

Exploration du problème linéaire aux valeurs propres de l'écoulement annulaire par la méthode des matrices de Riccati

N. MEHIDI BOUAM^a, N. BOUAMAR^a, H.DJESSAS^a, N. BOUBALOU^b

a. Laboratoire de Physique Théorique, Faculté des Sciences Exactes, Université A. Mira de Béjaia Route de Targa Ouzemour, 06000 Béjaia, Algérie

b. Faculté des Sciences Exactes, Université ouloud Mammeri de Tizi Ouzou, 15000

Tizi Ouzou, Algérie

nadbouam@yahoo.fr

Résumé :

Dans ce travail, nous présentons une étude sur la stabilité linéaire de l'écoulement coaxial en conduite circulaire de deux couches de fluides immiscibles en présence de la tension superficielle. Le problème aux valeurs propres formé par les équations d'Orr-Sommerfeld est résolu numériquement en se basant sur les matrices de Riccati. Cette démarche permet une analyse linéaire détaillée du problème sans hypothèses restrictives sur le nombre de Reynolds ou sur la longueur d'onde des perturbations. Les résultats obtenus nous permettent de mettre en évidence deux modes instables. Nous examinons le rôle de la tension de surface sur l'instabilité capillaire de Rayleigh.

Abstract :

This work, concerns the study of linear stability analysis of two layer viscous film flow, in a cylindrical annular, particular attention is given to the effects of surface tension. The eigenvalue problem formed by the Orr-Sommerfeld equations is solved numerically using an approach based on the Riccati matrix. This approach allows a detailed linear analysis of the problem without limiting assumptions about the Reynolds number or the wavelength of the disturbances. The results obtained allow us to highlight two unstable modes. We examine the role of surface tension on capillary instability.

Mots clefs : Equations de Navier-Stokes; Fluides immiscibles; Ecoulements axisymétriques; Equations d'Orr Sommerfeld; Matrices de Riccati; Instabilités capillaires.

1 Introduction

De nombreuses études théoriques, expérimentales et numériques sur le problème de la stabilité des films tombants ont été développées en raison de leurs multiples applications industrielles [1-3]. La configuration la plus étudiée est celle de l'écoulement d'une ou de plusieurs couches sur un plan incliné. Celle que nous considérons dans cette étude concerne l'écoulement de deux couches de fluides sur une paroi courbe. Un intérêt particulier de ce problème réside dans la mise en évidence du rôle que peuvent jouer sur la déstabilisation de l'interface le grand nombre de paramètres que fait intervenir ce problème tel qu'on peut le voir dans les études de Charru [4] et Preziosi et al [5]. Les premiers travaux dans le cas de l'écoulement de deux couches de fluides en conduite cylindrique ont commencé par ceux de Hickox [6], qui a effectué une étude numérique des équations d'Orr-Sommerfeld. Dans la même configuration, la stabilité linéaire de l'écoulement lubrifiant de fluides newtoniens, de l'huile entouré par de l'eau qui est un fluide moins visqueux en faible épaisseur a été étudiée par Preziosi et al [5]. Ils ont réalisé une étude expérimentale validée par une étude numérique et ont obtenu deux Reynolds critiques correspondant à deux modes instables, dont un est qualifié d'instabilité capillaire et l'autre est un mode de cisaillement. Nous avons menée récemment une étude sur le même problème dans lequel nous avons développé un modèle intégral à deux équations basé sur une méthode de Galerkin [7]. Plusieurs auteurs ont également mis en évidence l'instabilité capillaire dans l'étude d'une seule couche de fluide s'écoulant sur une paroi cylindrique [8]. Dans cette étude nous proposons de développer une procédure numérique contenant l'instabilité capillaire pour deux couches de fluides visqueux s'écoulant par gravité à l'intérieur d'une conduite cylindrique verticale dans laquelle nous analysons l'influence de la courbure et de la tension superficielle sur la déstabilisation de l'interface.

2 Formulation du problème de stabilité

On s'intéresse à l'étude de la stabilité linéaire de l'interface $h(x,t)$ entre deux fluides visqueux s'écoulant par gravité g à l'intérieur d'un cylindre infini de rayon R_2 . L'axe $r=0$ est confondu avec l'axe du cylindre, et l'écoulement se fait suivant la direction axiale x . Le problème aux valeurs propres est formé par les équations d'Orr-Sommerfeld adimensionnées suivantes:

$$\varphi_j''' - 2\frac{\varphi_j'''}{r} - 2k^2\varphi_j'' + 3\frac{\varphi_j''}{r^2} + 2k^2\frac{\varphi_j''}{r} - 3\frac{\varphi_j'}{r^3} + k^4\varphi_j = ikR \left[(U_j - c) \left(\varphi_j'' - k^2\varphi_j - k\frac{\varphi_j}{r} \right) - U_j''\varphi_j + U_j' \frac{\varphi_j}{r} \right] \quad (1)$$

Les conditions aux limites en $r = 0$, à la paroi et à l'interface sont :

$$\varphi_1' = 0 \text{ et } \varphi_1 = 0 \text{ en } r = 0 \quad (2)$$

$$\varphi_2' = 0 \text{ et } \varphi_2 = 0 \text{ en } r = d \quad (3)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \text{ en } r = 1 \quad (4)$$

$$\varphi_1' + \frac{\varphi_1}{c - U_1} U_1' = \varphi_2' + \frac{\varphi_2}{c - U_2} U_2' \text{ en } r = 1 \quad (5)$$

$$\frac{\varphi_1}{c-U_1}(U_1''-\mu U_2'')-\left(\frac{\varphi_1'}{r^2}-\mu\frac{\varphi_2'}{r^2}\right)+(\varphi_1''-\mu\varphi_2'')+k^2(\varphi_1-\mu\varphi_2)=0 \quad \text{en} \quad r=1 \quad (6)$$

$$\left[\varphi_1'''-\frac{\varphi_1''}{r}+\varphi_1'\left(\frac{1}{r^2}-3k^2-ikR(U_1-c)\right)+\frac{2k^2}{r}\varphi_1\right]+ikR(U_1'\varphi_1-\rho U_2'\varphi_2)+\frac{ikRW_e(k^2-1)}{(U_1-c)}\varphi_1=0$$

en $r=1$ (7)

La vitesse de l'écoulement de base dans chaque couche de fluide ($j=1,2$) est obtenue en résolvant les équations de Navier-Stokes adimensionnées est donnée par :

$$U_1 = \frac{u_1}{u_1(0)} = 1 - \frac{r^2\mu}{\mu - \rho(1-d^2) - 2(1-\rho)\ln(d)} \quad \text{en} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (8)$$

$$U_2 = \frac{u_2}{u_1(0)} = \frac{-\rho(r^2-d^2) - 2(1-\rho)\ln(r) + 2(1-\rho)\ln(d)}{\mu - \rho(1-d^2) - 2(1-\rho)\ln(d)} \quad \text{en} \quad 1 \leq r \leq d \quad (9)$$

Où μ , ρ et d représentent respectivement le rapport des viscosités dynamiques, des densités et des épaisseurs de chaque couche de fluide.

$$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad d = \frac{R_2}{R_1}$$

On considère la vitesse finie en $r=0$ elle est donnée par :

$$u_0 = u_1(0) = \frac{gR_1^2}{4\nu_1\mu} \left[\mu - \rho(1-d^2) - 2(1-\rho)\ln(d) \right] \quad (10)$$

L'adimensionnement des équations linéarisées précédentes associées aux conditions aux limites est obtenu, en introduisant une longueur caractéristique λ suivant la direction de l'écoulement x et une autre longueur $r=R_1$ suivant l'axe radial, le temps de référence est donné par λ/u_0 et la pression par $(\mu_1 u_0 \lambda)/R_1^2$. Cet adimensionnement fait apparaître les nombres sans dimension suivants :

Le nombre de Reynolds $R = \rho_1 u_0 R_1 / \mu_1$, le nombre capillaire $W = \sigma / \mu_1 u_0 = J / Rd$.

3 Procédure numérique

La résolution du problème aux valeurs propres des équations (1)-(7) consiste à transformer ces équations linéaires en deux équations non linéaires avec conditions initiales. Cette approche est initialement proposée par Devay [9] et a montré son efficacité pour analyser la stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan.

Les transformations sont :

$$X = (\varphi, \varphi')^t \quad (11)$$

Et

$$Y = (\varphi'', \varphi''')^t \quad (12)$$

Ainsi les équations d'Orr-Sommerfeld deviennent :

$$\begin{cases} X' = AX + BY \\ Y' = CX + DY \end{cases} \quad (13)$$

où A , B , C et D sont des matrices 2×2 .

Les matrices de Riccati sont introduites à travers la transformation :

$$X = RY \quad (14)$$

Après différentiation de cette équation par rapport à r , on transforme les équations d'Orr –Sommerfeld en un problème non linéaire du premier ordre suivant :

$$R' = AR + B - RCR - RD \quad (15)$$

Avec

$$R_1(0) = 0 \text{ et } R_2(d) = 0 \quad (16)$$

Les conditions aux limites à l'interface (4-7) peuvent être exprimées sous forme matricielle :

$$MX + NY = 0$$

Où les matrices M et N sont des matrices 4×4 .

Les équations différentielles (15) à intégrer dans chaque couche de fluides sont donc fonction des conditions initiales (16) et sont résolues par la méthode de Runge-Kutta. Les valeurs propres sont déterminées en annulant le $\text{Det}(MR + N)$ en $r = 1$.

4 Résultats et discussion

La méthode numérique a été utilisée pour analyser la stabilité de l'interface entre deux couches de fluides. Dans toute l'étude nous avons considéré des fluides de même densité et de viscosité différentes. Nous nous concentrons sur l'influence de la tension superficielle J et celle du rapport des épaisseurs d des deux couches de fluides. Le développement de l'instabilité capillaire apparaît pour un nombre d'onde $kc=0$, comme on peut le voir sur la figure 1. La valeur critique du nombre de Reynolds est représentée sur la figure 2 pour la gamme de paramètre considérée dans cette étude. Le point de coordonnées (kc, Rc) correspond au seuil de l'instabilité.

La figure 1 montre des courbes de stabilité marginale dans le plan nombre d'onde k et nombre de Reynolds R . L'influence du rapport des épaisseurs d est illustrée sur la figure 1 gauche, on observe l'augmentation de la zone instable lorsque le rapport des épaisseurs d augmente. L'influence de la tension superficielle agit dans le même sens. (figure 2 de droite).

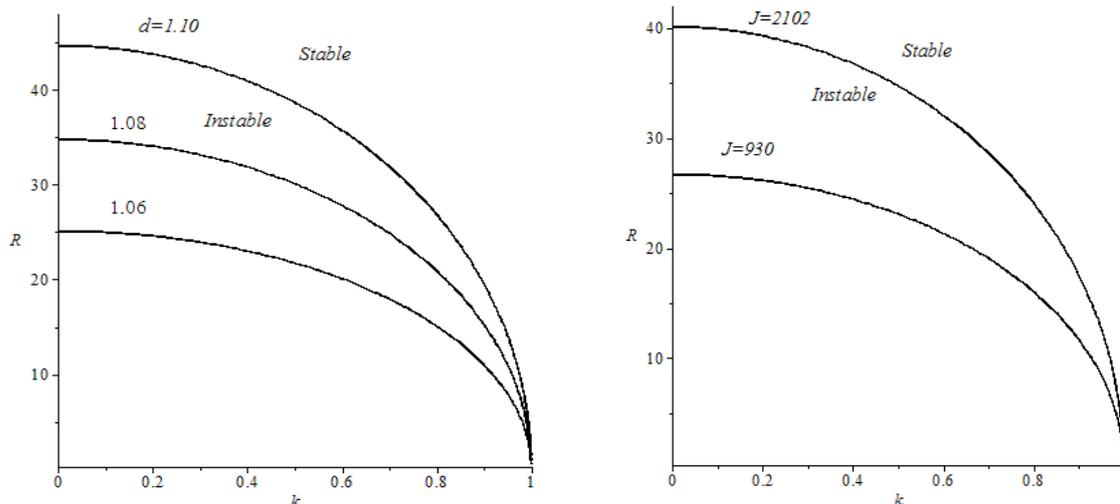


Figure 1 : Nombre de Reynolds R en fonction du nombre d'onde k pour des fluides de même densité et de viscosité dynamiques différentes .

à gauche : variation du rapport des épaisseurs ; à droite : variation de la tension superficielle.

5 Conclusion

Le problème aux valeurs propres a été résolu par une méthode numérique efficace basée sur des matrices de Riccati. De plus cette approche a l'avantage de permettre une résolution générale du problème étudié. Il a été montré que la tension superficielle et le rapport des épaisseurs jouent un rôle important sur l'instabilité capillaire. Notons que cette instabilité capillaire n'est pas observée dans le cas des écoulements de films minces sur des parois planes.

Références

- [1] C.-S. Yih, Instability due to viscosity stratification. *J. Fluid Mech.* 27 (1967) 337-352
- [2] A. Oron, S. H. Davis, S. G. Bankoff, Long-scale evolution of thin liquid films. *Rev.Mod. Phys.*, 69 (3) (1997) 931-980
- [3] M. Amaouche, N. Mehidi, N. Amatousse, An accurate modelling of thin film flows down an incline for inertia dominated regimes. *EJMB/ Fluids* 24 (2005) 49-70
- [4] F. Charru, E. John Hinch, 'Phase diagram' of interfacial instabilities in a two-layer Couette flow and mechanism of the long-wave instability, 414 (2000) 195-223
- [5] L. Preziosi, K. Chen, D.D. Joseph, Lubricated pipelining: stability of core-annular flow, *J. Fluid Mech.* 201 (1989) 323-356
- [6] C.E. Hickox, Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric pipe flow, *Phys. Fluids* 14 (1971) 251-262
- [7] N. Mehidi, N. Amatousse, Modélisation d'un écoulement coaxial en conduite circulaire de deux fluides visqueux, *C.R.Mécanique*, 337 (2009) 112-118
- [8] C. Ruyer-Quil, P. Trevelehan, F. Giorgiutti, C. Duprat and S. Kalliadasis, Modelling film flows down fibre *J. Fluid Mech.* 603 (2008) 431-462
- [9] A.Davey, On the numerical solution of difficult eigenvalue problems, *J.Comput. Phys.* 24 (1977) 331-338