

# Modèle vibro-acoustique couplé d'un haut-parleur en élastomère diélectrique

E. Garnell<sup>a</sup>, O. Doaré<sup>a</sup>, C. Rouby<sup>a</sup>

a. IMSIA, Institut Polytechnique de Paris, Route de Saclay, 91128 Palaiseau,  
*emil.garnell@ensta-paristech.fr*

## Résumé

*Les élastomères diélectriques sont des matériaux actifs capables de grandes déformations. L'utilisation de membranes d'élastomères diélectriques comme haut-parleurs a été étudiée par plusieurs groupes de recherche, qui ont prouvé la possibilité de rayonner dans l'ensemble du spectre de l'audible. Des modèles de l'actionnement électro-mécanique ont été développés, mais aucun modèle couplant l'ensemble des phénomènes physiques impliqués n'est disponible. Toute optimisation poussée des différents paramètres d'un tel haut parleur (géométrie, paramètres matériau, pression de gonflement, etc) nécessite un modèle validé de la dynamique et du rayonnement.*

*Dans cette article, un modèle multiphysique par élément finis est proposé. Il couple l'acoustique intérieure au prototype, l'acoustique en champ libre, l'électro-statique et les vibrations autour d'un état pré-contraint. Le rayonnement acoustique est calculé à l'aide de couches parfaitement adaptées (PMLs). Les effets de fluide lourd qui apparaissent en raison de la faible masse de la membrane sont étudiés. Enfin, ce modèle est validé par une étude expérimentale.*

## Abstract

*Dielectric elastomers are soft active materials capable of large deformations . Loudspeakers using this material have been studied and tested by several research groups. Sound radiation over the whole audible frequency range has been demonstrated. Models of the electro-activation principle have also been developed. However, no complete model coupling all the different physics involved in such a loudspeaker system has been presented. Any advanced optimisation of the different parameters of such a device (geometry, material parameters, inflation pressure, etc) requires a validated model.*

*In the present research, a complete finite element model is set-up. Acoustics inside the cavity on which the membrane is inflated, free-field acoustics, electro-statics and membrane dynamics are computed by a fully coupled model. Acoustic radiation in free-field is computed using Perfectly Matched Layers (PMLs). Heavy fluid effects that arise because of the membrane light weight are studied. The model is finally validated by an experimental study.*

**Keywords : Dielectric elastomer, vibro-acoustics, heavy fluid, FreeFem++**

# 1 Introduction

Les membranes d'élastomère diélectrique sont constituées d'un film élastomère pris en sandwich entre deux électrodes souples. Quand une haute tension est appliquée entre les électrodes, l'élastomère est comprimé. Son épaisseur diminue, et en raison de son incompressibilité, sa surface augmente. Ce principe est à l'origine de la conversion électro-mécanique. Les élastomères diélectriques ont soulevé un grand intérêt dans les années 2000 lorsque Pelrine *et al.* ont montré que des déformations de plus de 100% pouvaient être obtenues sous chargement électrique. De nombreuses utilisations ont alors été envisagées : muscles artificiels, micro-pompes, écrans tactiles, transducteurs pour la récupération d'énergie, etc.

Leur utilisation comme haut-parleurs a également été considérée [6, 7, 1]. Nous nous intéressons ici à cette dernière application. La configuration la plus étudiée pour une utilisation comme transducteur acoustique utilise le principe d'activation décrit plus haut : si la membrane est gonflée sur un volume, l'augmentation de surface créée par l'activation électrique génère un déplacement normal à la membrane (voir figure 1).

Cette configuration a été suggérée par Heydt *et al.* [6], qui ont présenté les premières mesures de rayonnement acoustique. Il a été montré que la première fréquence propre du système dépend fortement du volume de la cavité sur laquelle la membrane est gonflée. De plus, la pression de gonflement influe largement sur la directivité du rayonnement [8]. Une étude expérimentale plus poussée de la dynamique de membranes d'élastomère diélectrique gonflées a été conduite par Fox et Goulbourne [1, 2]. Ils ont étudié la dynamique basse fréquence en dessous de 200 Hz, et analysé l'influence des principaux paramètres de design sur les premières fréquences propres. Le volume de la cavité a également une grande influence sur les modes de la membrane. Dans un contexte similaire, Hosoya *et al.* [9] ont étudié la directivité d'une membrane gonflée en hémisphère, et montré que le haut-parleur obtenu était omni-directionnel jusqu'à 16 kHz.

Les études mentionnées ci-dessus sont principalement expérimentales. Le système étudié (la membrane d'élastomère gonflée) a également fait l'objet d'études théoriques et numériques. Un modèle non-linéaire pour le gonflement quasi-statique de la membrane a été établi par Fox et Goulbourne [2]. Pour l'étude des transitions entre les multiples positions d'équilibre statique d'une membrane gonflée, un modèle temporel a été proposé [11]. La première étude théorique complète de la dynamique d'une membrane d'élastomère diélectrique a été réalisée par Zhu *et al.* [4, 3], qui ont calculé les modes linéaires autour d'un équilibre statique non-linéaire et comparé les fréquences propres obtenues à celles mesurées par Fox et Goulbourne [2].

Pour pouvoir concevoir des haut-parleurs en élastomère diélectrique réellement utilisables, il est indispensable de disposer d'un modèle théorique complet, prenant en compte tous les phénomènes physiques qui entrent en jeu, et qui soit capable de prédire la pression acoustique rayonnée sous l'action d'une tension électrique. Dans cette étude, un modèle est mis en place dans le domaine fréquentiel pour calculer la dynamique forcée de la membrane gonflée lorsqu'une tension électrique alternative est appliquée entre ses électrodes. Le modèle couple la dynamique de la membrane autour d'un état d'équilibre pré-contraint, l'acoustique à l'intérieur de la cavité sur laquelle est gonflée la membrane, et l'acoustique à l'extérieur. Les modes de résonance linéaires autour d'un équilibre statique non-linéaire sont calculés, les forces modales créées par le couplage électro-mécanique sont exprimées, et les fonctions de transfert entre la tension et la dynamique ou la pression acoustique rayonnée sont obtenues. Le modèle est finalement validé par une étude expérimentale.

## 2 Modèle

### 2.1 Description du système étudié

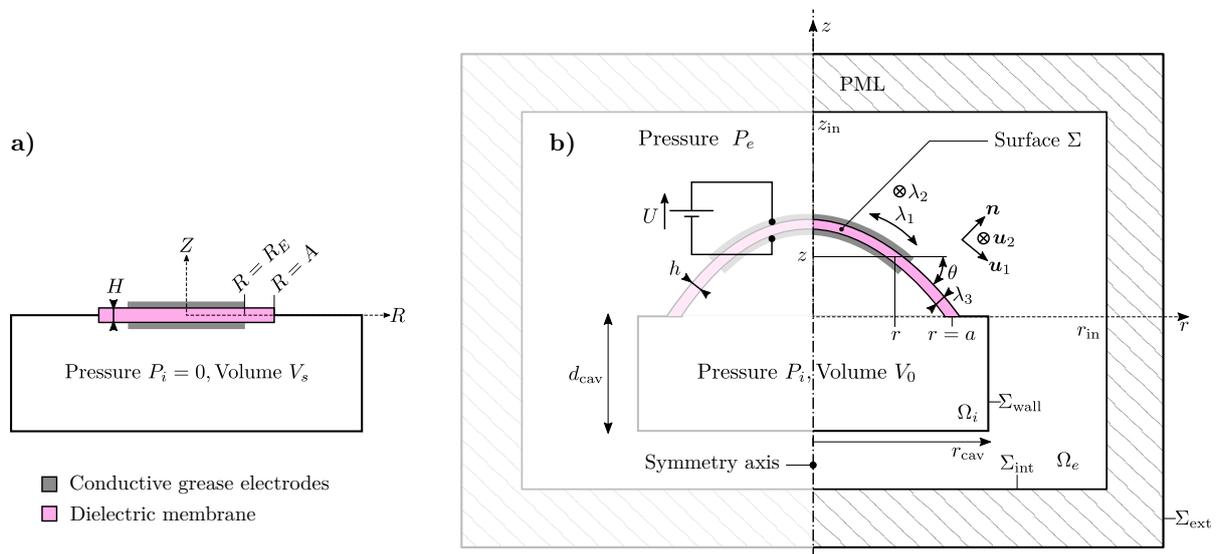


FIGURE 1 – Schéma du système étudié. a) Configuration de référence. b) Configuration déformée.

On s'intéresse à une membrane d'élastomère diélectrique gonflée sur une cavité fermée (voir Fig. 1). On suppose par simplicité que l'épaisseur de la membrane dans la configuration de référence est uniforme. La membrane est pré-tendue à un rayon  $a$ , puis gonflée à la pression  $P$ . Une tension électrique  $U$  est appliquée entre les électrodes. Le volume de la cavité sous pression est  $V_0$ . Les coordonnées en configuration initiale sont écrites en majuscules, et en minuscules dans la configuration déformée. La membrane est en contact avec un fluide acoustique à l'intérieur et à l'extérieur, et il n'y a pas de réflexion sur la frontière extérieure du domaine  $\Sigma_{\text{ext}}$ .

L'électrode peut avoir une forme axisymétrique quelconque. La fonction  $F_E(R)$  vaut 1 si une électrode est présente au rayon  $R$ , et zéro sinon. Sur la Fig. 1  $F_E(R) = 1$  pour  $R < R_E$  et  $F_E(R) = 0$  pour  $R > R_E$ .

### 2.2 Mise en équations

Le couplage électro-mécanique s'écrit dans la loi de comportement du matériau. Pour une loi de comportement hyper-élastique de type Gent, les contraintes principales sont [3] :

$$\sigma_1 = \frac{\mu J_m}{J_m - I_1 + 3} \left( \lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) - \epsilon F_E \frac{U_c^2}{h^2} - \epsilon F_E \frac{W_s e^{i\omega t}}{h^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_2 = \frac{\mu J_m}{J_m - I_1 + 3} \left( \lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) - \epsilon F_E \frac{U_c^2}{h^2} - \epsilon F_E \frac{W_s e^{i\omega t}}{h^2}, \quad (2)$$

où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes planaires radiales et ortho-radiales,  $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}$ ,  $\mu$  le module de cisaillement,  $J_m$  un paramètre décrivant le raidissement aux grandes elongations, et  $\epsilon$  la permittivité électrique de la membrane. Les autres variables sont définies sur la Fig. 1. La tension électrique  $U = \sqrt{U_c^2 + W_s(t)}$  est appliquée entre les électrodes. On modélise simplement les pertes par

un amortissement structural  $\eta$ , le module de cisaillement est ainsi remplacé par un module complexe  $\mu_c = (1 + i\eta)\mu$ . L'amortissement  $\eta$  sera ajusté sur les mesures.

Les équations d'équilibre membranaire s'écrivent [3] :

$$\rho_s(1 + F_E\rho_{\text{ratio}})\frac{rh}{\cos\theta}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{\sigma_2 h}{\cos\theta} + (P_i - P_e)r\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_1 rh \cos\theta), \quad (3)$$

$$\rho_s(1 + F_E\rho_{\text{ratio}})\frac{rh}{\cos\theta}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (P_i - P_e)r - \frac{\partial}{\partial r}(\sigma_1 rh \sin\theta), \quad (4)$$

munies des conditions aux limites :

$$r(R=0) = 0, \quad r(R=A) = a, \quad \frac{\partial z}{\partial R}(R=0) = 0, \quad z(R=A) = 0, \quad (5)$$

où  $\rho_s$  est la masse volumique de la membrane, et  $\rho_{\text{ratio}}$  est le rapport des masses volumiques de la membrane et des électrodes.

Pour continuer nous devons préciser la configuration étudiée. Dans un premier temps on gonfle la membrane avec une pression  $P_0$ , et on applique une tension continue  $U_c$ . L'équilibre statique obtenu est noté  $r_0, z_0$ . Le volume total de la cavité est alors  $V_0$ . On étudie ensuite les vibrations linéaires autour de cet état d'équilibre. Les déplacements de la membrane en  $r$  et  $z$  sont écrits comme :

$$r = r_0 + x_r e^{i\omega t}, \quad z = z_0 + x_z e^{i\omega t}. \quad (6)$$

On décompose la pression à l'intérieur de la cavité en une pression statique  $P_0$ , une pression dynamique homogène  $P_i^h$ , et une pression acoustique à moyenne nulle  $P_i^a$  :  $P_i = P_0 + (P_i^h + P_i^a)e^{i\omega t}$ . La pression homogène provient de la variation de volume de la cavité, et elle vérifie l'équation :

$$P_i^h = -c_F^2 \frac{\rho_F}{V_0} 2\pi \int_{R=0}^A \left(-\frac{\partial z_0}{\partial R} x_r + \frac{\partial r_0}{\partial R} x_z\right) r_0 dR, \quad (7)$$

où  $c_F$  est la vitesse du son, et  $\rho_F$  la masse volumique de l'air. La pression acoustique intérieure vérifie l'équation de Helmholtz, mais avec une contrainte supplémentaire imposant la moyenne nulle :

$$\omega^2 P_i^a + c_F^2 \Delta P_i^a = 0, \quad \text{avec} \quad \int_{\Omega_i} P_i^a dV = 0. \quad (8)$$

La pression acoustique extérieure vérifie également l'équation de Helmholtz, avec une condition de Sommerfeld sur  $\Sigma_{\text{ext}}$  :

$$\omega^2 P_e + c_F^2 \Delta P_e = 0. \quad (9)$$

Sur la membrane les conditions aux limites cinématiques s'écrivent :

$$\nabla P_i^a \cdot \mathbf{n} = \rho_F \omega^2 \frac{1}{\lambda_{10}} \left(-\frac{\partial z_0}{\partial R} x_r + \frac{\partial r_0}{\partial R} x_z\right), \quad \nabla P_e \cdot \mathbf{n} = -\rho_F \omega^2 \frac{1}{\lambda_{10}} \left(-\frac{\partial z_0}{\partial R} x_r + \frac{\partial r_0}{\partial R} x_z\right). \quad (10)$$

### 3 Résolution numérique

#### 3.1 Discrétisation par éléments finis sous FreeFem++

On utilise la méthode des éléments finis implémentée sous FreeFem++ [5] pour résoudre le système d'équations donné plus haut. FreeFem++ est utilisé pour obtenir les matrices éléments finis à partir des formes faibles des équations.

Dans une première étape, l'équilibre statique résultant de la pression de gonflement  $P_0$  et de la tension continue  $U_c$  est calculé. Ceci est réalisé à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson, que nous implémentons dans FreeFem++. Lors de cette première étape, les calculs sont réalisés sur un maillage de la membrane en configuration de référence (voir Fig. 1).

Dans un second temps, les équations membranaires sont linéarisées autour de cet état d'équilibre, et réécrites en configuration actuelle. On maille alors l'ensemble du système (acoustique intérieure, extérieure, et membrane), le maillage est tracé sur la Fig. 2.

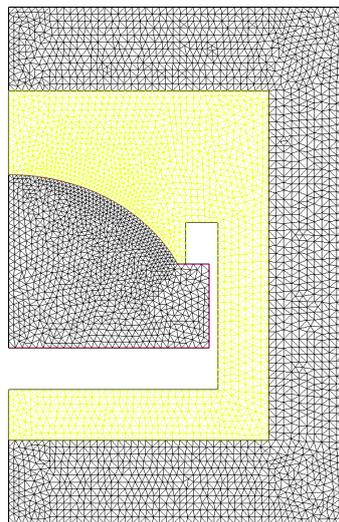


FIGURE 2 – Maillage éléments finis de la membrane et des fluides intérieurs et extérieurs, en configuration actuelle. La zone jaune correspond au fluide extérieur, la bande noire à l'extérieur est la PML, et la zone noire au centre le fluide intérieur.

On fait le choix de changer de variable pour les pressions acoustiques  $P_i^a$  et  $P_e$ , et les potentiels de déplacement acoustique intérieurs et extérieurs  $Q_i^a = \frac{P_i^a}{\rho_F \omega^2}$  et  $Q_e = \frac{P_e}{\rho_F \omega^2}$  sont définis. L'intérêt de ce changement sera justifié par la suite.

Pour satisfaire la condition de Sommerfeld, on implémente des PMLs à l'aide du changement de variable complexe suivant :

$$\hat{r} = \begin{cases} r - i \int_{r_{in}}^r \sigma_r(r) ds & \text{pour } r > r_{in} \\ r & \text{sinon} \end{cases}, \quad \hat{z} = \begin{cases} z - i \int_{z_{in}}^z \sigma_z(z) ds & \text{pour } |z| > |z_{in}| \\ z & \text{sinon} \end{cases},$$

où  $\sigma_r(r) = \sigma_0(r - r_{in})^2$  et  $\sigma_z(z) = \sigma_0(z - z_{in})^2$  avec  $\sigma_0$  un paramètre d'atténuation qui doit être ajusté,  $r_{in}$  et  $z_{in}$  les coordonnées de la limite intérieure du PML.

Les matrices de masse et de rigidité de l'acoustique intérieure, extérieure, et de la membrane ( $M_{ia}$ ,  $M_e$ ,  $M_s$ ;  $K_{ia}$ ,  $K_e$ ,  $K_s$ ) sont obtenues de manière classique. Les matrices de couplages sont calculées à l'aide d'une fonctionnalité de FreeFem++, qui permet l'intégration sur un ligne commune de fonctions définies sur des maillages différents. On obtient alors les matrices de couplage entre acoustique intérieure et membrane  $M_{ia}^c$  et  $K_{ia}^c$ , entre acoustique extérieure et membrane  $M_e^c$  et  $K_e^c$ , entre pression homogène et membrane  $K_{ih}^{c1}$  et  $K_{ih}^{c2}$ .  $K_{ih}$  est la raideur liée à la pression homogène  $P_{ih}$  dans la cavité,  $K_{\lambda}^{c1}$  et  $K_{\lambda}^{c2}$  proviennent du multiplicateur de Lagrange utilisé pour imposer la contrainte  $\int_{\Omega_i} P_i^a dV = 0$ . On assemble alors les matrices de raideur et de masse totales  $K_{tot}$  et  $M_{tot}$ , ainsi que le vecteur force total  $F_{tot}$  :

$$\left( -\omega^2 \begin{bmatrix} M_{ia} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_e & 0 \\ M_{ia}^c & 0 & 0 & M_e^c & M_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ia} & K_{\lambda}^{c1} & 0 & 0 & K_{ia}^c \\ K_{\lambda}^{c2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{ih} & 0 & K_{ih}^{c2} \\ 0 & 0 & 0 & K_e & K_e^c \\ 0 & 0 & K_{ih}^{c1} & 0 & K_s \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} Q_i^a \\ \lambda_i \\ P_i^h \\ Q_e \\ \begin{bmatrix} x_r \\ x_z \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathcal{F} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

$\mathcal{F}$  est la force résultant du couplage électro-mécanique. Le vecteur de déplacement total est noté  $X$ . On remarque qu'en raison du choix de PMLs indépendants de la fréquence et d'un amortissement proportionnel, les matrices  $K_{tot}$  et  $M_{tot}$  sont également indépendantes de la fréquence.

### 3.2 Analyse modale et réponse forcée

Le système (11) peut être résolu directement pour les fréquences choisies :

$$X = (-\omega^2 M_{tot} + K_{tot})^{-1} F_{tot}. \quad (12)$$

Cependant cette méthode donne peu d'informations physiques sur le système. Une approche modale permet une interprétation plus facile des résultats. Comme les matrices sont indépendantes de la fréquence on peut utiliser des solveurs aux valeurs propres classiques pour calculer les modes de résonance. Il faut cependant calculer des modes droits  $\Psi_n^R$  et gauches  $\Psi_n^L$ , en raison de l'absence de symétrie hermitienne de  $K_{tot}$  et  $M_{tot}$  :

$$\Psi_n^L (-\omega_n^2 M_{tot} + K_{tot}) = 0, \quad (-\omega_n^2 M_{tot} + K_{tot}) \Psi_n^R = 0. \quad (13)$$

On développe alors la solution sur les modes droits  $X = \Psi^R c$ . Toutes les valeurs propres sont simples (on le vérifie), les relations de bi-orthogonalité donnent ainsi  $\Psi^L M_{tot} \Psi^R = \text{diag}(\mu_n)$  et  $\Psi_n^L K_{tot} \Psi_n^R = \text{diag}(\kappa_n)$ . Les amplitudes modales s'expriment alors :

$$c_n(\omega) = \frac{F_n}{\mu_n(\omega_n^2 - \omega^2)}, \quad (14)$$

où  $F_n = \Psi_n^L F_{\text{tot}}$ . On connaît alors le déplacement de la membrane et la pression dans l'ensemble du domaine :

$$P_e = \sum_n \rho_F \omega^2 c_n(\omega) \Psi_{n,e}^R, \quad P_i^a = \sum_n \rho_F \omega^2 c_n(\omega) \Psi_{n,ia}^R, \quad P_i^h = \sum_n c_n(\omega) \Psi_{n,ih}^R, \quad (15)$$

$$x_z = \sum_n c_n(\omega) \Psi_{n,z}^R, \quad x_r = \sum_n c_n(\omega) \Psi_{n,r}^R, \quad (16)$$

où  $\Psi_{n,e}$  est la partie du vecteur propre qui contient les degrés de liberté de pression extérieure du mode  $n$  par exemple. On remarque alors que les pressions acoustiques  $P_i^a$  et  $P_e$ , et la pression homogène  $P_i^h$  n'ont pas la même dépendance en fréquence, en raison du changement de variable en potentiel de déplacement effectué plus haut. Cela va impliquer une meilleure convergence de la solution modale vers la solution directe lorsque le nombre de modes augmente.

Si l'on souhaite obtenir la pression en champ lointain, on peut propager la solution en champ proche à l'aide de l'intégrale de Kirshoff-Helmholtz (KH) :

$$P_e(\mathbf{x}_r) = - \int_{\Sigma_{KH}} (P_e(\mathbf{x}) \partial_n G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r) - \nabla P_e(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_r)) dS(\mathbf{x}), \quad (17)$$

où  $\Sigma_{KH}$  est une surface fermée autour du haut-parleur,  $\mathbf{x}_r$  la position du récepteur, et  $G$  la fonction de Green champ libre. Lorsque la superposition modale (15a) est utilisée dans (17), on appellera la solution "*Modal KH*".

Un point important qui résulte de l'utilisation des PMLs mérite d'être discuté : l'analyse modale du système (11) va donner deux types de modes. Une première catégorie correspond aux modes de résonance de la membrane couplée au fluide. Une seconde catégorie contient ce qu'on appellera des modes PML. Dans ces modes, la pression acoustique est très grande dans les PMLs. Ils naissent en raison de réflexions d'onde à l'intérieur de ces couches absorbantes. Ils sont largement plus amortis que les modes de membrane, et on peut donc facilement distinguer les deux catégories. Lorsqu'on souhaite obtenir la solution par reconstruction modale, il est nécessaire de prendre en compte aussi bien les modes de membrane que les modes PML [10]. En revanche, pour étudier les effets de fluide lourd sur la membrane, on s'intéressera principalement aux modes de résonance de la membrane.

## 4 Résultats

Un prototype du haut parleur schématisé en Fig. 1 a été construit. On mesure notamment la pression rayonnée à 1 m dans l'axe sous l'action d'un signal d'excitation variable  $W_s(t)$ . Les différents paramètres du prototype (loi de comportement du silicone utilisé, épaisseur, taille de la cavité arrière...) ont été mesurés à l'aide d'expériences indépendantes. On utilise ces paramètres dans le modèle présenté ici, ce qui nous permet de comparer la pression calculée et mesurée. On trace sur la Fig. 3 la fonction de transfert entre le signal d'excitation  $W_s$  et la pression acoustique rayonnée. Deux calculs sont réalisés : dans le premier on néglige la rétroaction du fluide acoustique sur la membrane, dans l'autre le couplage fort est calculé. La Fig. 3 montre que le modèle, même sans couplage avec le fluide permet une bonne prédiction du champ acoustique rayonné, notamment en basses fréquences. Quand l'effet fluide est ajouté, la corrélation mesure/calcul s'améliore grandement. En effet, l'effet de masse ajoutée diminue les fréquences de résonance des premiers modes, et les fréquences propres calculées sont alors plus

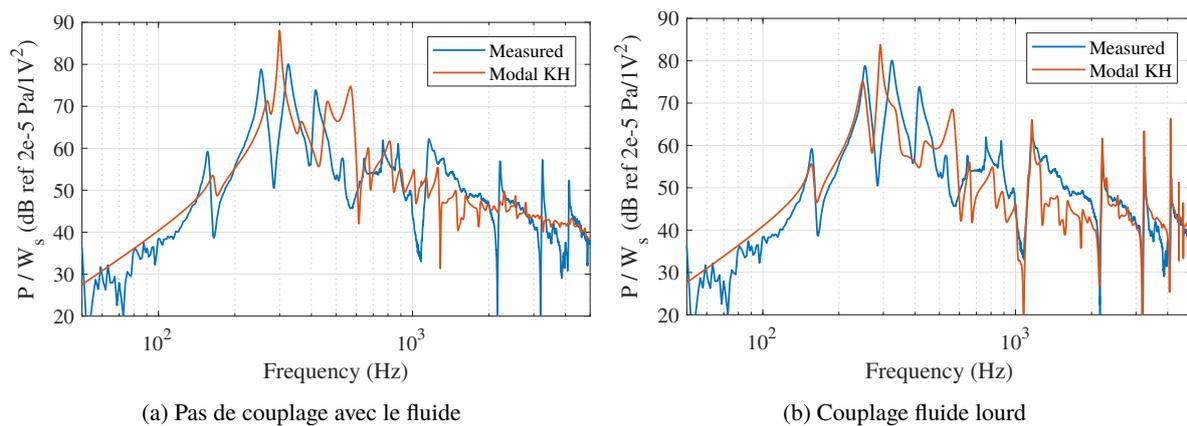


FIGURE 3 – Fonction de transfert entre la pression rayonnée à 1m dans l'axe et le signal d'excitation  $W_s$ .

proches de celles mesurées. En plus haute fréquence (à 1100 Hz et 2200 Hz), les résonances acoustiques dans la cavité sur laquelle est gonflée la membrane sont bien prédites par le modèle couplé.

Les premières fréquences de résonance calculées avec et sans couplage fluide sont comparées sur la Fig. 4. On note alors que le couplage fait bien baisser les premières fréquences propres, jusqu'à 8%

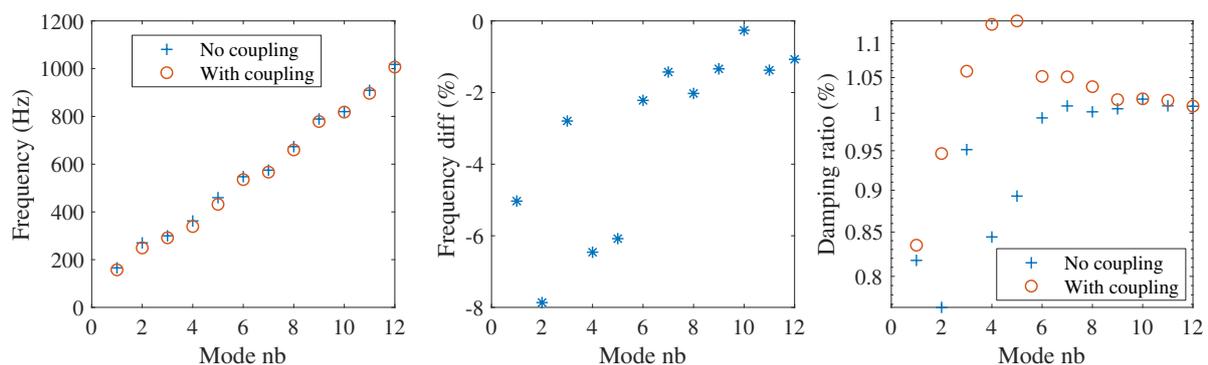


FIGURE 4 – Influence du couplage fluide lourd sur les première 12 fréquences de résonance.

en basses fréquences. L'effet de masse ajoutée n'est donc pas négligeable. L'amortissement augmente aussi légèrement lorsque le couplage fluide est pris en compte, mais il reste dominé par l'amortissement structurel implémenté pour le silicone constituant la membrane.

## 5 Conclusion

Un modèle par éléments finis permettant de coupler les différentes physiques dominantes pour le comportement dynamique d'une membrane d'élastomère gonflée a été mis en place, afin d'étudier une utilisation comme haut-parleur. Dans un premier temps l'équilibre non linéaire d'une membrane hyper-élastique électro-activée et gonflée sur une cavité fermée a été calculé. Les vibrations autour de cet état d'équilibre en prenant en compte les couplages vibro-acoustiques forts avec l'air à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité ont alors été étudiés. Une approche modale est utilisée, même pour le fluide extérieur, pour calculer la pression rayonnée et étudier l'influence du fluide lourd sur les modes de résonance de la membrane.

Ce modèle qui a été validé expérimentalement peut maintenant être utilisé pour optimiser les paramètres du haut parleur en élastomère diélectrique en fonction de différents critères, comme par exemple l'équilibre spectral.

## Références

- [1] J. W. Fox and N. C. Goulbourne. On the dynamic electromechanical loading of dielectric elastomer membranes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(8) :2669–2686, August 2008.
- [2] J. W. Fox and N. C. Goulbourne. Electric field-induced surface transformations and experimental dynamic characteristics of dielectric elastomer membranes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(8) :1417–1435, August 2009.
- [3] Jian Zhu, Shengqiang Cai, and Zhigang Suo. Resonant behavior of a membrane of a dielectric elastomer. *International Journal of Solids and Structures*, 47(24) :3254–3262, December 2010.
- [4] Jian Zhu, Shengqiang Cai, and Zhigang Suo. Nonlinear oscillation of a dielectric elastomer balloon. *Polymer International*, 59(3) :378–383, March 2010.
- [5] F. Hecht. New development in freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4) :251–266, 2013.
- [6] R. Heydt, R. Kornbluh, R. Pelrine, and V. Mason. Design and performance of an electrostrictive polymer-film acoustic actuator. *Journal of Sound and Vibration*, 215(2) :297–311, August 1998.
- [7] Richard Heydt, Ron Pelrine, Jose Joseph, Joseph Eckerle, and Roy Kornbluh. Acoustical performance of an electrostrictive polymer film loudspeaker. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 107(2) :833–839, 2000.
- [8] Richard Heydt, Roy Kornbluh, Joseph Eckerle, and Ron Pelrine. Sound radiation properties of dielectric elastomer electroactive polymer loudspeakers. In *Smart Structures and Materials 2006 : Electroactive Polymer Actuators and Devices (EAPAD)*, volume 6168, page 61681M. International Society for Optics and Photonics, March 2006.
- [9] Naoki Hosoya, Shun Baba, and Shingo Maeda. Hemispherical breathing mode speaker using a dielectric elastomer actuator. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 138(4) :EL424–EL428, October 2015.
- [10] Philippe Lalanne, Wei Yan, Kevin Vynck, Christophe Sauvan, and Jean-Paul Hugonin. Light Interaction with Photonic and Plasmonic Resonances. *Laser & Photonics Reviews*, 12(5) :1700113, May 2018.
- [11] Eric M. Mockensturm and Nakhiah Goulbourne. Dynamic response of dielectric elastomers. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41(3) :388–395, April 2006.