Etude numérique de l'instabilité capillaire dans l'écoulement d'un film mince sur une fibre vertical

H. DJESSAS[a], N. MEHIDI BOUAM[a], N. BOUBALOU[b], A.DJEMA[a]

a. Laboratoire de Physique Théorique, Département de Physique -Université A. Mira de Bejaia targua Ouzemour 06000, Algérie.
djessas.h@gmail.com

b. Laboratoire de Physique Théorique, Département de Physique -Université M. Mameri de Tizi Ouzou 15000, Algérie.

Résumé :

Dans la présente étude nous nous sommes intéressés à une approche pleinement numérique, en considérant un fluide newtonien visqueux s'écoulant sous l'effet de gravité le long d'une conduite cylindrique et en se limitant aux grandes longueurs d'ondes. L'écoulement est gouverné par les équations de Navier-Stokes incompressibles en prenant en considération la faible épaisseur de couche de fluide. Il s'agit d'une analyse de stabilité de la surface libre à l'aide d'une formulation de type Orr-*Sommerfeld. Cette approche aboutit numériquement au même seuil critique de la stabilité après développement asymptotique aux grandes longueurs d'ondes. Nous avons obtenu des résultats similaires à ceux trouvés dans la littérature.*

Abstract:

In this study we are interested in a fully digital approach, considering a viscous Newtonian fluid flowing under the effect of gravity, along a cylindrical pipe and being limited to long wave lengths. The flow is governed by the incompressible Navier-Stokes equations taking into account the small fluid layer thickness. This is stability analysis of the free surface using an Orr-Somerfield formulation. This approach results numerically in the same critical threshold of stability after asymptotic long wave length development. We obtained similar result to those found in the literature.

Mots clefs: Instabilité linéaire; fluide visqueux; fibre cylindrique; équation d'Orr-Sommerfeld; tension superficielle.

1 Introduction

L'écoulement des films minces des fluides newtoniens et non newtoniens dans des conduites courbes présente un grand intérêt, à causes de leurs multiples applications industrielles dans des différents domaines. Cela a suscité de nombreuses études théoriques, numériques et expérimentales [1-4] sur la stabilité de l'écoulement constitué d'une ou plusieurs couches. Une étude pionnière de Kapitza [1] expose les comportements dynamiques dans un film en écoulement sur un cylindre vertical. Dans certaines conditions, il se développe des instabilités secondaires associées à la dynamique interfaciale pouvant mener au chaos spatio-temporel. Hickox[2] a effectué une étude numérique des équations d'Orr-Sommerfeld pour des perturbations axisymétriques. Il montre que l'interface est stable si le fluide interne est minoritaire et moins visqueux. Ruyer-Quil [3] et al ont développé un modèle en utilisant la méthode des résidus pondérés qui décrit l'équation d'évolution de l'interface et du débit local. La résolution du problème de la stabilité linéaire a été réalisée par Lin et Liu [4] et ont donné une condition nécessaire à la stabilité de la surface libre en termes du nombre de Reynolds, du nombre d'onde et du nombre de Weber. L'objectif de notre travail et d'étudier et d'analyser la stabilité linéaire d'un fluide visqueux et newtonien s'écoulant sous l'effet de gravité à l'extérieur d'une fibre cylindrique à l'aide d'une formulation de type Orr-Sommerfeld. L'équation d'Orr-Sommerfeld est une équation linéaire différentielle de 4ème ordre aux valeurs propres ; on a choisi de résoudre ce problème par une approche numérique basée sur les matrices Riccati [6].

2 Formulation du problème

Pour décrire la stabilité, on considère un écoulement sous l'effet de gravité d'un fluide à l'extérieur d'une fibre cylindrique, de section circulaire de rayon R_c.Soit x la coordonnée dans le sens de l'écoulement et y la coordonnée normale, de telle sorte que $y=0$ définit la surface du cylindre. Le comportement du fluide est régi par les équations de Navier-Stokes et de la continuité. Le fluide est considéré newtonien ,visqueux et incompressible, de densité ρ et de viscosité dynamique µ. L'écoulement est bidimensionnel et axisymétrique. Les équations de la conservation de la quantité de mouvement dimensionnées et de la masse sont :

$$\rho\left(\frac{\partial U}{\partial t}+U.\nabla.\mathrm{U}\right)=div\tau+\rho g \ , \qquad \nabla.\mathrm{U}=0 \qquad (1)$$

Où $U=(u,v)$ désigne le champ de vitesse, τ est le tenseur des contraintes et g l'accélération de la pesanteur. Pour résoudre le système d'équations **(1),** il faut rajouter les conditions aux limites qui sont :

L'adhérence à la paroi : $u=v=0$ en $y=0$ (2)

Condition cinématique : $v=h_t+uh_x$ à la surface libre : $y=h(x,t)$ (3)

Continuité des contraintes tangentielles : $\left[\mathrm{t}.\left(\tau.\mathrm{n}\right)\right]=0$ (4)

Continuité des contraintes tangentielles : $\left[n\left(\tau.\mathrm{n}\right)\right]=\sigma\left(\nabla.\mathrm{n}\right)$ (5)

Où σ est la tension superficielle, n et t sont, respectivement, les vecteurs unitaires normal et tangentiel.

La solution stationnaire des équations (1) -(5) qui est l'écoulement de base, nous permet de choisir les grandeurs caractéristiques pour l'adimensionnement des équations du problème. En utilisant la vitesse moyenne u_N de l'écoulement laminaire établi, λ la longueur d'onde suivant la direction de l'écoulement et h_N l'épaisseur uniforme du film comme échelles de vitesse et de longueur respectivement. L'écoulement de base adimensionné est donné par :

$$U_{ad} = \frac{2(\eta+1)^2 \ln\left(\frac{y}{\eta}\right) - y^2 + \eta^2}{2(\eta+1)^2 \ln\left(\frac{\eta+1}{\eta}\right) + (\eta+1)^2 + \eta^2}$$

L'écriture des équations adimensionnées fait apparaitre des nombres sans dimension comme le nombre de Reynolds $R_e = \frac{u_N h_N}{\nu}$, le nombre de weber $w_e = \frac{\sigma}{\rho h_N u_N^2}$ et la courbure $\eta = \frac{R_c}{h_N}$.

L'écoulement de base sera perturbé par une perturbation d'amplitude infinitésimale et périodique suivant la direction de l'écoulement x. Il est ensuite loisible de linéariser les équations ainsi obtenues. L'écoulement étant bidimensionnel et incompressible, on introduit la fonction du courant, afin de reformuler le problème en une seule équation. L'équation d'Orr-Sommerfeld est donnée par :

$$\phi'''' - \frac{2}{\eta+y}\phi''' - 2k^2\phi'' + \frac{3}{(\eta+y)^2}\phi'' + R_e cki\phi'' - \frac{3}{(\eta+y)^3}\phi' + \frac{2k^2}{\eta+y}\phi' - \frac{ikR_e c}{\eta+y}\phi' + k^4\phi - ik^3 cR_e\phi =$$
$$ikR_e u\phi'' - \frac{ikR_e u}{\eta+y}\phi' - ikR_e u''\phi + \frac{ikR_e u'}{\eta+y}\phi - ik^3 R_e u\phi \tag{6}$$

A l'équation (6) sont adjointes les conditions aux limites :

L'adhérence à la paroi :

$$\phi'(y) = 0 \qquad \text{en } y = 0 \tag{7}$$

$$\phi(y) = 0 \qquad \text{en } y = 0 \tag{8}$$

Condition tangentielle :

$$\left(\frac{u''}{u-c} - k^2\right)\phi + \frac{1}{(1+\eta)}\phi' - \phi'' = 0 \qquad \text{en} \quad y = 1 \tag{9}$$

Condition normale :

$$\phi''' - \frac{1}{1+\eta}\phi'' + \frac{1}{(1+\eta)^2}\phi' - 3k^2\phi + ikR_e(c-u)\phi' + \frac{2k^2}{1+\eta}\phi + \frac{ikR_e W_e}{c-u}\left(\frac{1}{(1+\eta)^2} - k^2\right)\phi = 0 \qquad \text{en} \quad y = 1 \tag{10}$$

La méthode utilisée pour résoudre numériquement ce problème aux valeurs propres est celle de Riccati qui a été donnée initialement par Scott [5]. Davey [6] a montré son efficacité dans le cas de la résolution de l'écoulement de Poiseuille. L'idée de base de cette méthode est de transformer le problème linéaire aux valeurs propres en un problème non linéaire avec conditions initiales.

3 Résultats et conclusion

On étudie la stabilité temporelle vis-à-vis d'une perturbation d'un nombre d'onde k réel et ω complexe. Les résultats sont présentés sous forme de diagramme de stabilité marginale dans le plan nombre de Reynolds et nombre d'onde. Les figures (1) et (2) montrent que l'écart entre les courbes obtenues par la méthode numérique et celle trouvée par un développement asymptotique aux grandes ondes devient important quand le nombre de Reynolds augmente. Le nombre d'onde critique d'apparition de l'instabilité est obtenu de façon exacte.

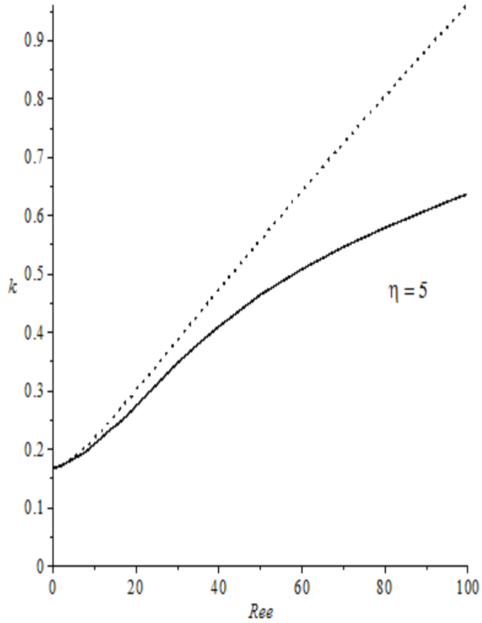

Figure (1)

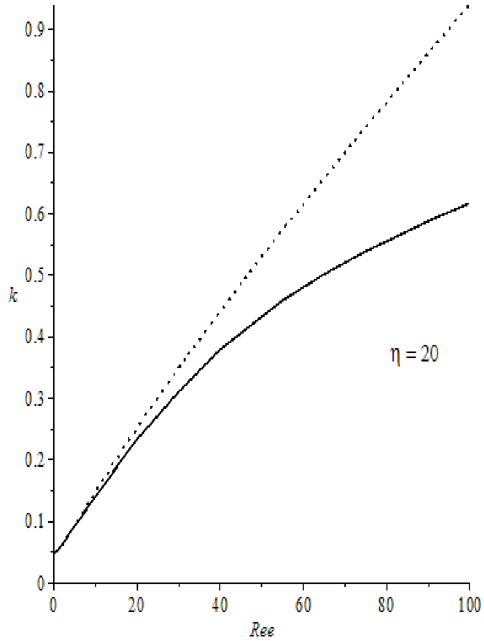

Figure (2)

Coubes de stabilité dans le plan (R_e, k) pour deux valeurs de rayons de courbure et de ka = 6173

……… développement asymptotique ; ——— Orr-Sommerfeld

Références

[1] P.L.Kapitza, Collected papers of P.L Kapitza, Pergamon press 2 (1965) 662

[2] C.E. Hickox, Instability due to viscosity and density strafication in axisymetric pipe flow, Phys.Fluids ,14 (1971)251

[3] C.Ruiyer-Quil,P.Trevelay,F.Giorgiott-Dauphin,C.Dupratand S.Kallidasin,Modelling film flows down fibre,J.fluid Mech, (2008)431-462

[4] S.P. Lin, W.C. Liu, Instability of film coating of wires and tubes AICHE Journal 21(1975) 775–782

[5] M.R. Scott, An Initial value method for the eingenvalue problem for systems of ordinary differential equations, J.Comput.phys.12 (1973) 334–347

[6] A.Davey, On the numerical solution of difficult boundary-value problems,J.Comput.Phys 35(1977) 36–47