

Modélisation numérique d'une fissure émanant d'entaille d'une plaque en matériau composite gradué

Sadek Gouasmi ^{*,1,2} , Mohamed Mokhtari ² , Ahmed Guessab ² ,
Abdelkader Megueni ³ , Habib Benzaama ¹ .

1 : Département de Génie Mécanique, Ecole Nationale Polytechnique, Maurice Audin Oran
31000 Algérie

2 : Laboratoire de recherche en technologie de fabrication Mécanique (LaRTFM) ENPO M.A
BP 1523 EL M'Naouar Oran, 31000 - Algérie

3 : *Laboratoire de Mécanique des Structures et des Solides (LMSS). Faculté de technologie,
Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, 22000, Algérie*

*E-mail: gouasmi_sadek@yahoo.fr ; sadek.gouasmi@enp-oran.dz

Résumé :

L'objectif de cet travail est d'étudier l'effet du gradient des propriétés des FGMs (functionally graded materials) sur le comportement en rupture d'une fissure émanant de l'entaille. En utilisant la loi exponentielle de la variation du module de Young et un coefficient de Poisson constant, l'intégrale J dépend de la direction de la graduation des matériaux constitutifs du matériau à gradient de propriété FGM. La méthode des éléments finis est utilisée pour analyser le comportement mécanique en rupture d'une plaque entaillée. Une étude paramétrique pour les paramètres mécaniques, géométriques et le rapport des constituants du FGM est analysée afin de mieux comprendre le comportement en rupture des FGMs.

Mots clefs : FGM, Entaille, Fissure, J-intégral, Méthodes des éléments finis .

1 Introduction

Les matériaux fonctionnellement gradués (FGMs) de type céramique-métal sont bien connus comme étant des matériaux dans lesquels une composition matérielle varie progressivement dans une ou plusieurs directions afin d'optimiser les propriétés mécaniques et thermiques. Ces matériaux peuvent être conçus pour réduire les contraintes résiduelles d'origine thermique et utilisées comme barrière thermique et résistent à la corrosion coté céramique, le coté métal offre une résistance mécanique à cause de la forte ténacité des métaux [1, 2]. L'étude du comportement en rupture des FGMs de type céramique-métal est compliquée en raison du gradient des propriétés mécaniques et

thermiques. Dans les matériaux FGMs de type céramique-métal, les fissures se comportent de plusieurs façons selon les conditions de variation des propriétés graduées et du chargement appliqué. L'apparition des fissures est observée dans les FGMs céramique-métal sollicités sous des chocs thermiques ou fatigue thermique [3-6]. L'amorçage de fissure est observée le long de l'interface d'un multicouches FGMs [3-7]. La rupture et l'évaluation d'une fissure dans les structures en FGM, nécessitent des connaissances du comportement en rupture de ces matériaux. La plupart des études sur la rupture des FGMs, a mis l'accent sur le comportement élastique linéaire de ces matériaux. Erdogan [8] a étudié divers problèmes de rupture des FGMs et a présenté un certain nombre de solutions du facteur d'intensité des contraintes (FIC). Plusieurs améliorations sont proposées. Jin et Noda [5] ont montré que la singularité à la tête de fissure est l'inverse de la racine carrée du rayon r dans les FGMs, pour une variation par couches de module de Youngs et de coefficient de Poisson, qui est une extension des résultats d'Eischens [9] pour un matériau nonhomogène. Honein et Herrmann [10] ont proposé certains chemins d'intégration indépendants des intégrales J pour un matériau non-homogène avec une variation exponentielle où une fonction de puissance du module de cisaillement dans l'espace. Gu et Asaro [11], ont choisi une zone assez proche du front de fissure afin de considérer le matériau homogène dans cette zone et ainsi se ramener à un calcul classique de l'intégrale J , or, cela nécessite une discrétisation spéciale très fine proche du front de fissure et des calculs très volumineux. Becker et al [12], a étudié les déviations des fissures dans les FGMs. Jin et Batra [12], et Marur Tippur [14], et Anlas et al [15], ont étudié le problème K -dominant dans les FGMs.

A l'inverse des études relativement approfondies sur le comportement élastique linéaire de FGM fissurés, seulement quelques investigations étudient la rupture élastoplastique des FGMs [16]. Kim et Suresh [17] ont étudié le renforcement de tête de fissure par une couche de matériau gradué entre deux couches de matériaux homogènes. Jin et al [18,19] emploie un modèle de zone cohésive pour étudier la propagation de fissure par rapport à la charge appliquée pour un spécimen TiB/Ti. Ils ont examiné en détail la procédure d'étalonnage pour les paramètres classés dans leur modèle. E. Martinez-Panéda et al [20] ont analysé numériquement la fracture quasi-statique dans les matériaux à gradient de propriété. S Gouasmi et Al [22,23] ont étudié l'effet du gradient des propriétés mécaniques sur la réduction des concentration des contraintes autour d'une entaille.

Le travail proposé dans cette investigation a pour objectif l'étude et l'analyse tridimensionnelles du comportement en rupture d'une plaque en FGMs comportant une fissure émanant d'une entaille latérale semi-circulaire, la plaque est sollicitée en traction. Cette étude est basée sur le concept de l'intégrale J .

Cette dernière est évaluée en utilisant le code de calcul ABAQUS exploitant la méthode des éléments finis. En utilisant la loi exponentielle de la variation du module de Young et un coefficient de Poisson supposé constant, l'intégrale J en fond de fissure dépend de la direction de la graduation des matériaux constitutifs et de la taille de fissure. Une étude paramétrique pour plusieurs paramètres mécaniques et géométriques tels que l'épaisseur de la plaque et le rapport des composants de cette dernière a permis d'évaluer l'intégrale J .

2 Modèle géométrique de la plaque comportant une fissure émanant de l'entaille

Un modèle de plaque FGM $20 \times 40 \text{ mm}^2$ et d'épaisseur $t = 2 \text{ mm}$ comporte une fissure débouchant de longueur c émanant d'une entaille semi-circulaire de rayon a , soumise à une traction uniaxiale égale à $\sigma_0 = 100 \text{ MPa}$. Les caractéristiques géométriques de la plaque sont :

Largeur $W = 20 \text{ mm}$ et hauteur $H = 2W$.

L'origine des coordonnées coïncide avec le centre de l'entaille. Pour des raisons de symétrie du chargement et de la géométrie, la moitié de la plaque a été analysée (fig. 1). Les conditions aux limites du modèle ont été imposées en restreignant les déplacements en y ($U_2 = 0$) à $y = 0$ et des rotations autour des axes OX et OZ ($UR_3 = 0$ et $UR_2 = 0$) à $y = 0$ dans le plan de symétrie Oxz du modèle complet. Les propriétés des différents constituants de la plaque FGM (métal, céramique) utilisés sont indiqués dans le tableau 1. La variation des propriétés est exprimée par la loi exponentielle E-FGM (Equ.1, fig.2) :

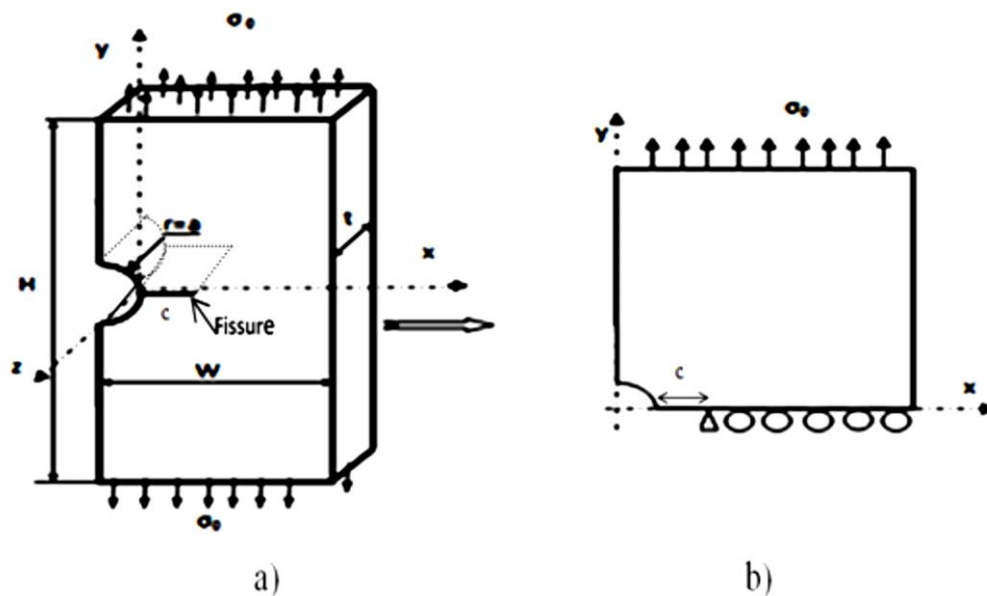


Figure 1 : modèle géométrique de la plaque avec une entaille latérale circulaire, a) la plaque entière, b) la moitié de la plaque

Tableau1: propriétés des constituants du matériau FGM

Nature	Module de Young (GPa)	Coefficient. de Poisson
Al	72	0.3
Ti	110	0.3
Cu	124	0.3
Ni	215	0.3
TiB	375	0.3

$$E(\xi) = E_2 e^{\beta \xi} \quad (1)$$

Avec : $\beta = \frac{1}{L} \log \left(\frac{E_1}{E_2} \right)$

Où $E_2 = E(0)$ est le module de Young du métal et E_1 Le module de Young de céramique.
 Différentes configurations du matériau à gradient de propriété peuvent être obtenues. Selon les directions désirées (fig.3) :

- $\xi = x$ et $L=W$ pour x-FGM (fig.3.a).
- $\xi = y$ et $L=W$ pour y-FGM (fig.3.b).
- $\xi = \sqrt{x^2 + y^2} - a$ et $L=W\sqrt{2}$ pour r-FGM (fig.3c).
- $\xi = z$ et $L=W$ pour y-FGM (fig.3.d).

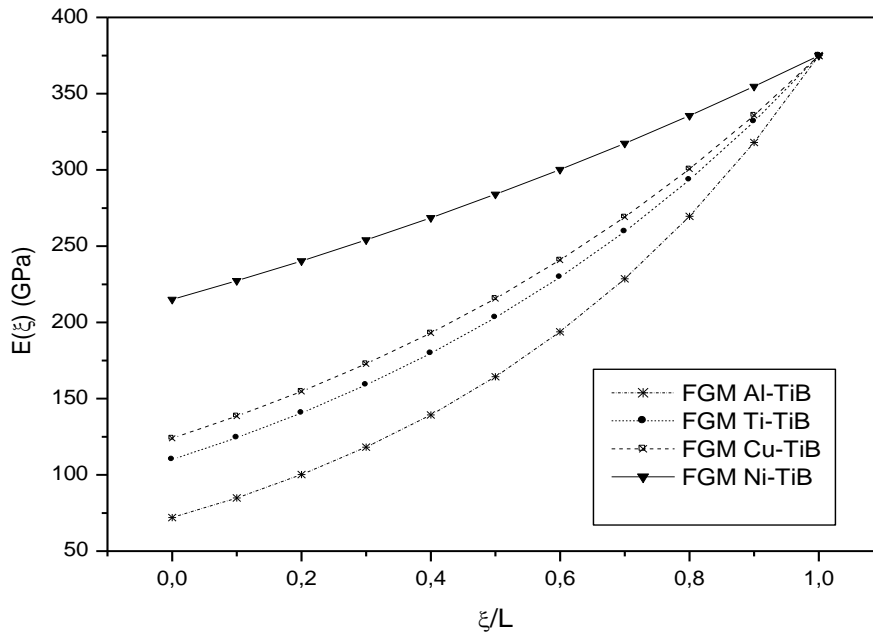


Figure 2 : variation exponentielle du module de Young pour différentes combinaisons de constituants

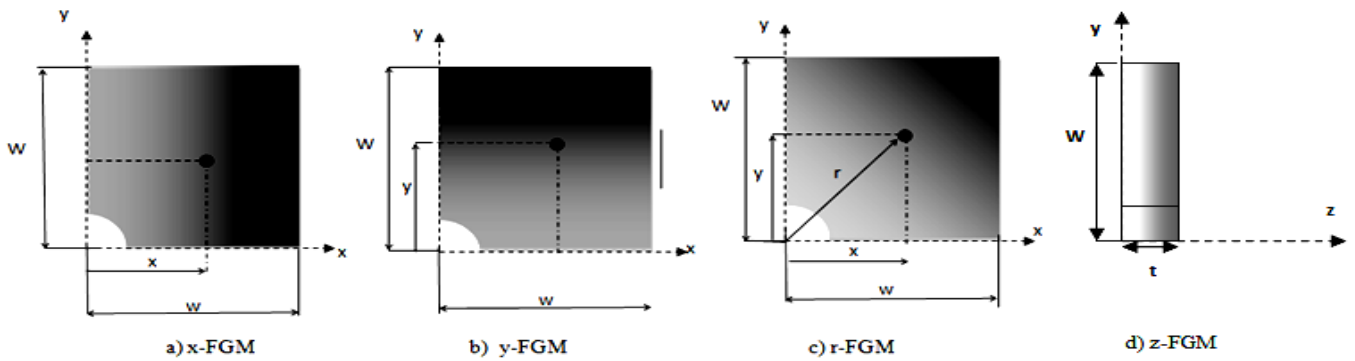


Figure 3 : direction de variation du module de Young de l'FGM
 a) variation x-FGM, b) variation y-FGM, c) r-FGM, d) variation z-FGM

3 Modélisation par éléments finis des plaques en FGMs fissurées.

La résolution par voie analytique sur n'importe quelle structure est généralement difficile. On doit donc faire appel à des méthodes approchées dont la formulation demande l'utilisation de l'outil informatique. La méthode des éléments finis, est l'une de ces méthodes approchées, elle est l'une des techniques approximatives pour l'analyse des structures en FGMs, bi et tridimensionnelle grâce à l'évolution de l'informatique. Elle fut un outil de travail efficace pour l'analyse des problèmes mécaniques afin de connaître le comportement statique ou dynamique des systèmes et la répartition des contraintes et des déformations dans les solides. Les problèmes traités par la méthode des éléments finis sont de l'ordre de difficulté supérieure, ce qui nécessite une discrétisation de la structure en éléments finis, et cela, selon la précision et le type du problème traité.

La déclaration du gradient de propriétés peut être faite, avec l'utilisation de deux sousprogrammes UMAT ou USDFLD, car les deux sont appelées pour décrire la variation des propriétés matérielles du matériau dans le sens désiré. Pour analyser et calculer l'intégrale J dans notre travail, le gradient des propriétés est mis en place par un sous-programme USDFLD où les propriétés élastiques des matériaux sont définies comme une fonction de la variable du domaine (fig. 5) et sa variation tout au long du sens de graduation voulu, pour modéliser la variation du module de Young dans le sens désiré. La subroutine USDFLD a été utilisé (Annexe 1) [21] est programmé dans un sous-programme USDFLD. Le sous-programme est écrit en langage FORTRAN et fonctionne en parallèle avec Abaqus[24]. Il nous permet de varier la variable utilisée par le solveur Abaqus. Le sous-programme a été programmé de sorte que les domaines soient établis avec les propriétés matérielles appropriées, notamment le module de Young.

Un modèle symétrique de demi-plaque 20 x 20 mm² et d'épaisseur $t=2$ mm comporte une fissure de taille c émanant d'une entaille semi-circulaire de rayon a (fig. 1). Le maillage a été raffiné autour de la tête de fissure (fig 4.a, fig.4.b), il comprend des éléments quadratiques à 20 noeuds C3D20R.

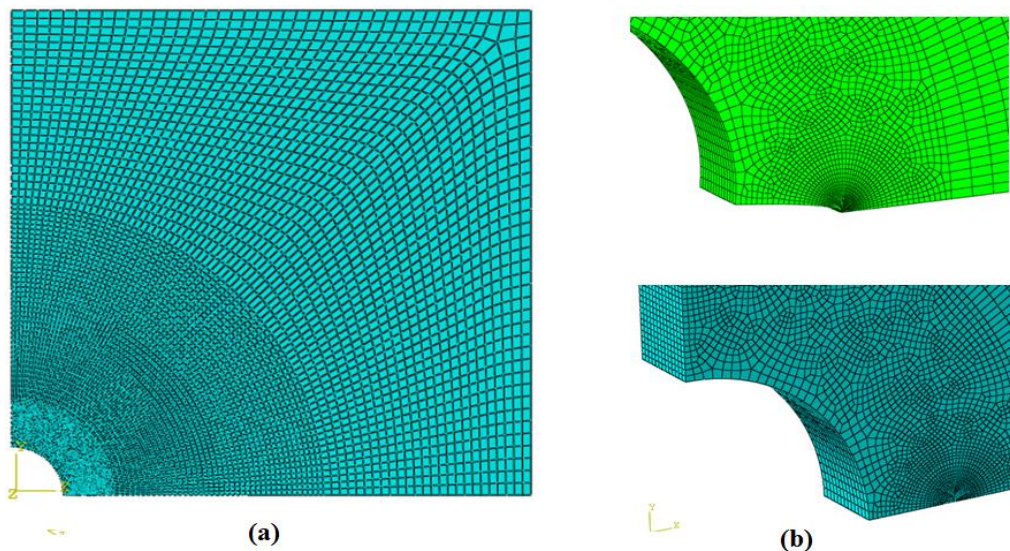


Figure.4: Maillages de la plaque (a) et du voisinage de la fissure (b)

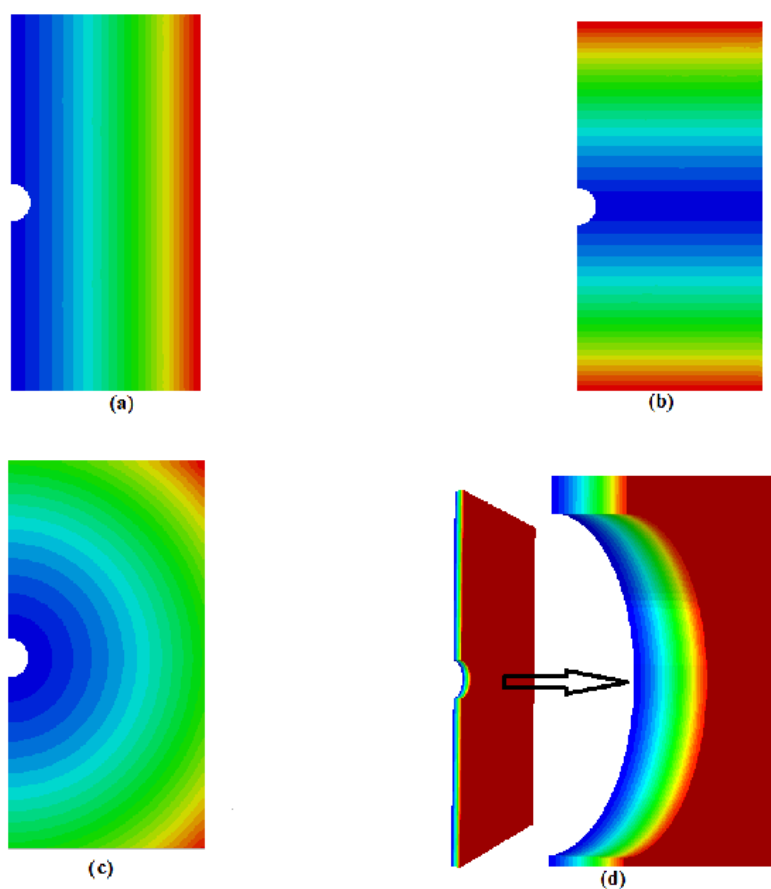


Figure 5 : Contour de la fonction de variation du domaine (E)
a) variation x-FGM, b) variation y-FGM, c) variation r-FGM, d) variation z-FGM

4 Résultats et analyses

4.1 Effet du type de distribution sur l'intégrale J

Les résultats obtenus numériquement par la méthode des éléments finis sont représentés dans la figure 6. Cette dernière illustre la variation de l'intégrale J le long du front de fissure de taille normalisée $b/w = 0.15$ et d'épaisseur de la plaque normalisée $t/w=0.1$, pour différentes distributions du FGM.

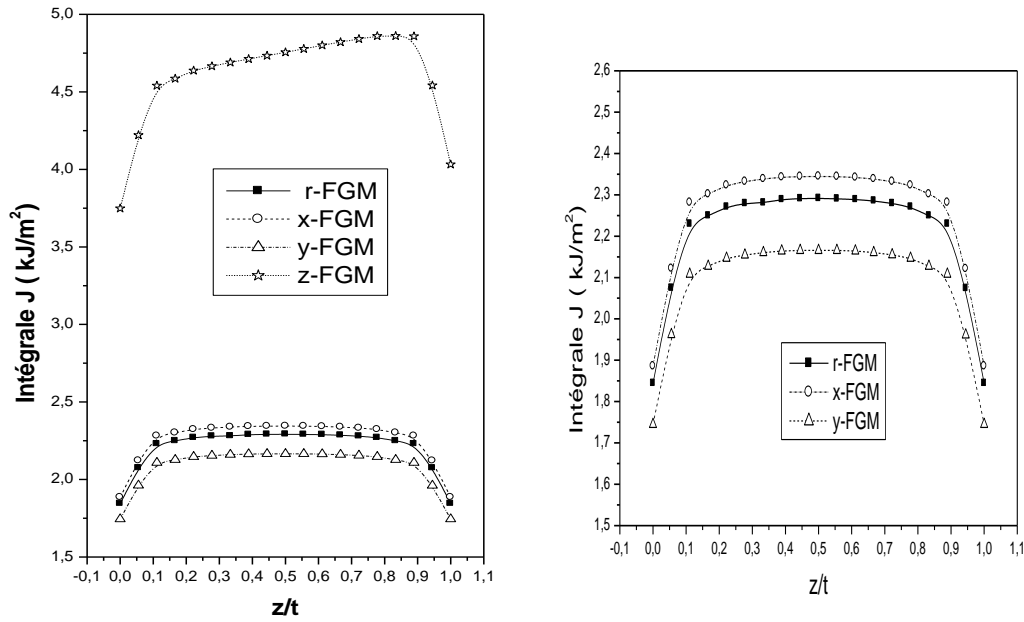


Figure 6: Variation de l'intégrale J le long du front de fissure pour $c/w=0.15$ pour différents types de distributions FGMs Ti-TiB pour $t=2\text{mm}$ et $a/w=0.1$

Nous constatons que la valeur maximale de l'intégrale J est obtenue pour une distribution des propriétés matérielles suivant l'axe z (z-FGM) proche de la zone de forte fraction volumique de la céramique $J=4.88 \text{ kJ/m}^2$. Ceci est dû essentiellement à la rigidité de la céramique qui peut provoquer la rupture brutale du matériau [3-6]. Les autres types de distributions présentent un maximum au milieu du front de fissure et des valeurs minimales aux bords. La valeur maximale est obtenue pour une distribution x-FGM de l'ordre de 2.34 kJ/m^2 et la valeur minimale pour une distribution y-FGM 2.16 kJ/m^2 tandis que l'intégrale J pour une distribution r-FGM présente un profil intermédiaire tendant vers le profil x-FGM.

La figure 7, montre la variation du maximum de l'intégrale J en fonction de la longueur de la fissure normalisée c/w pour différents types de FGMs. Nous observons sur la figure 7 que l'effet de la direction de distribution apparaît à partir d'une longueur de fissure normalisée égale à $c/w=0.15$. Pour les faibles tailles de fissure, le paramètre J est presque constant, sauf pour le cas de la distribution suivant z (z-FGM) où l'intégrale J est maximale (fig.6).

On remarque que la direction y-FGM offre de faibles valeurs d'intégrale J par rapport aux deux autres types (x-FGM, r-FGM), ce phénomène est dû à la présence de fissure dans un domaine où la phase métallique est dominante. En effet, nous constatons un écart des valeurs de l'intégrale J, de l'ordre de 40 % entre x-FGM et y-FGM. On remarque également que le profil de variation de l'intégrale J en fonction de c/w pour un r-FGM est intermédiaire et proche de celui de x-FGM.

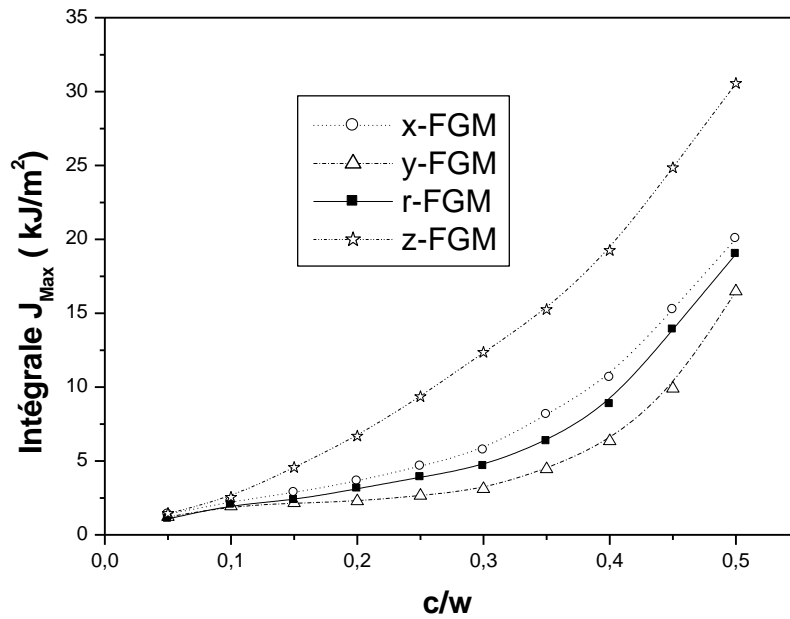


Figure 7: Variation de l'intégrale J maximale en fonction de la longueur de fissure normalisée c/w ($a/w=0.1$) et ($t/w=0.1$) FGM Ti-TiB

4.2 Effet de l'épaisseur de la plaque sur l'intégrale J

La figure 8 illustre l'évolution de l'intégrale J en fonction de l'épaisseur normalisée (t/w) pour différentes directions de FGM. Les résultats illustrés sur la figure 8 montrent que l'intégrale J dépend non seulement de la longueur de la fissure mais aussi de l'épaisseur t . En effet, l'augmentation de l'épaisseur t entraîne une diminution du paramètre J. Cet effet est plus marqué lorsque l'épaisseur normalisée dépasse $t/w=0.55$ pour z-FGM et est de l'ordre de 60% pour une longueur de fissure normalisée $c/w=0.15$.

Cet intégrale diminue aussi pour les autres configurations du FGM, et on note une diminution de l'ordre de 50% presque égale pour une épaisseur normalisée supérieure à 0.55. Par conséquent l'augmentation de l'épaisseur suivant la direction du front de fissure, joue un rôle déterminant sur la résistance à la rupture des matériaux fonctionnellement gradués.

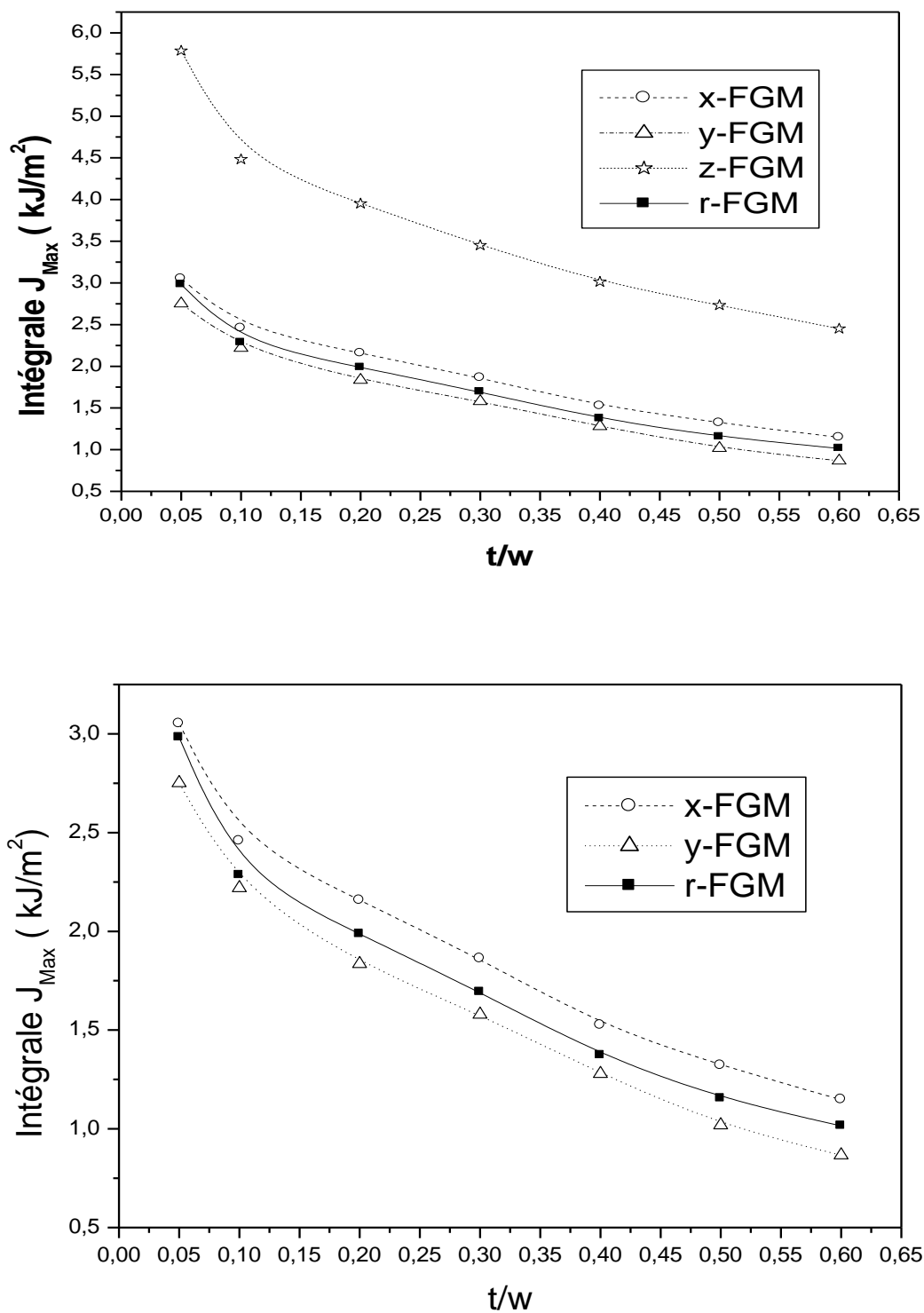


Figure 8: Variation de l'intégrale J maximale en fonction de l'épaisseur normalisé t/w , ($c/w=0.15$) ($a/w=0.1$) FGM Ti-TiB

4.3 Effet de type de distribution y-FGM sur l'intégrale J

Dans un premier cas, on considère que l'origine du repère est au centre de l'entaille (fig 9.a), la variation des propriétés du FGM Ti-TiB est parallèle à l'axe x. Dans le second cas, l'origine du repère est déplacée du centre de l'entaille vers l'extrémité basse de la plaque (fig 9. b) pour $\theta=0^\circ$. Les autres cas sont obtenues pour un angle θ arbitraire (fig 9. c), la direction du FGM est inclinée d'un angle θ autour de l'axe z. Cette analyse porte sur un FGM de même dimensions et même chargement mécanique, que le FGM étudié précédemment. La variation est exprimée par la loi exponentielle E-FGM (équ.IV.1) sauf pour L égale à :

$\xi = L$ avec $L = W$ pour y-FGM (fig 9.a).

$\xi = L$ avec $L = 2W$ pour y-FGM (fig 9.b).

$\xi = L$ avec $L = W(2\cos\theta + \sin\theta)$ pour FGM (θ) ((fig 9.c).

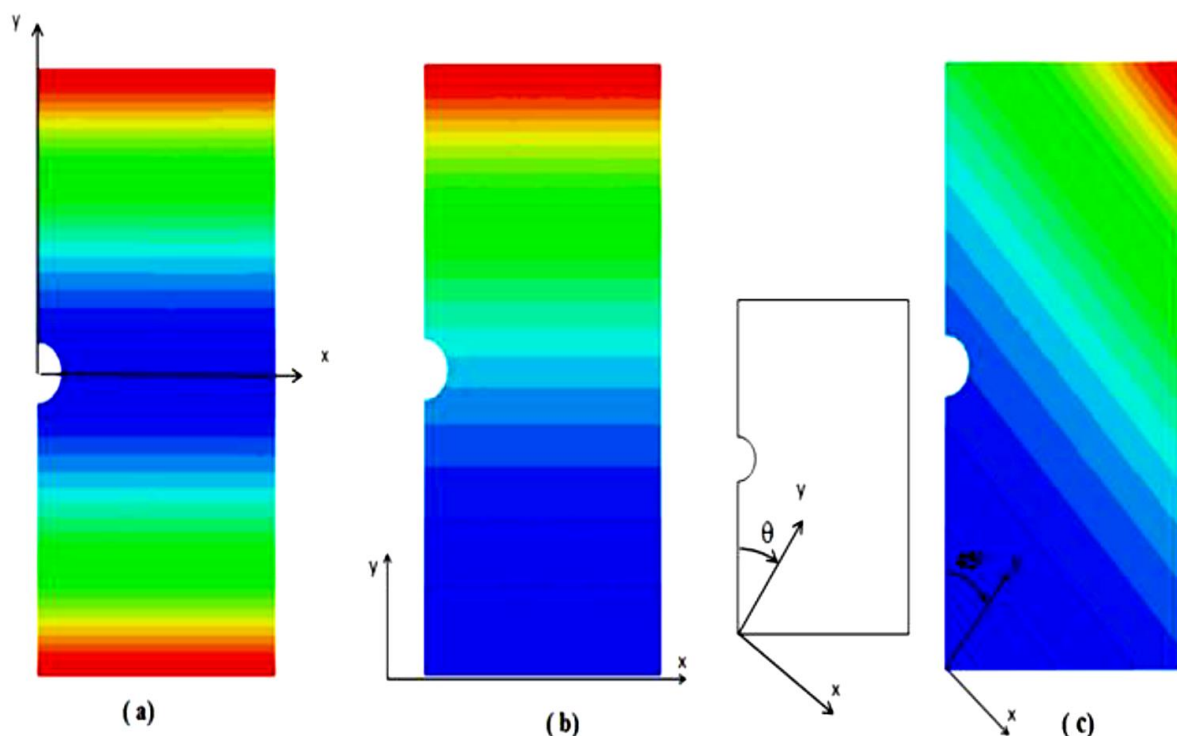


Figure 9: Représentation du contour FGM. a) l'origine du repère coïncide avec le centre de l'entaille, b) distribution y-FGM, c) Inclinaison de l'axe y d'un angle θ

La figure 10 montre la variation de l'intégrale J en fonction de la taille de fissure normalisée pour un y-FGM symétrique (fig 9.a), pour un y-FGM (fig 9.b) et pour un FGM de direction y inclinée de angle $\theta=45^\circ$ (fig 9.c).

Nos résultats montrent que l'intégrale J augmente avec l'augmentation de la taille de fissure pour les différents cas. la variation de J est significative à partir de 30% de la largeur de la plaque. Les valeurs les plus faibles sont obtenues pour un y-FGM symétrique avec un gain maximal de l'ordre de 25 %. La figure 11 représente la variation de l'intégrale J en fonction l'inclinaison de distribution θ du FGM pour une taille de fissure normalisée. J diminue progressivement avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison. La valeur minimale de J est

obtenue pour $\theta=\pi/2$, ce qui correspond à une distribution x-FGM. Le gain obtenu est alors estimé à 45%.

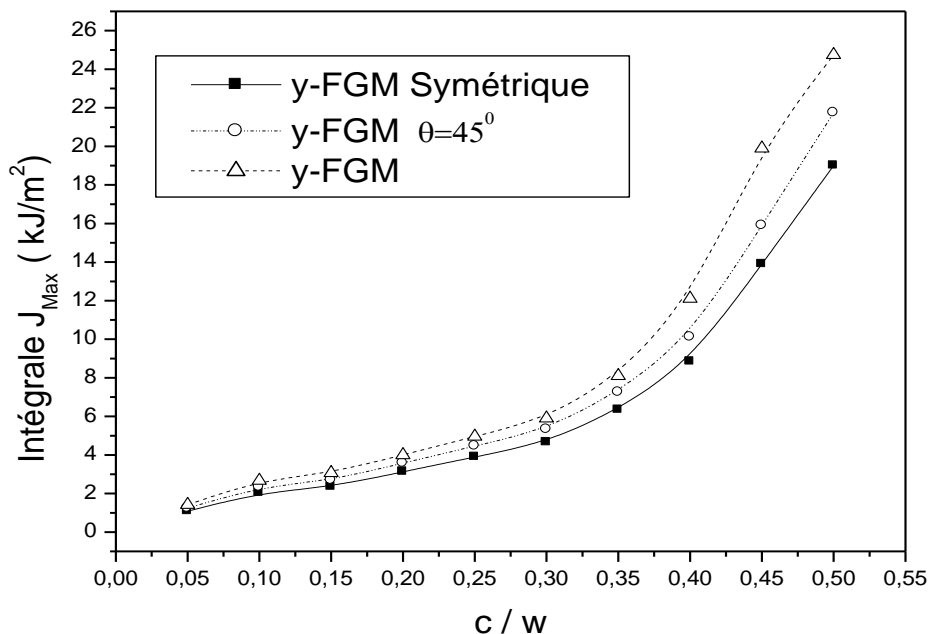


Figure 10: Variation de l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure normalisée ($a/w=0.1$) ($t/w=0.1$) FGM Ti-TiB

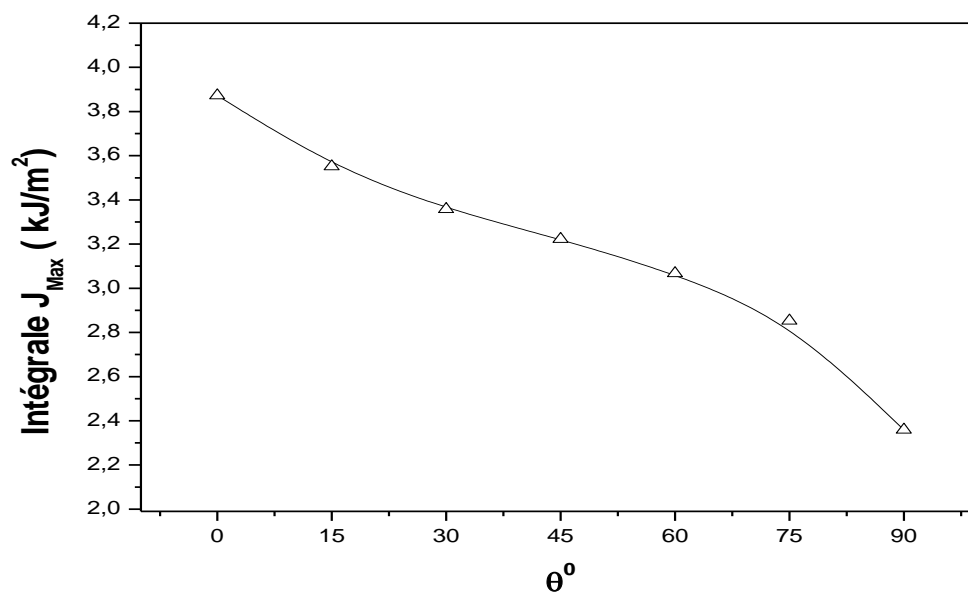


Figure 11: Variation de l'intégrale J en fonction de l'angle de rotation θ^0 pour une fissure de taille normalisée $c/w=0.15$ $t/w=0.1$ ($a/w=0.1$) FGM Ti-TiB

4.4 Effet du rayon de l'entaille sur l'intégrale J

La figure 12 montre la variation du maximum de l'intégral J d'un r-FGM du type Ti-TiB en fonction de la taille normalisée d'une fissure pour plusieurs rayons normalisés de l'entaille a/w . J augmente avec l'augmentation de la longueur de la fissure. L'augmentation est d'autant plus sensible que le rayon de l'entaille est grand. La variation de J est très faible lorsqu'il n'y a pas d'entaille. Pour une fissure normalisée de 0.3, la valeur de J passe de 6 kJ/m² à 34 kJ/m², lorsque le rayon normalisé passe de 0.1 à 0.5 soit une perte relative de J d'environ 28 kJ/m².

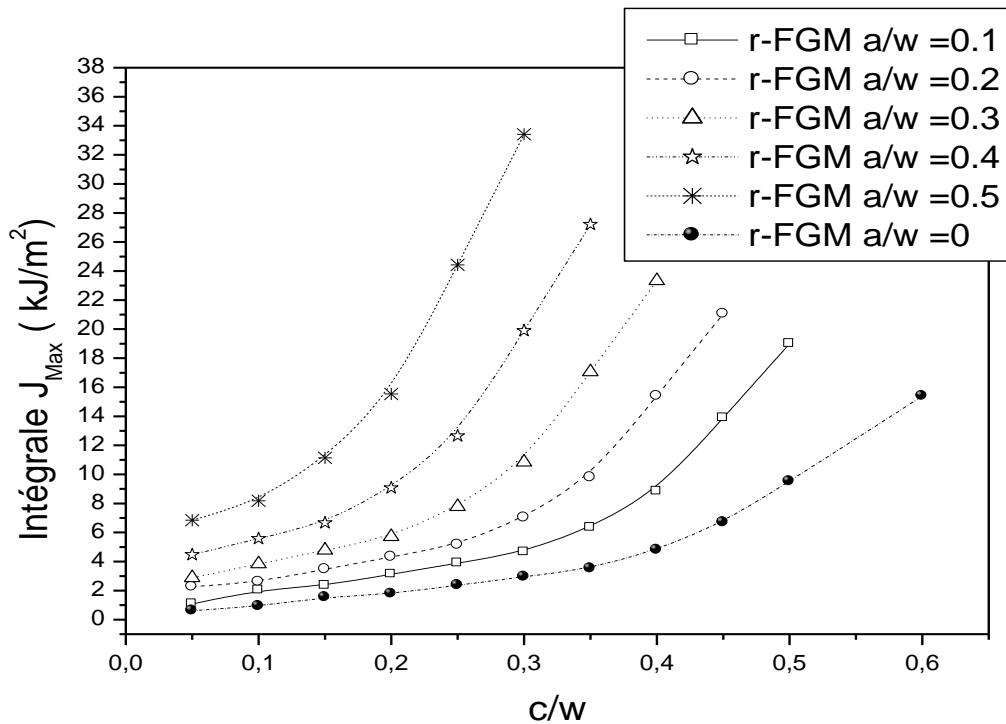


Figure 12: Variation de l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure normalisée pour $t/w=0.1$ d'un r-FGM Ti-TiB

4.5 Effet du module de Young sur l'intégrale J

La figure 13 montre la variation de J d'un r-FGM de différents types combinaisons Métal-céramique (FGMs) en fonction de la taille normalisée d'une fissure. Les différents types de FGM présentent le même profil. Le plus favorable est celui du type Al-TiB. Pour une fissure normalisée de 50%, le gain obtenu de J pour Al-TiB par rapport à celui de Ni-TiB est d'environ 26 %.

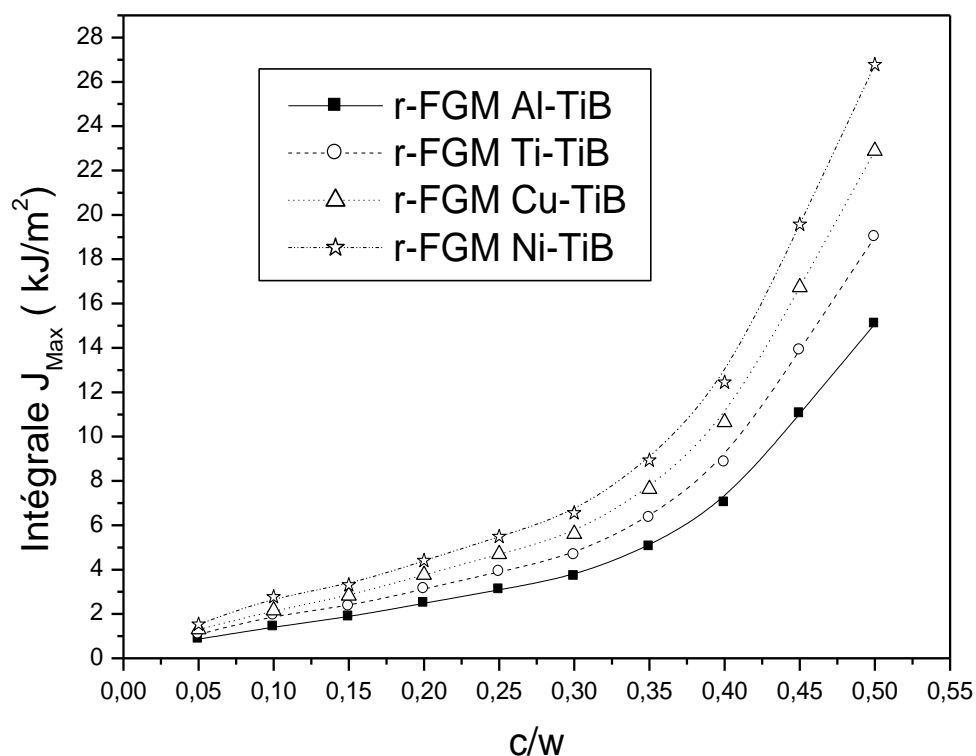


Figure 13: Variation de l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure normalisée ($a/w=0.1$) ($t/w=0.1$), pour différents combinaisons Métaux-TiB

4.6 Effet du chargement sur l'intégrale J

La figure 14 met naturellement l'effet du chargement axial de la plaque sur l'intégrale J . Cette dernière est d'autant plus grande que la valeur du chargement l'est. Pour une fissure normalisée de 50%, l'intégrale J passe de 14 kJ/m² à 37 kJ/m² lorsque la charge appliquée est multipliée par quatre.

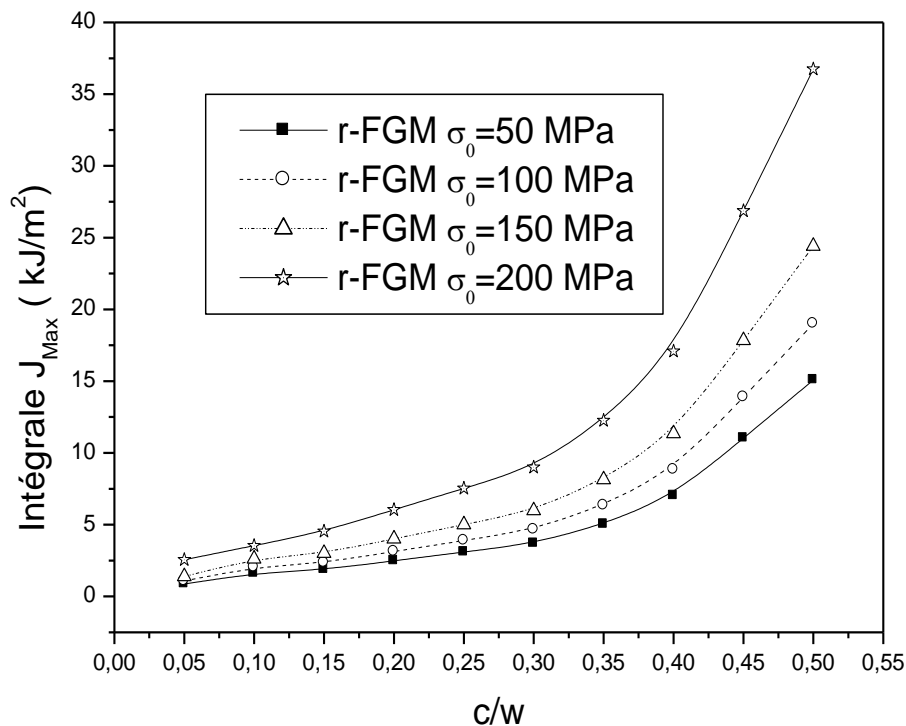


Figure 14: Variation de l'intégrale J en fonction de la longueur de fissure normalisée ($a/w=0.1$) ($t/w=0.1$) pour différents chargement appliqué

Conclusion

Le travail présenté dans cette analyse a pour objectif de l'étude par la méthode des éléments finis de l'intensité du paramètre de rupture L'intégrale J en fond d'une fissure émanant d'entaille semi-circulaire latérale dans un plaque en matériaux fonctionnellement gradué de type métal-céramique (Ti-TiB), prenant en compte les effets des directions de distribution des propriétés mécaniques sur L'intégrale J.. Les résultats obtenus numériquement par la MEF permettent de tirer les conclusions suivantes :

✓ L'intégrale J en fond de fissure émanant d'une entaille dépend, à la fois de la taille de la fissure et du type de direction du FGM dans la plaque. On note que y-FGM symétrique offre une meilleure ténacité comparativement aux autres distributions. La distribution des propriétés matérielles suivant l'axe z pour des faibles épaisseurs présente des valeurs maximales de l'intégrale J, d'écart de 4 kJ/m² avec celle de la distribution y-symétrique et conduit à la rupture brutale du matériau.

✓ L'augmentation de l'épaisseur t entraîne une diminution du paramètre J. Cette diminution est très significative lorsque l'épaisseur normalisée dépasse $t/w=0.55$ pour z-FGM et est de l'ordre de 60% pour une longueur de fissure normalisé $c/w=0.15$.

✓ L'inclinaison de la distribution $y(\theta)$ du y-FGM pour une taille de fissure normalisée entraîne une diminution de l'intégrale J. Cette diminution est progressive avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison.

✓ L'augmentation du rayon de l'entaille entraîne une croissance rapide du paramètre J.

✓ La valeur de l'intégrale J (caractéristique de la propagation de la fissure dans les FGMs) est étroitement liée au module de Young du métal. On retient que pour des taux faibles des modules de Young l'intégrale J est minimale.

Annexe 1 Sous-programme USDFLD [21]

```

*****
**  USDFLD FOR xFGM                *****
*****
**USER SUBROUTINE

      SUBROUTINE USDFLD (FIELD, STATEV, PNEWDT, DIRECT, T, CELENT,
1  TIME, DTIME, CMNAME, ORNAME, NFIELD, NSTATV, NOEL, NPT, LAYER,
2  KSPT, KSTEP, KINC, NDI, NSHR, COORD, JMAC, JMATYP, MATLAYO, LACCFLA)
C
      INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
      CHARACTER*80 CMNAME, ORNAME
      CHARACTER*3  FLGRAY (15)
      DIMENSION FIELD (NFIELD), STATEV (NSTATV), DIRECT (3, 3),
1  T (3, 3), TIME (2)
      DIMENSION ARRAY (15), JARRAY (15), JMAC (*), JMATYP (*), COORD (*)
C  DIMENSION INTV (1), REALV (1)

      X=COORD (1)
      Y=COORD (2)
      Z=COORD (3)
      R= (((X)**2)+((Y)**2))**0.5)
      FIELD (1)=exp ((1.22/150)* (X))

      RETURN
      END

```

Références

- [1] Takahashi H, Hashida T. "Development of an evaluation method of functionally gradient materials". *JSME Int. J., Ser. A, Vol.33*, pp 281-287, 1990.
- [2] Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H., Kawasaki A., and Ford R.G. *Functionally Graded Materials: Design, Processing and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [3] Kawasaki A., Watanabe R., Yuuki M., Nakanishi Y. and Onabe H. Effects of microstructure on thermal shock cracking of functionally graded thermal barrier coatings studied by burner heating test. *Materials Trans. JIM, Vol.37*, pp 788-795, 1996.
- [4] Kawasaki A. and Watanabe R. Thermal fracture behavior of metal/ceramic functionally graded materials. *Eng. Frac. Mech., Vol.69*, pp 1713-1728, 2002.
- [5] Rangaraj S. and Kokini K. Estimating the fracture resistance of functionally graded thermal barrier coatings from thermal shock tests. *Surf. Coat. Technol., Vol. 173*, pp 201-212, 2003.
- [6] Bahr H.A., Balke H., Fett T., Hofinger I., Kirchoff G., Munz D., Neubrand A., Semenov A.S., Weiss H.J. and Yang Y.Y. Cracks in functionally graded materials. *Mater. Sci. Eng., Vol. A362*, pp 2-16, 2003.
- [7] Tohgo K. and Hadano A. Characterization of Fracture Process in Ceramic-Metal Functionally Graded Material under Three-Point-Bending. *JSME Int. J., Ser. A, Vol.49*, pp 321-330, 2006.
- [8] Erdogan F. Fracture mechanics of functionally graded materials. *Compos Engng 1995;5:753-70*.
- [9] Jin ZH, Noda N. Crack-tip singular fields in nonhomogeneous materials. *ASME J Appl Mech 1994;61:738-40*.
- [10] Eischen JW. Fracture of nonhomogeneous materials. *Int J Fract 1987;34:3-22*.
- [11] Honein T, Herrmann G. Conservation laws in nonhomogeneous plane elastostatics. *J Mech Phys Solids 1997;45:789-908*.
- [12] Gu P, Asaro RJ. Crack deflection in functionally graded materials. *Int J Solids Struct 1997;34:3085-98*.
- [13] Becker Jr TL, Cannon RM, Ritchie RO. Finite crack kinking and T-stresses in functionally graded materials. *Int J Solids Struct 2001;38:5545-63*.
- [14] Jin ZH, Batra RC. Some basic fracture mechanics concepts in functionally graded materials. *JMech Phys Solids 1996;44:1221-35*.
- [15] Marur PR, Tippur HV. Numerical analysis of crack-tip fields in functionally graded materials with a crack normal to the elastic gradient. *Int J Solids Struct 2000;37:5353-70*.
- [16] Anlas G, Lambros J, Santare MH. Dominance of asymptotic crack tip fields in elastic functionally graded materials. *Int J Fract 2002;115:193-204*.
- [17] Kim AS, Suresh S. Plasticity effects on fracture normal to interfaces with homogeneous and graded compositions. *Int J Solids Struct 1997;34:3415-32*.
- [18] Jin ZH, Paulino GH, Dodds Jr RH. Cohesive fracture modeling of elastic-plastic crack growth in functionally graded materials. *Engng Fract Mech 2003;70:1885-912*.
- [19] Z.-H. Jin a, R.H. Dodds Jr. Crack growth resistance behavior of a functionally graded

material: computational studies. *Engineering Fracture Mechanics* 71 (2004) 1651–1672

[20] E. Martinez-Panéda R. Gallego. Numerical analysis of quasi-static fracture in functionally graded materials. *Int J Mech Mater Des* DOI 10.1007/s10999-014-9265-y

[21] Sadek Gouasmi. Thèse de doctorat . Modélisation numérique du comportement en rupture des structures en matériaux composites gradués. Université Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes Faculté de technologie 2016 Algérie.

[22] Sadek Gouasmi, Abdelkader Megueni, Aboubakar Seddik Bouchikhi, Kamel Zouggar, Abderahmane Sahli. On the Reduction of Stress Concentration Factor Around a Notch Using a Functionally Graded Layer *Materials Research*. 2015; 18

[23] S Gouasmi , Habib Benzaama, Abdelkader Megueni . Analyse numérique de l'effet du gradient des propriétés sur la réduction des concentrations des contraintes autour d'une entaille. 2em Séminaire Internationale de Génie Civil 2018 (SIGC2018) 21 et 22 Novembre 2018, ENP MA Oran (Algérie)

[24] BAQUS (2011); ABAQUS manual, Version 6.10, Pawtucket, R.I.