 \geq \frac{\pi \text{St}_{\text{bulk}}}{\ln(4)} \frac{\ln\left(\frac{\text{Pe}_{\text{bulk}}}{\zeta}\right)}{2 + \sin^2(\pi \zeta \text{St}_{\text{bulk}})}. \quad (3)$$

Ici, $\zeta = L_{\text{mixing}}/W$ est le facteur d'élanement de la zone de mélange (voir Fig. 1), K_0 est défini par

$$K_0 = \frac{R\Omega_0}{v_{\text{bulk}}},$$

et Pe_{bulk} désigne le nombre de Péclet débitant

$$\text{Pe}_{\text{bulk}} = \frac{v_{\text{bulk}} W}{\mathcal{D}},$$

où \mathcal{D} est la viscosité moléculaire.

La longueur de la zone de mélange L_{mixing} , et donc le facteur d'élanement ζ avec laquelle il est défini, n'ont pas de valeurs déterminées de manière précise. Cependant, la condition de mélange (3) est basée sur un modèle d'écoulement simplifié et donc ne permet de déterminer les paramètres favorables de mélange que de manière approchée. En pratique, le caractère approximatif de la valeur de la longueur de la zone de mélange L_{mixing} a peu d'effet sur le domaine de validité de la condition (3). En nous basant sur cette condition avec $\zeta = 5$ et $\text{Pe}_{\text{bulk}} = 10^6$ (voir Table 1), nous prenons

$$\text{St}_{\text{bulk}} = 1 \text{ et } K_0 = 20$$

pour la suite de la présente étude. Nous vérifierons dans la section suivante par simulation directe que ces valeurs sont effectivement favorables au mélange dans le cas d'une rhéologie de fluide à seuil lorsque le niveau du seuil n'est pas trop élevé.

4 Mélange d'un fluide de Bingham

Par souci de simplicité, nous considérons pour une première étape d'investigation que la rhéologie du fluide à seuil est celle d'un fluide de Bingham. Un fluide de Bingham ne s'écoule que lorsqu'une valeur seuil de la contrainte de cisaillement, notée par la suite τ_0 , est dépassée. Dans ce cas, la contrainte de cisaillement τ est une fonction affine du taux de cisaillement

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2\varepsilon : \varepsilon} \quad \text{où} \quad \varepsilon = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T].$$

En dessous de la valeur seuil τ_0 , le fluide ne s'écoule pas et $\dot{\gamma} = 0$. Lorsque $\tau_0 = 0$, la rhéologie newtonienne est retrouvée. Nous définissons le nombre de Bingham débitant par

$$B_{\text{bulk}} = \frac{\tau_0 W}{\mu_0 v_{\text{bulk}}},$$

où μ_0 est une valeur de la viscosité du fluide reliée à la viscosité effective μ par

$$\mu = \mu_0 + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} (1 - e^{-m\dot{\gamma}}). \quad (4)$$

Dans cette relation, le coefficient de régularisation m est un nombre strictement positif qui a la dimension du temps [20].

4.1 Équations, méthode numérique et paramètres

Les champs de la vitesse \mathbf{v} et de la concentration c du scalaire passif sont obtenus en résolvant le système d'équations constitué de l'équations de continuité

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

de l'équation de la quantité de mouvement

$$\rho[\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p + \nabla \cdot \mu[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T],$$

et de l'équation d'advection-diffusion de la concentration du scalaire passif

$$\partial_t c + \mathbf{v} \cdot \nabla c = \mathcal{D} \Delta c.$$

À l'instant initial, l'interface entre les deux niveaux de concentration du scalaire, $c = 0$ et $c = 1$, est au milieu du canal, dans la direction des abscisses x . Le champ de vitesse à l'entrée du domaine de calcul, où les deux niveaux de concentration sont injectés, est pris sous la forme d'un profil de Poiseuille. La condition de non glissement est appliquée aux parois, qu'elles soient fixes ou mobiles. Avec le choix des paramètres listés dans la table 1, le nombre de Reynolds débitant, défini par $\text{Re}_{\text{bulk}} = \rho v_{\text{bulk}} W / \mu_0$, est égal à 1. La résolution du système d'équations donné précédemment est effectuée avec le code TA-

Longueur du canal (L)	0,5 m
Largeur du canal ($W = 2R$)	0,1 m
Profondeur de pénétration (Δ)	$1,67 \times 10^{-2}$ m
Masse volumique (ρ)	10^3 kg/m ³
Viscosité dynamique (μ_0)	1 Pa s
Diffusivité moléculaire (\mathcal{D})	10^{-9} m ² /s
m (cf. équation (4))	10^2 s
Nombre de Péclet débitant (Pe_{bulk})	10^6

TABLE 1 – Paramètres pour le mélangeur RAW et le fluide en écoulement.

MARIS développé par Kamal El Omari (UPPA/SIAME). Pour une description de la méthode numérique employée, nous renvoyons par exemple à [21].

4.2 Mécanisme du mélange

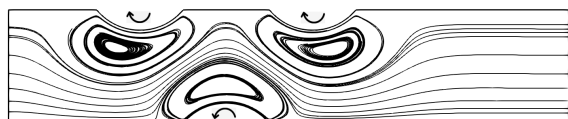


(a) Cas stationnaire. Lignes de courant (ou trajectoires). Les trois cylindres ont, en valeur absolue, la même vitesse angulaire constante.

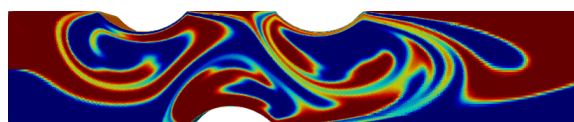


(b) Cas instationnaire avec vitesses angulaires données par les équations (1)-(2). Champ de concentration à la première demi-période : $t = T/2$.

FIGURE 2 – Sur la figure 2a à gauche, les cylindres du haut (cylindres (1) et (2) sur la figure 1) sont en rotation dans le sens anti-horaire ; le cylindre (3), en bas, est en rotation dans le sens horaire. Ce sont aussi les sens de rotation des cylindres sur la première demi-période de la simulation dont le champ de concentration est montré sur la figure 2b en $t = T/2$. Le nombre de Bingham débitant est $B_{\text{bulk}} = 0$, *i.e.* la rhéologie est newtonienne. Le code des couleurs de la figure 2b est le suivant : bleu pour $c = 0$; jaune pour $c = 0,5$; rouge pour $c = 1$.



(a) Cas stationnaire. Lignes de courant (ou trajectoires). Les trois cylindres ont, en valeur absolue, la même vitesse angulaire constante, dans le sens inverse de la figure 2a.



(b) Cas instationnaire avec vitesses angulaires données par les équations (1)-(2). Champ de concentration à la fin de la première période : $t = T$.

FIGURE 3 – Sur la figure 3a à gauche, les cylindres du haut (cylindres (1) et (2) sur la figure 1) sont en rotation dans le sens horaire ; le cylindre (3), en bas, est en rotation dans le sens anti-horaire. Les sens de rotation, inversés par rapport à ceux de la figure 2a, sont aussi ceux des cylindres sur la deuxième demi-période de la simulation dont le champ de concentration est montré sur la figure 3b en $t = T$. Le nombre de Bingham débitant est $B_{\text{bulk}} = 0$, *i.e.* la rhéologie est newtonienne.

Considérons dans un premier temps le cas où le nombre de Bingham est nul, c'est-à-dire que le taux de cisaillement est proportionnel à la contrainte de cisaillement et la rhéologie est newtonienne. En considérant la première période de rotation des cylindres par souci de simplification, on observe qu'une période peut se décomposer en deux phases (voir Figs. 2 et 3). Durant la première phase, qui correspond à la première demi-période, trois poches de concentration viennent se positionner sur les trois régions elliptiques visibles sur la figure 2a, situées chacune en face d'un cylindre en rotation. Les trois poches de concentration prennent la forme d'enclumes (rouge, bleue, puis à nouveau rouge), séparées par des zones plus étroites constituées chacune de deux bandes de concentrations différentes ; voir Fig. 2b. Aux périodes suivantes, les poches de concentration ne sont plus monochromes, mais constituées d'entrelacs de concentration de plus en plus complexes. Cependant, le mécanisme reste fondamentalement le même : lors de chaque première demi-période, les trois zones elliptiques servent de "salles d'attente" aux poches de concentration, avant leur étirement durant la deuxième demi-période. Mais avant cette deuxième phase, les cylindres changent de sens de rotation à la demi-période. À ce moment-là, les zones elliptiques présentes lors de la première demi-période disparaissent et les poches de concentration qui étaient localisées sur les zones elliptiques sont advectées par l'écoulement débitant. Ensuite, à mesure que la vitesse angulaire des cylindres augmente, trois nouvelles régions elliptiques se forment à proxi-

mité des cylindres (voir Fig. 3a); les poches de concentration issues des trois régions elliptiques de la première demi-période sont alors entraînées entre les cylindres en rotation et les nouvelles régions elliptiques. Comme les nouvelles régions elliptiques sont très proches des cylindres, ces poches de concentration sont alors fortement étirées. De plus, les bandes de concentrations différentes qui séparaient les zones de concentration en forme d'enclume identifiées lors de la première demi-période sont enroulées à l'intérieur des nouvelles zones elliptiques, ce qui génère des striations de niveaux de concentration différents.

Le mécanisme de mélange décrit précédemment permet de justifier *a posteriori* le choix des paramètres géométriques du mélangeur RAW. En effet, les aires des zones elliptiques générées par la rotation des cylindres sont du même ordre de grandeur que celles des cylindres eux-mêmes. Ainsi, l'écartement entre les cylindres doit être assez réduit pour que les zones de concentration localisées entre les régions elliptiques soient suffisamment étirées avant leur enroulement à l'intérieur des zones elliptiques. En effet, le niveau d'étirement atteint avant la phase d'enroulement conditionne directement l'efficacité de mélange. La disposition des cylindres aux sommets d'un triangle équilatéral avec une distance entre les cylindres de l'ordre de leur diamètre permet de satisfaire les conditions de la réalisation du mécanisme de mélange.

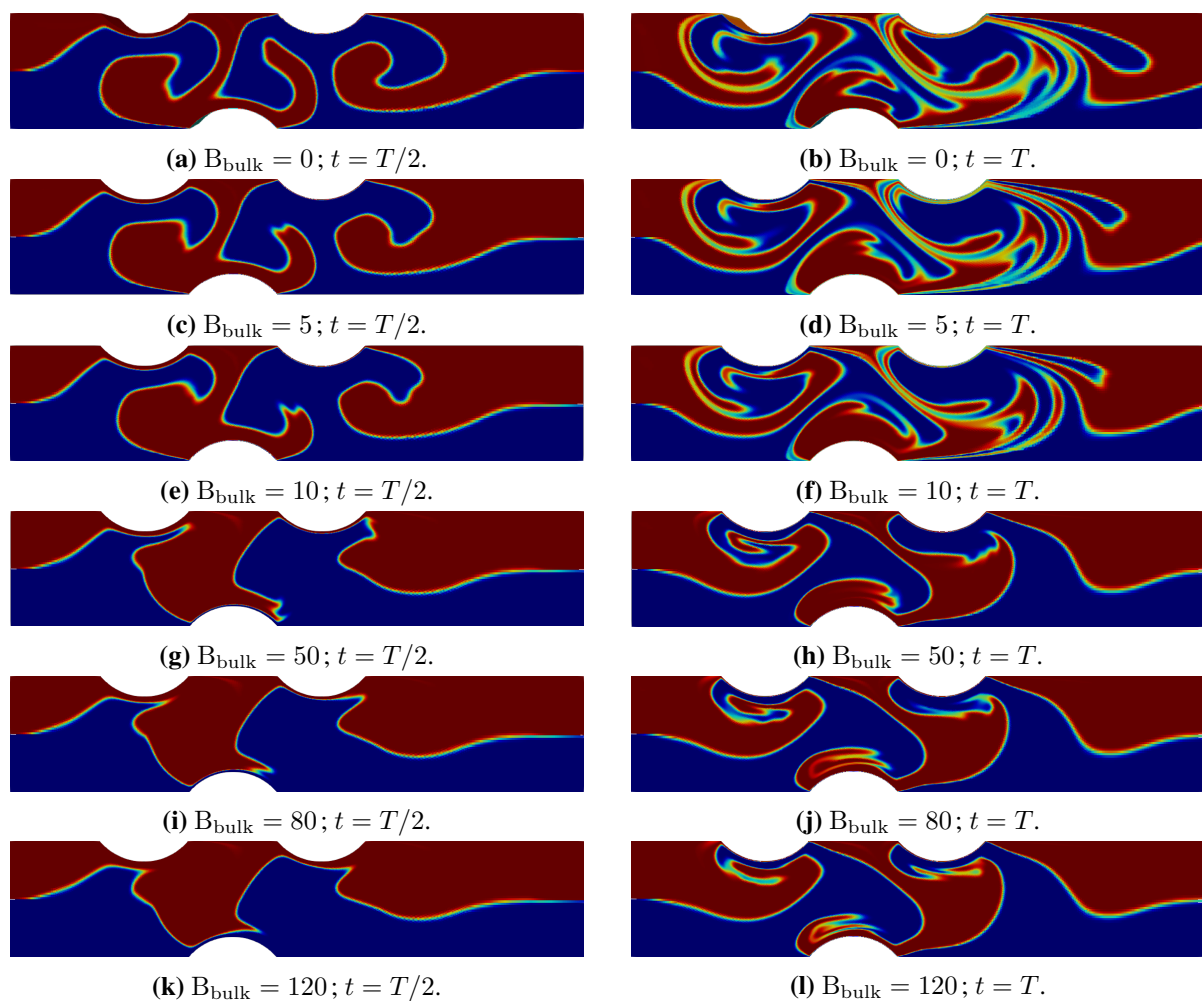


FIGURE 4 – Champs de concentration aux temps $t = T/2$ (colonne de gauche) et $t = T$ (colonne de droite) pour différentes valeurs du nombre de Bingham débitant.

Lorsque le nombre de Bingham débitant est strictement positif, on peut identifier sur la figure 4 deux situations très différentes. Une première situation correspond au nombre de Bingham débitant compris entre 0 et 10, environ. Les mécanismes d'advection décrits ci-dessus pour une rhéologie newtonienne sont alors, pour l'essentiel, conservés. De ce fait, l'efficacité de mélange est peu sensible au nombre de Bingham débitant tant que celui-ci reste inférieur à 10, environ. C'est ce que nous observons sur les figures 5a à 5c, représentant les relevés spatiotemporels pris sur la ligne de sortie du mélangeur pendant la durée de 50 périodes de rotation des cylindres.

Une deuxième situation peut être clairement identifiée lorsque le nombre de Bingham débitant est nettement supérieur à la dizaine, disons typiquement supérieur à 50. Les zones de concentration en forme d'enclume ne sont alors pas clairement formées à la demi-période $t = T/2$, ni les bandes de concentrations qui les séparent. De ce fait, les zones de concentration en forme d'enclume, identifiées lorsque le nombre de Bingham débitant est inférieur à la dizaine, ne sont pas étirées en filaments le long des cylindres lors de la deuxième demi-période, et les striations issues des bandes séparant les zones de concentration en forme d'enclume ne se forment pas. L'efficacité de mélange se dégrade donc nettement dans ce cas par rapport à la situation identifiée précédemment, comme nous le constatons sur les relevés spatiotemporels 5d à 5f.

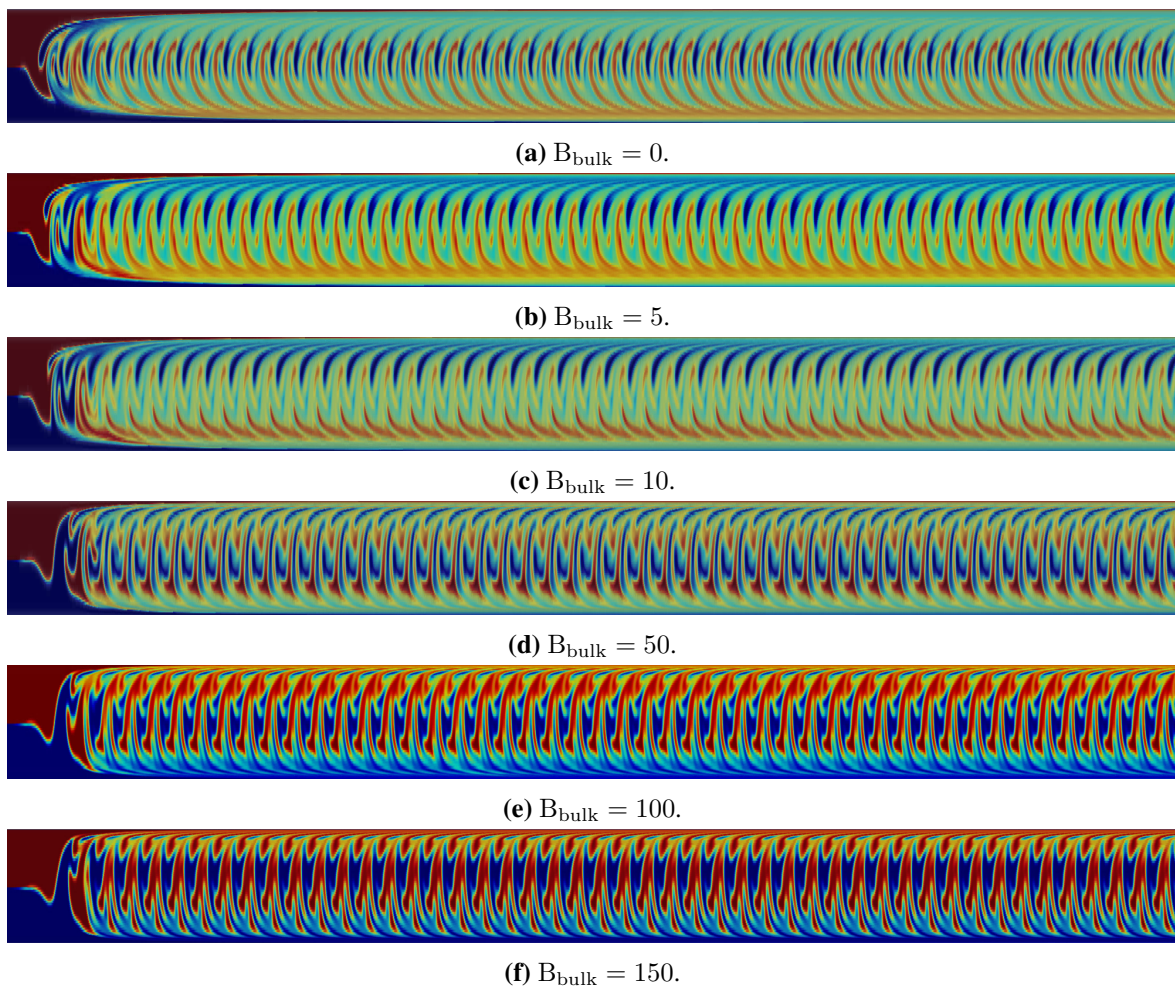


FIGURE 5 – Relevés spatiotemporels pris sur la ligne de sortie du mélangeur sur une durée de 50 périodes T , pour différentes valeurs du nombre de Bingham débitant.

4.3 Temps de séjour

Les distributions des temps de séjour des particules de fluide dans le mélangeur sont des indicateurs de la complexité de leurs trajectoires dans la zone de mélange. Sur la figure 6 sont représentées des distributions de temps de séjour pour différentes valeurs du nombre de Bingham débitant. Pour chaque distribution, 1 000 particules ont été réparties uniformément le long de la ligne d'entrée de l'écoulement dans le mélangeur. Nous suivons leurs trajectoires sur une durée de 25 unités de temps W/v_{bulk} , sachant que la durée caractéristique de traversée du mélangeur basée sur la vitesse débitante est $5 W/v_{\text{bulk}}$. Nous observons sur la figure 6 qu'à mesure que le nombre de Bingham débitant augmente, l'étendue des distributions diminue. Cela signifie que l'on se rapproche d'un écoulement de type "piston", dans lequel des striations de concentration ne sont pas générées et l'efficacité du mélange est médiocre. D'après l'analyse faite dans la section précédente, ce cas correspond aux distributions des figures 6d à 6f. Les distributions des figures 6a à 6c correspondent en revanche à des cas que nous avons identifiés dans la section précédente comme favorables au mélange, du fait de la génération de trajectoires complexes de particules dans la zone de mélange.

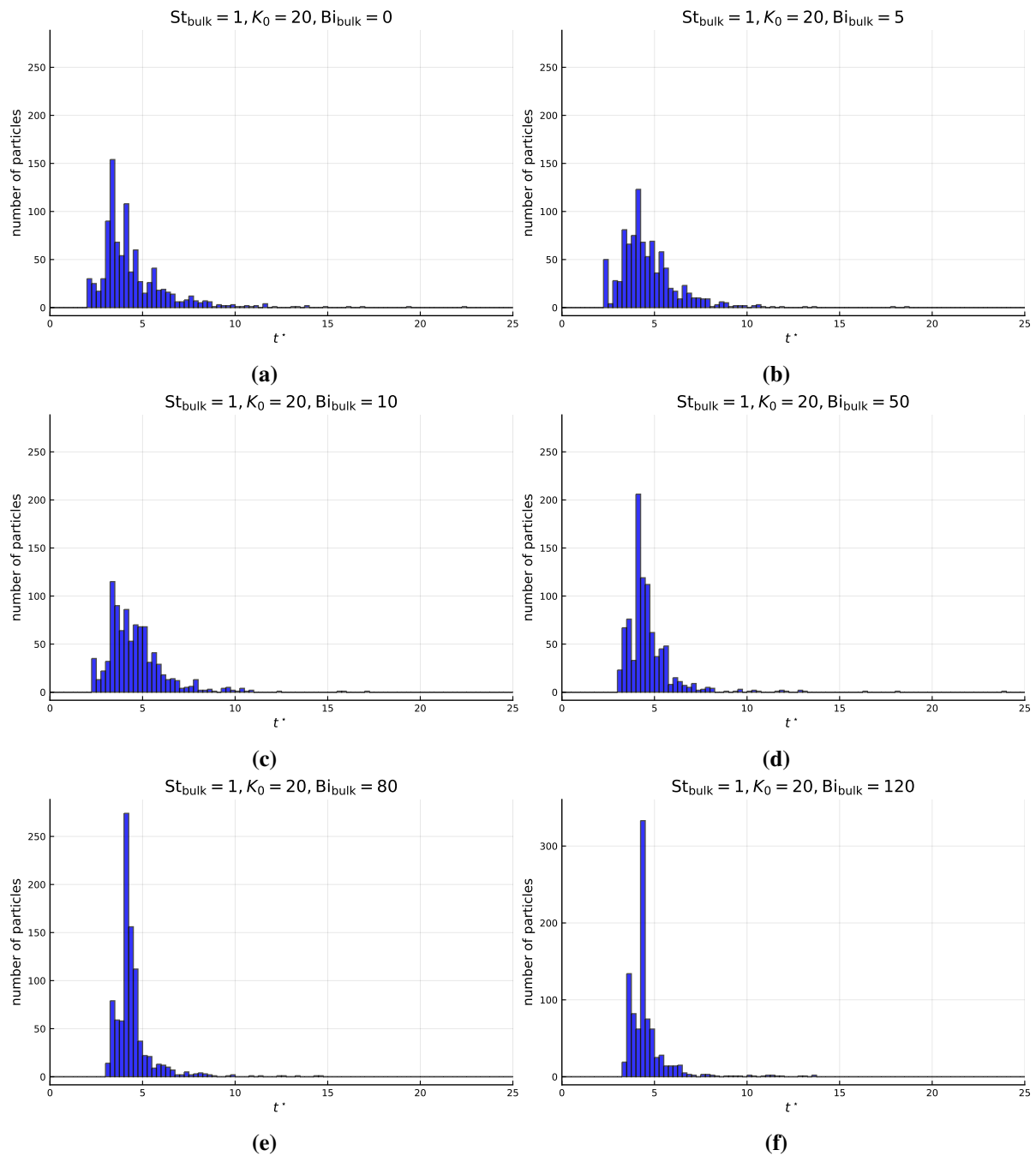


FIGURE 6 – Distributions des temps de séjour de 1 000 particules uniformément réparties sur la ligne d'entrée à l'instant $t = 0$, pour différentes valeurs du nombre de Bingham débitant. Durée de la simulation pour la constitution de chaque histogramme : 25 unités de temps W/v_{bulk} .

5 Conclusion

Nous avons décrit un nouveau mélangeur actif en écoulement ouvert, appelé RAW pour *Rotating Arc-Walls*, consistant en un canal rectiligne le long duquel sont répartis trois cylindres en rotation alternée périodique. Une analyse des mécanismes d'advection des particules de fluide intervenant lors d'une période de rotation, pour différentes valeurs du nombre de Bingham, nous a permis de mettre en évidence le rôle fondamental que jouent dans le processus de mélange des régions elliptiques de l'écoulement. Ces régions, formées par la rotation des cylindres, apparaissent puis disparaissent périodiquement, et

jouent en quelque sorte le rôle de cylindres fictifs positionnés à l'intérieur de l'écoulement pendant une durée limitée. L'efficacité du mélange des fluides de Bingham est corrélée de manière complexe aux mécanismes d'advection dans la zone de mélange. Pour les paramètres d'agitation considérés, les striations ne se forment plus et l'efficacité de mélange est faible lorsque le nombre de Bingham débitant supérieur à 50. Le profil typique des distributions des temps de séjours est alors identifiable par son étendue réduite. En revanche, lorsque le nombre de Bingham est inférieur à une valeur de l'ordre de la dizaine, le protocole d'advection que nous avons choisi permet l'enroulement de striations des concentrations grâce aux zones elliptiques de l'écoulement, ce qui est favorable à l'efficacité du mélange. Notons que le mélangeur RAW que nous proposons permet d'adapter les paramètres d'agitation au niveau du seuil de contrainte du fluide de manière à obtenir une bonne efficacité de mélange. Une approche quantitative des aspects d'efficacité fera l'objet d'une prochaine étape de l'étude.

Références

- [1] H. Aref, J.R. Blake, M. Budišić, S.S.S. Cardoso, J.H.E. Cartwright, H.J.H. Clercx, K. El Omari, U. Feudel, R. Golestanian, E. Guillard, G.F. van Heijst, T.S. Krasnopolskaya, Y. Le Guer, R.S. MacKay, V.V. Meleshko, G. Metcalfe, I. Mezić, A.P.S. de Moura, O. Piro, M.F.M. Speetjens, R. Sturman, J.-L. Thiffeault, I. Tuval, *Frontiers of chaotic advection*, *Rev. Mod. Phys.*, 89 (2017) 025007.
- [2] Y.-C. Lai, T. Tél, *Transient chaos - Complex dynamics on finite-time scales*, Springer, 2011.
- [3] D. Auerbach, P. Cvitanović, J.-P. Eckmann, G. Gunaratne, I. Procaccia, *Exploring chaotic motion through periodic orbits*, *Phys. Rev. Lett.*, 58 (1987) 2387–2389.
- [4] T. Tél, G. Károlyi, A. Péntek, I. Scheuring, Z. Toroczkai, C. Grebogi, J. Kadtko, *Chaotic advection, diffusion, and reactions in open flows*, *Chaos*, 10 (2000) 89–98.
- [5] G. Haller, F.J. Beron-Vera, *Geodesic theory of transport barriers in two-dimensional flows*, *Phys. D*, 241 (2012) 1680–1702.
- [6] G. Haller, *Lagrangian coherent structures*, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 47 (2015) 137–161.
- [7] M.M. Farazmand, D. Blazevski, G. Haller, *Shearless transport barriers in unsteady two-dimensional flows and maps*, *Phys. D*, 278-279 (2014) 44–57.
- [8] V. Rom-Kedar, A. Leonard, S. Wiggins, *An analytical study of transport, mixing and chaos in an unsteady vortical flow*, *J. Fluid Mech.*, 214 (1990) 347–394.
- [9] S. Balasuriya, *Dynamical systems techniques for enhancing microfluidic mixing*, *J. Micromech. Microeng.*, 25 (2015) 094005.
- [10] M. Robinson, P.W. Cleary, *Flow and mixing performance in helical ribbon mixers*, *Chem. Eng. Sci.*, 84 (2012) 382–398.
- [11] O. V. Popovych, A. Pikovsky, B. Eckhardt, *Abnormal mixing of passive scalars in chaotic flows*, *Phys. Rev. E*, 75 (2007) 036308.
- [12] A. de Moura, U. Feudel, E. Guillard, *Mixing and chaos in open flows*, in : E. van der Giessen, H. Aref, H. Clercx, M. Speetjens (éditeurs), *Advances in Applied Mechanics*, 45, Elsevier, 2012, 1–50.
- [13] E. Guillard, *Chaotic mixing by rod-stirring devices in open and closed flows*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 2007.

- [14] J.-L. Thiffeault, E. Guillard, M.D. Finn, The size of ghost rods, in : Proceedings of the Workshop on Analysis and Control of Mixing with Applications to Micro and Macro Flow Processes - CISM, Udine, July 2005, Springer, 2006.
- [15] J.-L. Thiffeault, Stretching and curvature along material lines in chaotic flows, *Phys. D*, 198 (2004) 169–181.
- [16] F. Enrile, G. Besio, A. Stocchino, Shear and shearless Lagrangian structures in compound channels, *Adv. Water Res.*, 113 (2018) 141–154.
- [17] A.D. Stroock, S.K.W. Dertinger, A. Ajdari, I. Mezić, H.A. Stone, G.M. Whitesides, Chaotic mixer for microchannels, *Science*, 295 (2002) 647–651.
- [18] T.J. Ober, D. Foresti, J.A. Lewis, Active mixing of complex fluids at the microscale, *P. Nat. Acad. Sci. USA*, 112 (2015) 12293–12298.
- [19] K. El Omari, E. Younes, T. Burghilea, Y. Moguen, C. Castelain, Y. Le Guer, Active chaotic mixing in a channel with rotating arc-walls. En préparation.
- [20] T.C. Papanastasiou, Flows of materials with yield, *J. Rheol.*, 31 (1987) 385–404.
- [21] K. El Omari, Y. Le Guer, Alternate rotating walls for thermal chaotic mixing, *Int. J. Heat Mass Transf.*, 53 (2010) 123–134.