

# Construction d'un modèle d'endommagement non-local pour la fatigue à grand nombre de cycles des polycristaux métalliques

C. MAREAU<sup>a</sup>

a. LAMPA-Arts et Métiers ParisTech, charles.mareau@ensam.eu

## Résumé :

*Le développement de l'endommagement de fatigue dans les matériaux métalliques est un processus complexe influencé à la fois par des facteurs intrinsèques (e.g. texture cristallographique, défauts) et extrinsèques (e.g. mode de chargement, fréquence de chargement). Pour mieux comprendre ce processus, des travaux ont été conduits pour développer des modèles dits "microstructure sensitive" qui prennent en compte de manière explicite l'impact des hétérogénéités microstructurales sur la formation des fissures de fatigue. Une limitation importante de ces modèles est leur incapacité à décrire la transition entre les stades de nucléation et de propagation dans un cadre cohérent. Pour s'affranchir de cette limitation, on développe un modèle d'endommagement non-local, dédié à la description de l'amorçage et des premiers stades de propagation, prenant explicitement en compte la réduction progressive de rigidité due à la formation de fissures de fatigue. Spécifiquement, une variable d'endommagement est attachée à chaque système de glissement de manière à prendre en compte l'aspect anisotrope de l'endommagement de fatigue. Les gradients spatiaux des variables d'endommagement sont traités comme des variables d'état supplémentaires, ce qui permet de prendre en compte l'augmentation de l'énergie de surface associée à la formation de fissures de fatigue. Pour que les équations d'évolution soient compatibles avec le deuxième principe de la thermodynamique, une contribution supplémentaire au transfert d'entropie a été postulée. Les relations de comportement ont ensuite été implémentées dans un solveur spectral pour résoudre les équations de champ régissant le comportement d'un élément de volume polycristallin. Quelques exemples numériques sont ensuite présentés. Ces exemples permettent de discuter de la capacité du modèle proposé à décrire l'impact des conditions de chargement et des défauts préexistants sur le comportement en fatigue des polycristaux métalliques.*

## Abstract :

*The development of fatigue damage in metallic materials is a complex process influenced by both intrinsic (e.g. crystallographic texture, defects) and extrinsic (e.g. loading mode, loading frequency) factors. To better understand this process, some efforts have been made at developing microstructure-sensitive models that explicitly consider the impact of microstructural heterogeneities on the formation of fatigue cracks. An important limitation of such models is their inability to describe the transition between the nucleation and early growth stages in a single consistent framework. To circumvent this limitation, a constitutive model, which is appropriate for the description of both nucleation and early growth, is proposed in the present work. For this purpose, continuum thermodynamics is combined with non-local*

*damage mechanics to construct a set of constitutive relations that explicitly considers the progressive stiffness reduction due to the formation of fatigue cracks. Specifically, a damage variable is attached to each slip system, which allows considering both the anisotropic aspect of fatigue damage and closure effects. The spatial gradients of the damage variables are treated as additional state variables to account the increase of surface energy associated with the formation of fatigue cracks. For illustration purposes, the non-local damage model is implemented in a spectral (i.e. FFT) solver. Some numerical examples are then presented. These examples allow discussing the ability of the proposed model to describe the impact of loading conditions and pre-existing defects on the fatigue behavior of metallic polycrystals.*

**Mots clefs : Fatigue, endommagement, thermodynamique.**

## 1 Introduction

Pour les matériaux métalliques, les caractéristiques microstructurales (e.g. grains, pores, etc.) ont un impact important sur le processus menant à l'amorçage et à la propagation de fissures de fatigue courtes [1, 2]. En effet, en fonction des conditions de chargement, les hétérogénéités microstructurales peuvent éventuellement jouer le rôle de concentrateurs de contraintes, conduisant ainsi à l'amorçage de fissures de fatigue. Pour étudier l'impact des conditions de chargement et des caractéristiques de la microstructure, des efforts importants ont été déployés pour développer des modèles dits "microstructure sensitive" [3]. Pour l'amorçage de fissures de fatigue, ces modèles utilisent généralement des indicateurs, souvent inspirés par des critères de fatigue (e.g. Dang Van [4], Fatemi-Socie [5]), afin de déterminer si les conditions d'amorçage sont réunies [6, 7, 8, 9]. Le problème de la propagation des fissures est plus complexe, principalement parce qu'il nécessite de modéliser l'extension du front de fissure. Une méthodologie pour la propagation des fissures courtes a été proposée par Castelluccio *et al.* [10]. Elle a notamment été utilisée pour étudier le comportement en fatigue d'un superalliage à base de nickel [11].

La mécanique de l'endommagement [12] permet également d'évaluer l'impact des caractéristiques de la microstructure sur le comportement en fatigue des matériaux métalliques [13, 14, 15]. L'idée consiste à introduire des variables d'endommagement pour rendre compte explicitement de la dégradation progressive de la résistance mécanique provoquée par le développement des fissures de fatigue. En comparaison avec d'autres approches, les modèles d'endommagement peuvent être formulés en utilisant le concept de variables d'état internes [16], donc être construits dans un cadre thermodynamique cohérent. Cependant, le développement de l'endommagement s'accompagne souvent d'un phénomène de localisation spatiale, de sorte que les solutions numériques aux problèmes ne convergent pas nécessairement lors du raffinement du maillage [17]. Bien que cette approche ait été peu utilisée dans le contexte de la fatigue, les modèles d'endommagement à gradient permettent de contourner les difficultés liées à la localisation. En effet, les gradients spatiaux des variables d'endommagement, qui sont traités comme des variables d'état supplémentaires, permettent à la fois de régulariser les solutions et de considérer l'énergie de surface associée aux fissures. Le traitement classique des modèles d'endommagement à gradient utilise une version étendue du principe des puissances virtuelles, où la variable d'endommagement et son gradient sont des variables d'état externes [18]. Une approche alternative, suggérée par Maugin [19], repose sur l'adoption d'une version modifiée de l'inégalité de production d'entropie, qui inclut une contribution supplémentaire au flux d'entropie. Avec cette stratégie, la variable d'endommagement et son gradient sont traités comme des variables d'état internes.

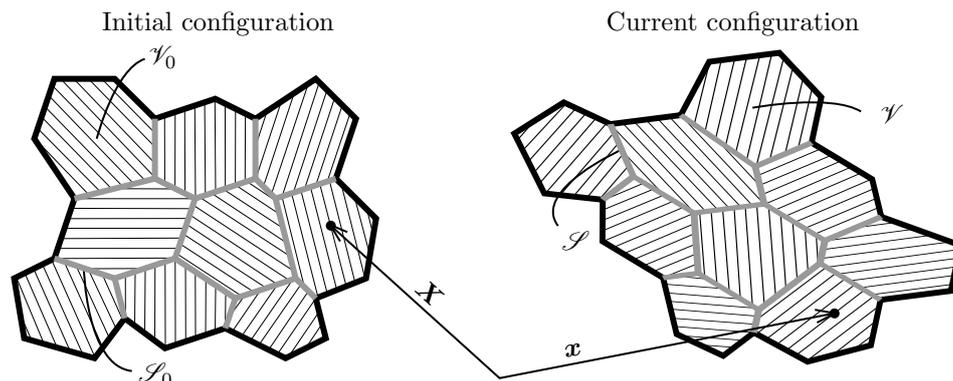


FIGURE 1 – Mouvement d'un solide déformable  $\mathcal{B}$  formé par un ensemble de cristaux reliés par des interfaces parfaites.

Dans ce travail, un modèle d'endommagement non-local est construit pour décrire l'amorçage et le premier stade de propagation des fissures de fatigue dans les matériaux métalliques. Le développement de relations de comportement utilise le cadre de la plasticité cristalline et le concept de flux d'entropie supplémentaire de [19]. Ces relations sont ensuite implémentées dans un solveur spectral (i.e. FFT) qui permet de résoudre les équations d'équilibre et de compatibilité.

Cet article est organisé comme suit. Dans la première section, les équations de champ régissant le comportement thermomécanique des solides sont brièvement rappelées, avec une attention particulière à la définition du flux d'entropie supplémentaire. La construction de relations de comportement, dans le cadre de la thermodynamique des milieux continus [20], est détaillée dans la deuxième section. A titre illustratif, des exemples d'application du modèle proposé sont présentés dans la dernière section.

## 2 Equations de champ

Dans cette section, les équations de champ qui régissent le comportement thermomécanique des solides sont rappelées. À cette fin, un solide déformable  $\mathcal{B}$  composé d'un ensemble de cristaux liés les uns aux autres par des interfaces parfaites est considéré. Comme le montre la Figure 1,  $\mathcal{V}_0$  est la région occupée par les points matériels de  $\mathcal{B}$  dans la configuration de référence.

Pour un point matériel dont la position dans la configuration de référence est indiquée par  $\mathbf{X}$ , la position  $\mathbf{x}$  et la température  $T$  à l'instant  $t$  sont données par :

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t), \quad T = \theta(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

où  $\boldsymbol{\chi}$  et  $\theta$  sont des fonctions définissant les histoires de mouvement et de température. En raison des interfaces séparant différents cristaux,  $\boldsymbol{\chi}$  et  $\theta$  sont des fonctions continues mais uniquement dérivables par morceaux. Dans ce qui suit, la surface singulière formée par les joints de grains dans la configuration de référence est notée  $\mathcal{S}_0$ .

Le tenseur gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  est déterminé à partir de la fonction  $\chi$  selon<sup>1</sup> :

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\chi} \otimes \boldsymbol{\nabla}, \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{S}_0 \quad (2)$$

$$[\mathbf{F}] = \boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{N}, \mathbf{X} \in \mathcal{S}_0 \quad (3)$$

Dans l'équation ci-dessus, qui est une condition nécessaire à la compatibilité cinématique, le vecteur  $\boldsymbol{\beta}$  représente l'amplitude du saut pour le gradient de  $\chi$  à travers une interface de normale  $\mathbf{N}$ .

L'évolution du solide  $\mathcal{B}$  est soumise aux restrictions imposées par les principes mécaniques et thermodynamiques élémentaires. Les équations de conservation résultant de ces restrictions sont brièvement rappelées dans ce qui suit. D'abord, la condition de conservation de la masse s'écrit :

$$\dot{\rho}_0 = 0, \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{S}_0 \quad (4)$$

$$[\dot{\rho}_0] = 0, \mathbf{X} \in \mathcal{S}_0 \quad (5)$$

où  $\rho_0$  est la densité de masse dans la configuration de référence.

Deuxièmement, pour tout point matériel, la conservation de la quantité de mouvement requiert que :

$$\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \mathbf{B} = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}, \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{S}_0 \quad (6)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T, \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{S}_0 \quad (7)$$

$$[\mathbf{P}] \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0}, \mathbf{X} \in \mathcal{S}_0 \quad (8)$$

où  $\mathbf{B}$  est la densité de force volumique et  $\mathbf{P}$  est le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

D'après le premier principe de la thermodynamique, la variation d'énergie totale (interne et cinétique) est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs et du flux de chaleur. La forme locale de la condition de conservation de l'énergie s'exprime ainsi :

$$\rho_0 \dot{u} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{Q} + \rho_0 r, \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{S}_0 \quad (9)$$

$$[\mathbf{Q}] \cdot \mathbf{N} = 0, \mathbf{X} \in \mathcal{S}_0 \quad (10)$$

où  $u$  est l'énergie interne spécifique,  $\mathbf{Q}$  est la densité surfacique de flux de chaleur et  $r$  est la source de chaleur spécifique.

Enfin, le second principe de la thermodynamique demande à ce que le taux de production d'entropie soit non-négatif. La forme locale du second principe est alors donnée par les inégalités suivantes :

$$\rho_0 \dot{s} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J} - \rho_0 z \geq 0, \mathbf{X} \in \mathcal{V}_0 \setminus \mathcal{S}_0 \quad (11)$$

$$[\mathbf{J}] \cdot \mathbf{N} \geq 0, \mathbf{X} \in \mathcal{S}_0 \quad (12)$$

où  $s$  est l'entropie spécifique,  $\mathbf{J}$  est le flux d'entropie et  $z$  est la source d'entropie spécifique. Dans ce travail, on adopte une définition non-conventionnelle du flux d'entropie. Plus spécifiquement, suivant la suggestion de Maugin [19], on postule qu'il existe une contribution supplémentaire au flux d'entropie

1.  $[\bullet]$  indique le saut de  $\bullet$  à travers une interface.

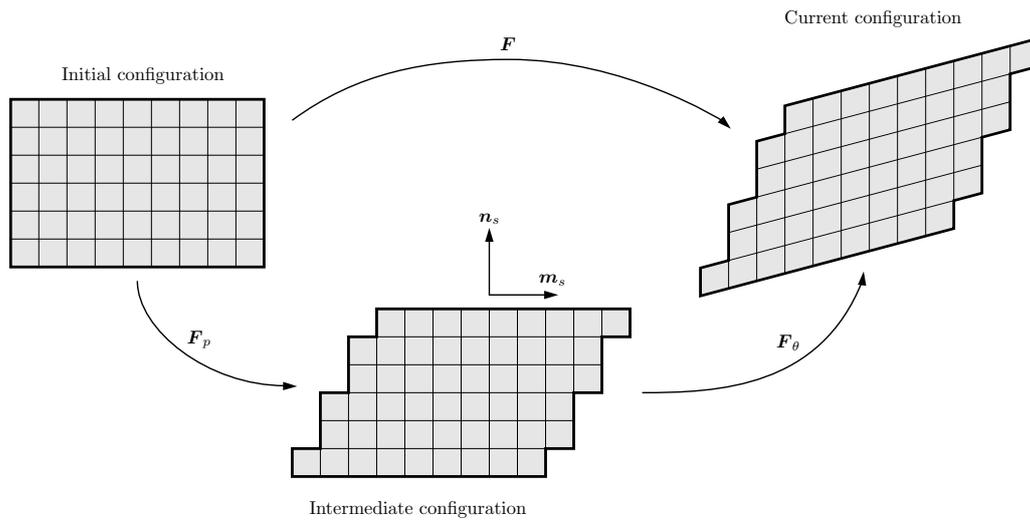


FIGURE 2 – Décomposition multiplicative du gradient de la transformation.

de sorte que :

$$\mathbf{J} = \frac{\mathbf{Q}}{T} \quad (13)$$

$$z = \frac{r}{T} + \frac{h}{T} \quad (14)$$

La proposition originale de Maugin [19] fait appel à une densité surfacique de flux d'entropie supplémentaire. On préfère ici l'approche de Iremam et Nguyen [21], qui introduit une source volumique d'entropie supplémentaire  $h/T$ . Ainsi, si on retrouve la définition classique de la densité surfacique de flux d'entropie (i.e.  $\mathbf{J} = \mathbf{Q}/T$ ), la dernière inégalité montre qu'il est nécessaire de proposer une relation de comportement pour la source d'entropie supplémentaire  $h/T$ . La construction de cette relation de comportement est détaillée dans ce qui suit.

### 3 Relations de comportement

**Décomposition multiplicative** Les équations de champ, qui ont été rappelées ci-dessus, ne sont pas suffisantes pour déterminer l'évolution d'un solide. Elles doivent notamment être complétées par des relations de comportement. Afin de présenter ces relations, un seul point matériel est considéré pour le moment. Pour un tel point matériel, comme suggéré par [22], la décomposition multiplicative suivante du tenseur du gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  est adoptée :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\theta \cdot \mathbf{F}_p \quad (15)$$

où  $\mathbf{F}_\theta$  (respectivement  $\mathbf{F}_p$ ) représente la contribution thermoélastique (respectivement plastique) au gradient de la transformation.

Dans ce travail, on suppose que la déformation plastique est due au seul mécanisme de glissement qui opère sur un ensemble de  $n$  systèmes de glissement. Comme le montre la figure 2, chaque système  $s$  est défini dans la configuration intermédiaire isoclinique à partir de deux vecteurs unitaires : la normale au plan de glissement  $\mathbf{n}_s$  et la direction de glissement  $\mathbf{m}_s$ . Dans ce qui suit, on utilise également un vecteur unitaire  $\mathbf{k}_s$  tel que  $\mathbf{k}_s = \mathbf{n}_s \times \mathbf{m}_s$ .

La décomposition multiplicative précédente permet de séparer le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  en contributions élastique et plastique :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (16)$$

$$= \mathbf{F}_p^T \cdot \tilde{\mathbf{E}}_\theta \cdot \mathbf{F}_p + \mathbf{E}_p \quad (17)$$

avec :

$$\tilde{\mathbf{E}}_\theta = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_\theta^T \cdot \mathbf{F}_\theta - \mathbf{1}) \quad (18)$$

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_p^T \cdot \mathbf{F}_p - \mathbf{1}) \quad (19)$$

De manière semblable, le gradient du champ de vitesse  $\mathbf{L}$  est décomposé comme suit :

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (20)$$

$$= \mathbf{L}_\theta + \mathbf{F}_\theta \cdot \tilde{\mathbf{L}}_p \cdot \mathbf{F}_\theta^{-1} \quad (21)$$

avec :

$$\mathbf{L}_\theta = \dot{\mathbf{F}}_\theta \cdot \mathbf{F}_\theta^{-1} \quad (22)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \quad (23)$$

On peut remarquer que  $\tilde{\mathbf{E}}_\theta$  et  $\tilde{\mathbf{L}}_p$  sont des tenseurs invariants associés à la configuration intermédiaire. Aussi, les définitions des tenseurs des contraintes  $\tilde{\mathbf{S}}$  et  $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$ , qui sont les grandeurs conjuguées de  $d\tilde{\mathbf{E}}_\theta/dt$  et  $\tilde{\mathbf{L}}_p$ , sont obtenues à partir de la puissance des efforts intérieurs. En effet, la densité de puissance des efforts intérieurs s'écrit :

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{S}} : \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_\theta + \tilde{\mathbf{\Sigma}} : \tilde{\mathbf{L}}_p \quad (24)$$

La relation précédente fait intervenir le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $\tilde{\mathbf{S}}$  associé à la configuration intermédiaire ainsi que le tenseur des contraintes de Mandel  $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$ . Ces mesures de contrainte sont reliées au premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff  $\mathbf{P}$  par :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{F}_\theta^{-1} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}_p^T \quad (25)$$

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}} = \mathbf{F}_\theta^T \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}_p^T \quad (26)$$

**Relations d'état** A un instant donné  $t$ , l'état du point matériel considéré est défini de manière unique à partir d'un ensemble de variables d'état listées dans le Tableau 1 avec les variables duales correspondantes. Les variables d'état externes sont le tenseur de contraintes  $\tilde{\mathbf{S}}$  et la température absolue  $T$ . Pour la description du comportement cyclique, quelques variables d'état internes supplémentaires sont introduites. Premièrement, une variable d'écrouissage cinématique  $\alpha_s$  et une variable d'écrouissage isotrope  $\varrho_s$  sont associées à chaque système de glissement  $s$  (avec  $s = 1$  à  $n$ ). Pour décrire la dégradation des propriétés mécaniques, une variable d'endommagement  $\phi_s$  (avec  $0 \leq \phi_s \leq 1$ ) est attachée à chaque système de glissement  $s$ . Le cas où  $\phi_s$  est égal à zéro correspond à l'absence de dommage sur le système de glissement correspondant. À l'opposé, un système de glissement pour lequel  $\phi_s$  prend une valeur unitaire est complètement endommagé et incapable de transmettre des efforts internes. L'association d'une variable d'endommagement à chaque système de glissement est particulièrement bien adaptée à la de-

Variable d'état	Variable conjuguée
$T$	$s$
$\tilde{\mathbf{S}}$	$\tilde{\mathbf{E}}_\theta$
$\alpha_s$	$X_s$
$\varrho_s$	$R_s$
$\phi_s$	$Y_s$
$\nabla\phi_s$	$\mathbf{G}_s$

TABLE 1 – Liste des variables d'état utilisées pour la construction des relations de comportement.

scription des premiers stades d'endommagement de fatigue pour lesquels les fissures se propagent sur les systèmes de glissement fortement sollicités en cisaillement [23]. De même, à des fins de régularisation, les gradients spatiaux  $\nabla\phi_s$  des variables d'endommagement sont considérés comme des variables internes.

L'enthalpie libre spécifique  $g$  est une fonction d'état reliée à l'énergie interne spécifique  $u$  par la relation :

$$g = u - sT - \frac{\tilde{\mathbf{S}} : \tilde{\mathbf{E}}_\theta}{\rho_0} \quad (27)$$

Dans le cas présent, on suppose qu'il est possible de décomposer l'enthalpie libre spécifique  $g$  comme suit :

$$g = g_\theta(\tilde{\mathbf{S}}, T, \phi_s) + g_{th}(T) + g_k(\alpha_s) + g_i(\varrho_s) + g_d(\phi_s, \nabla\phi_s) \quad (28)$$

Dans cette décomposition, l'impact des variables d'endommagement au sein de la contribution thermoélastique  $g_\theta$  est introduit afin de décrire la réduction de rigidité due au développement des fissures de fatigue. La contribution thermique à l'énergie libre, qui ne dépend que de la température absolue  $T$ , est donnée par  $g_{th}$ . Aussi, la contribution  $g_k$  représente l'énergie élastique stockée au travers du champ de contrainte interne responsable de l'écroutissage cinématique. De manière semblable, la contribution  $g_i$  contient la quantité d'énergie stockée via les imperfections cristallines à l'origine de l'écroutissage isotrope (e.g. dislocations). Enfin, la contribution  $g_d$ , qui ne dépend que des variables d'endommagement et de leurs gradients, permet de considérer l'augmentation d'énergie de surface due à la formation des fissures de fatigue.

La contribution thermoélastique à l'énergie libre  $g_\theta$  est donnée par :

$$g_\theta = -\frac{1}{2\rho_0}\tilde{\mathbf{S}} : \mathbb{S}(\tilde{\mathbf{S}}, \phi_s) : \tilde{\mathbf{S}} - \frac{1}{\rho_0}\tilde{\mathbf{S}} : \boldsymbol{\alpha}(T - T_0) \quad (29)$$

où  $\mathbb{S}$  est le tenseur de souplesse (avec  $\mathbb{C} = \mathbb{S}^{-1}$ ),  $\boldsymbol{\alpha}$  est le tenseur de dilatation thermique et  $T_0$  est une température de référence. Suivant la proposition de [15], le tenseur  $\mathbb{S}$  dépend des variables d'endommagement  $\phi_s$  comme suit :

$$\mathbb{S}(\tilde{\mathbf{S}}, \phi_s) = \mathbb{S}_0 + \sum_s \omega(\phi_s) (U(\sigma_s) A_{nn} \mathbb{N}_{nn}^s + A_{nm} \mathbb{N}_{nm}^s + A_{nk} \mathbb{N}_{nk}^s) \quad (30)$$

$\mathbb{S}_0$  est le tenseur de souplesse initial (non-endommagé),  $U$  est la fonction échelon,  $\sigma_s = \mathbf{n}_s \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n}_s$  est la contrainte normale appliquée au système de glissement  $s$  et  $\omega$  est une fonction de dégradation qui

dispose des propriétés suivantes :

$$\omega(0) = 0 \quad (31)$$

$$\omega(1) = \infty \quad (32)$$

Dans ce travail, l'expression suivante est utilisée pour la fonction  $\omega$  :

$$\omega(\phi_s) = \frac{\phi_s}{1 - \phi_s} \quad (33)$$

Les tenseurs de projection  $\mathbb{N}_{nn}^s$ ,  $\mathbb{N}_{nm}^s$  et  $\mathbb{N}_{nk}^s$  sont introduits dans (30) pour prendre en compte l'aspect anisotrope de l'endommagement de fatigue. Ces tenseurs sont définis pour chaque système  $s$  selon :

$$\mathbb{N}_{nn}^s = \mathbf{n}_s \otimes \mathbf{n}_s \otimes \mathbf{n}_s \otimes \mathbf{n}_s \quad (34)$$

$$\mathbb{N}_{nm}^s = \frac{1}{4} (\mathbf{n}_s \otimes \mathbf{m}_s + \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s) \otimes (\mathbf{n}_s \otimes \mathbf{m}_s + \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s) \quad (35)$$

$$\mathbb{N}_{nk}^s = \frac{1}{4} (\mathbf{n}_s \otimes \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_s \otimes \mathbf{n}_s) \otimes (\mathbf{n}_s \otimes \mathbf{k}_s + \mathbf{k}_s \otimes \mathbf{n}_s) \quad (36)$$

Comme discuté ci-après,  $A_{nn}$ ,  $A_{nm}$  et  $A_{nk}$  sont des paramètres contrôlant l'impact des modes d'ouverture et de glissement (modes I, II ou III) sur la propagation des fissures. L'expression du tenseur de souplesse est construite de sorte à décrire la décroissance progressive des propriétés de rigidité due au développement de l'endommagement. En effet, selon l'expression (30), lorsqu'un système de glissement  $s$  est complètement endommagé, le point matériel est infiniment souple suivant  $\mathbf{n}_s$ . La seule exception est due aux effets de fermeture. Dans ce cas spécifique, qui se produit lorsque la contrainte normale  $\sigma_s$  agissant sur le système de glissement  $s$  est négative, les propriétés de rigidité sont partiellement récupérées.

La contribution thermique  $g_{th}$  à l'énergie libre est donnée par :

$$g_{th} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda} : \boldsymbol{\alpha} \frac{(T - T_0)^2}{T_0} + c \left( T - T_0 - T \ln \frac{T}{T_0} \right) \quad (37)$$

où  $c$  est la capacité thermique spécifique et  $\boldsymbol{\lambda} = \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\alpha} T_0 / \rho_0$  est le tenseur de chaleur latente.

La partie de l'énergie libre  $g_k$  due à l'érouissage cinématique prend la forme suivante :

$$g_k = \frac{1}{2\rho_0} C \sum_s \alpha_s^2 \quad (38)$$

où  $C$  est le module d'érouissage cinématique.

Pour la contribution de l'érouissage isotrope  $g_i$ , une approximation simple consiste à supposer une relation de type puissance, soit :

$$g_i = \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{N+1} H \sum_s \varrho_s^{N+1} \quad (39)$$

où  $H$  est le module d'érouissage isotrope et  $N$  est le coefficient d'érouissage.

Enfin, pour la contribution  $g_d$ , uniquement attribuée à l'endommagement, une variable d'endommagement scalaire  $D$  est introduite pour mesurer la progression de l'endommagement sur un point matériel.

La variable  $D$  est donnée par :

$$D = \frac{\sum_s \omega(\phi_s)}{1 + \sum_s \omega(\phi_s)} \quad (40)$$

Selon cette définition, la variable  $D$  est nulle en l'absence d'endommagement et elle tend vers l'unité si au moins un système est complètement endommagé. Aussi, le gradient d'endommagement  $\nabla D$  par rapport à la position initiale  $\mathbf{X}$  s'exprime :

$$\nabla D = \sum_s D_{,\phi_s} \nabla \phi_s \quad (41)$$

avec :

$$D_{,\phi_s} = (1 - D)^2 \omega_{,\phi_s} \quad (42)$$

$$= \frac{(1 - D)^2}{(1 - \phi_s)^2} \quad (43)$$

Pour la contribution  $g_d$  de l'endommagement à l'énergie libre, la proposition de [24], qui utilise la variable  $D$  et son gradient  $\nabla D$ , est adoptée :

$$g_d = \frac{1}{2\rho_0} \frac{G}{L} D^2 + \frac{1}{2\rho_0} GL \nabla D \cdot \nabla D \quad (44)$$

Dans la relation précédente,  $G$  représente la densité surfacique d'énergie associée aux fissures de fatigue et  $L$  est une longueur interne qui contrôle la contribution non-locale à l'énergie libre.

Les relations d'état, qui relient les variables d'état à leurs variables conjuguées, sont déduites de  $g$  par simple dérivation :

$$s = -\frac{\partial g}{\partial T} = c \ln \frac{T}{T_0} + \frac{1}{T_0} \boldsymbol{\beta} : (\mathbb{S}_0 : \tilde{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\alpha} (T - T_0)) \quad (45)$$

$$\mathbf{E}_\theta = -\rho_0 \frac{\partial g}{\partial \tilde{\mathbf{S}}} = \mathbb{S} : \tilde{\mathbf{S}} + \boldsymbol{\alpha} (T - T_0) \quad (46)$$

$$X_s = \rho_0 \frac{\partial g}{\partial \alpha_s} = C \alpha_s \quad (47)$$

$$R_s = \rho_0 \frac{\partial g}{\partial \rho_s} = H \rho_s^N \quad (48)$$

$$Y_s = \rho_0 \frac{\partial g}{\partial \phi_s} = \frac{G}{L} DD_{,\phi_s} - \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{S}} : \mathbb{S}_{,\phi_s} : \tilde{\mathbf{S}} \quad (49)$$

$$\mathbf{G}_s = \rho_0 \frac{\partial g}{\partial \nabla \phi_s} = GLD_{,\phi_s} \nabla D \quad (50)$$

Selon la relation (49), la force motrice qui permet le développement de l'endommagement sur un système de glissement  $s$ , notée  $Y_s$ , dépend du tenseur des contraintes  $\tilde{\mathbf{S}}$  au travers de la dérivée de  $\mathbb{S}$  par rapport à la variable d'endommagement  $\phi_s$  correspondante. En utilisant (30), on obtient que cette dérivée est donnée par :

$$\mathbb{S}_{,\phi_s} = \omega_{,\phi_s} (U(\sigma_s) A_{nm} \mathbb{N}_{nn}^s + A_{nm} \mathbb{N}_{nm}^s + A_{nk} \mathbb{N}_{nk}^s) \quad (51)$$

La relation précédente permet de reformuler (49) comme suit :

$$Y_s = \frac{G}{L} DD_{,\phi_s} - \frac{1}{2} \omega_{,\phi_s} (U(\sigma_s) A_{nm} \sigma_s^2 + A_{nm} \tau_s^2 + A_{nk} \pi_s^2) \quad (52)$$

Les contraintes tangentielles  $\tau_s$  et  $\pi_s$  s'obtiennent à partir des projections suivantes :

$$\tau_s = \mathbf{n}_s \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{m}_s \quad (53)$$

$$\pi_s = \mathbf{n}_s \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{k}_s \quad (54)$$

La relation (52) montre que les paramètres  $A_{nn}$ ,  $A_{nm}$  et  $A_{nk}$  contrôlent les contributions respectives des contraintes normales et tangentielles au développement de l'endommagement de fatigue. A cause des effets de fermeture, la contribution de la contrainte normale  $\sigma_s$  s'annule lorsque cette dernière est négative.

### 3.1 Equations d'évolution

La quantité de puissance dissipée à un instant  $t$  est donnée par le produit du taux de production d'entropie et de la température absolue. La source de dissipation spécifique  $d$  s'exprime donc :

$$d = \dot{s}T + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{J}T - zT \quad (55)$$

$$= \dot{s}T + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \mathbf{Q} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\mathbf{Q}}{T} \cdot \nabla T - r - h \quad (56)$$

En combinant la forme locale du premier principe de la thermodynamique (9) et la définition (27) de l'enthalpie libre spécifique, la relation précédente devient :

$$d = \frac{1}{\rho_0} \tilde{\Sigma} : \tilde{\mathbf{L}}_p - \frac{1}{\rho_0} \sum_s \left( X_s \dot{\alpha}_s + R_s \dot{\rho}_s + Y_s \dot{\phi}_s + \mathbf{G}_s \cdot \nabla \dot{\phi}_s \right) - \frac{\mathbf{Q}}{\rho_0 T} \cdot \nabla T - h \quad (57)$$

A partir de l'expression (50) de la force  $\mathbf{G}_s$  associée à  $\nabla \dot{\phi}_s$ , on obtient que :

$$\sum_s \mathbf{G}_s \cdot \nabla \dot{\phi}_s = GL \sum_s \left( D_{,\phi_s} \nabla D \cdot \nabla \dot{\phi}_s \right) \quad (58)$$

$$= GL \sum_s \left( D_{,\phi_s} \nabla \cdot \left( \nabla D \dot{\phi}_s \right) - D_{,\phi_s} \Delta D \dot{\phi}_s \right) \quad (59)$$

Pour que l'évolution d'un point matériel soit compatible avec le second principe de la thermodynamique, la source de dissipation spécifique  $d$  doit être non-négative (i.e.  $d \geq 0$ ). Il est possible de s'accommoder de cette restriction en adoptant la définition suivante pour la puissance spécifique  $h$  :

$$h = \frac{GL}{\rho_0} \sum_s \left( D_{,\phi_s} \nabla \cdot \left( \nabla D \dot{\phi}_s \right) \right) \quad (60)$$

L'expression de la source de dissipation spécifique  $d$  se réduit alors à :

$$d = \frac{1}{\rho_0} \tilde{\Sigma} : \tilde{\mathbf{L}}_p - \frac{1}{\rho_0} \sum_s \left( X_s \dot{\alpha}_s + R_s \dot{\rho}_s - A_s \dot{\phi}_s \right) - \frac{\mathbf{Q}}{\rho_0 T} \cdot \nabla T \quad (61)$$

La relation précédente fait apparaître la force  $A_s$ , qui contrôle le développement de l'endommagement et qui inclut une contribution non-locale. Cette force est définie pour chaque système de glissement  $s$

comme suit :

$$A_s = GL\Delta DD_{,\phi_s} - Y_s \quad (62)$$

$$= GL\Delta DD_{,\phi_s} - \frac{G}{L} DD_{,\phi_s} + \frac{1}{2}\omega_{,\phi_s} (U(\sigma_s) A_{nn}\sigma_s^2 + A_{nm}\tau_s^2 + A_{nk}\pi_s^2) \quad (63)$$

Dans le cadre des matériaux standards généralisés, les lois d'évolution associées aux différentes variables internes sont obtenues à partir d'un potentiel de dissipation  $\varphi$ . Le potentiel de dissipation  $\varphi$  est une fonction des forces dissipatives, et éventuellement des variables d'état, telle que :

$$\varphi = \varphi(\tilde{\Sigma}, X_s, R_s, A_s, \nabla T, \phi_s, T) \quad (64)$$

Dans le cas présent, on suppose que le potentiel de dissipation peut être décomposé de la manière suivante :

$$\varphi = \varphi_p(\tilde{\Sigma}, X_s, R_s) + \varphi_d(A_s, \phi_s) + \varphi_{th}(\nabla T, T) \quad (65)$$

La partie plastique  $\varphi_p$  du potentiel de dissipation est donnée par :

$$\varphi_p = \frac{1}{\rho_0} \frac{K}{M+1} \sum_s \left( \frac{\langle |T_s - X_s| - R_s \rangle}{K} \right)^{M+1} \quad (66)$$

où  $T_s = \mathbf{m}_s \cdot \tilde{\Sigma} \cdot \mathbf{n}_s$  est la contrainte tangentielle appliquée au  $s$ ème système de glissement,  $K$  et  $M$  sont des paramètres de viscosité. Plus particulièrement,  $K$  représente la résistance au mouvement des dislocations tandis que l'exposant  $M$  contrôle la sensibilité à la vitesse de déformation.

La contribution  $\varphi_d$  de l'endommagement au potentiel de dissipation s'écrit :

$$\varphi_d = \frac{1}{\rho_0} \frac{W}{P+1} \sum_s (1 - \phi_s) \left( \frac{\langle A_s \rangle}{W} \right)^{P+1} \quad (67)$$

où  $W$  est un paramètre qui gouverne la résistance d'un matériau au développement de l'endommagement de fatigue. La dépendance au temps du processus d'endommagement de fatigue peut être ajustée avec le paramètre  $P$ .

Enfin, pour la partie thermique  $\varphi_{th}$  du potentiel de dissipation, on adopte la forme quadratique classique :

$$\varphi_{th} = \frac{1}{2\rho_0 T} \nabla T \cdot \mathbf{F}_p^{-1} \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{F}_p^{-T} \cdot \nabla T \quad (68)$$

où  $\boldsymbol{\kappa}$  est le tenseur de conductivité thermique défini sur la configuration intermédiaire.

La définition du potentiel de dissipation permet d'établir l'ensemble des lois d'évolution associées aux

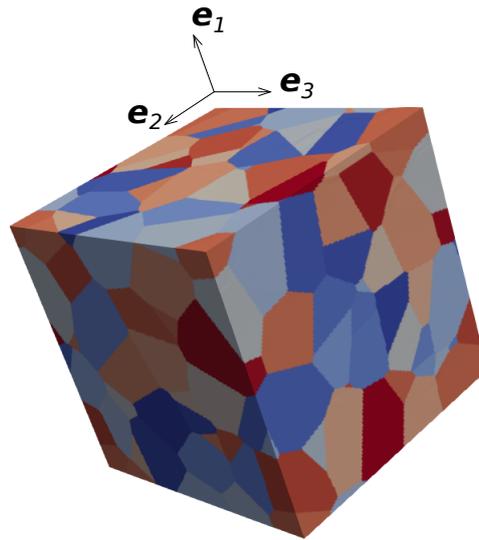


FIGURE 3 – Représentation de l'élément de volume polycristallin obtenu par une tessellation de Voronoï avec 100 germes.

différentes variables internes :

$$\tilde{\mathbf{L}}_p = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} = \sum_s \dot{\gamma}_s \mathbf{m}_s \otimes \mathbf{n}_s \quad (69)$$

$$\dot{\alpha}_s = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial X_s} = \dot{\gamma}_s \quad (70)$$

$$\dot{\rho}_s = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial R_s} = |\dot{\gamma}_s| \quad (71)$$

$$\dot{\phi}_s = \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial A_s} = (1 - \phi_s) \left( \frac{\langle A_s \rangle}{W} \right)^P \quad (72)$$

$$\mathbf{Q} = -\rho_0 T \frac{\partial \phi}{\partial \nabla T} = -\mathbf{F}_p^{-1} \cdot \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{F}_p^{-T} \cdot \nabla T \quad (73)$$

Le taux de glissement plastique  $\dot{\gamma}_s$  pour un système  $s$  est donné par :

$$\dot{\gamma}_s = \left( \frac{\langle |T_s - X_s| - R_s \rangle}{K} \right)^M \text{sign}(T_s - X_s) \quad (74)$$

Le modèle de comportement proposé, qui vise à modéliser l'amorçage et la propagation des fissures de fatigue, est formé par les équations d'état (45) à (50) et les équations d'évolution (69) à (73).

## 4 Applications

À des fins d'illustration, l'approche proposée est utilisée pour étudier le comportement en fatigue d'un élément de volume périodique de taille unitaire (i.e.  $L_1 = L_2 = L_3 = 1$  mm). L'élément de volume, représenté sur la figure 3, est composé de cent grains équiaxes d'orientation cristallographique aléatoire. Le glissement plastique est limité aux douze systèmes de glissement octaédriques  $\{111\}\langle 110 \rangle$ . Les paramètres utilisés pour les simulations sont listés dans le tableau 2.

Pour la résolution des équations de champ résultant de la compatibilité et de l'équilibre statique (voir section 2), on s'appuie sur la méthode spectrale proposée par [25], en particulier sur les travaux de [26]

Phénomène	Paramètres			
Elasticité	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{44}$	
	159 GPa	122 GPa	81 GPa	
Viscoplasticité	$K$	$M$		
	100 MPa	10		
Ecrouissage	$H$	$N$	$C$	
	50 MPa	0.1	5000 MPa	
Endommagement	$W$	$P$	$G$	$L$
	0.8 MPa	4	1 J/m <sup>2</sup>	0.04 mm
	$A_{nm}$	$A_{nk}$	$A_{nn}$	
	$10^{-5} \text{ MPa}^{-1}$	$10^{-6} \text{ MPa}^{-1}$	$10^{-6} \text{ MPa}^{-1}$	

TABLE 2 – Liste des paramètres utilisés pour l'application du modèle de comportement proposé. Seules les constantes élastiques indépendantes sont indiquées.

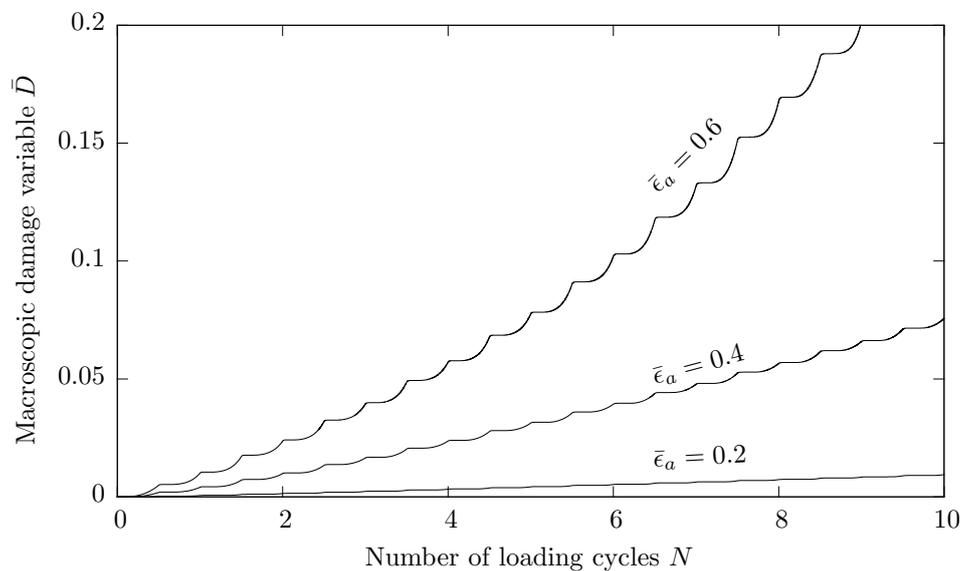


FIGURE 4 – Evolution de la variable d'endommagement macroscopique  $\bar{D}$  en fonction du nombre de cycles de chargement  $N$  lors d'un essai de traction-compression pour différentes amplitudes de déformation.

et [27] pour l'extension de cette méthode au contexte des transformations finies. Pour l'application de la méthode spectrale, l'élément de volume est ici discrétisé en  $192 \times 192 \times 192$  voxels.

Afin de suivre le développement de l'endommagement, on introduit une variable d'endommagement macroscopique. Cette variable, notée  $\bar{D}$ , est simplement définie comme étant la moyenne volumique de la variable  $D$ , soit :

$$\bar{D}(t) = \frac{1}{\mathcal{V}_0} \int_{\mathcal{V}_0} D(\mathbf{X}, t) dV \quad (75)$$

**Traction-compression** La première application concerne l'étude du comportement en fatigue de l'agrégat lorsque celui-ci est soumis à un essai de traction-compression symétrique à déformation imposée. La fréquence de chargement  $f$  est fixée à 1 Hz et l'amplitude de déformation axiale  $\bar{\epsilon}_a$  varie de 0.2% to 0.6%.

L'évolution de la variable d'endommagement macroscopique  $\bar{D}$  en fonction du nombre de cycles de

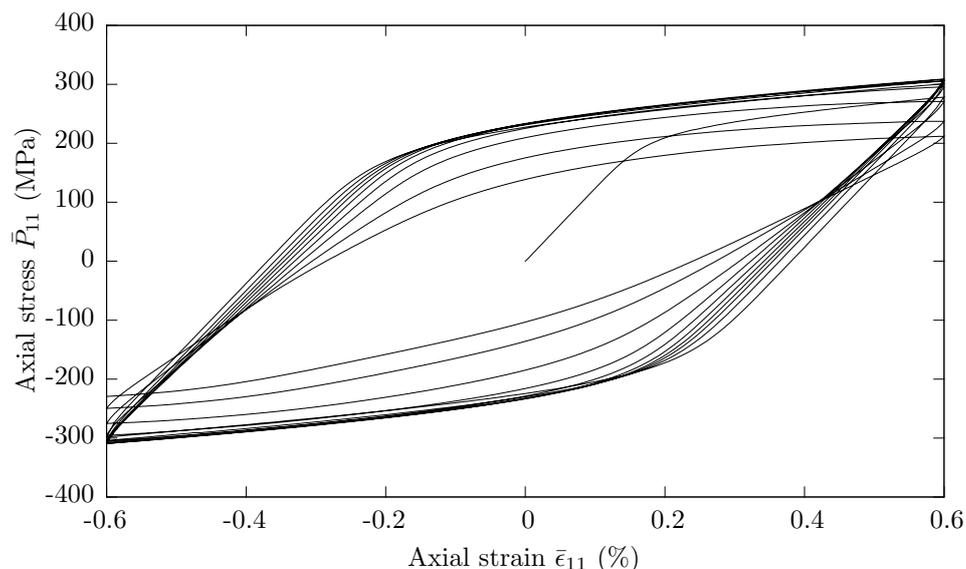


FIGURE 5 – Evolution de la contrainte nominale axiale macroscopique  $\bar{P}_{11}$  en fonction de la déformation axiale macroscopique  $\bar{\epsilon}_{11}$  lors d'un test de traction-compression avec une amplitude de déformation  $\bar{\epsilon}_a$  0,6 %.

chargement  $N$  est présentée sur la Figure 4 pour les différentes amplitudes de déformation. Comme attendu, une augmentation de l'amplitude de déformation facilite le développement de l'endommagement.

La contrainte nominale axiale  $\bar{P}_{11}$  est représentée en fonction de la déformation axiale  $\bar{\epsilon}_{11}$  sur la figure 5 pour une amplitude de déformation  $\bar{\epsilon}_a$  de 0,6 %. En raison du développement progressif de l'endommagement, une diminution importante de la contrainte est observée lors du dernier cycle de chargement. Comme le montre la figure 6, cette diminution de contrainte correspond à la situation où de nombreuses fissures se sont amorcées puis propagées, ce qui entraîne une réduction importante de la rigidité globale de l'élément de volume.

Dans les matériaux polycristallins, les joints de grains sont connus pour être des sites préférentiels pour l'initiation des fissures [28, 29]. Comme illustré par la figure 7, qui présente l'évolution de la variable d'endommagement en fonction de la distance au joint de grains le plus proche  $d_{GB}$  pour une amplitude de déformation axiale  $\bar{\epsilon}_a$  de 0,6 %, cet aspect est correctement décrit par le modèle proposé.

Aussi, d'après le travail expérimental de [30], les zones candidates à l'amorçage de fissures sont celles pour lesquelles une quantité importante d'énergie est dissipée en chaleur dès les premiers cycles de chargement. Comme illustré par la figure 8, qui montre la quantité locale d'énergie dissipée en chaleur par cycle de chargement<sup>2</sup>, le modèle proposé intègre correctement cet aspect.

**Cisaillement** Afin d'étudier l'impact des conditions de chargement sur l'accumulation d'endommagement de fatigue, le cas d'un essai de cisaillement cyclique à déformation imposée est maintenant considéré. La variable d'endommagement macroscopique  $\bar{D}$  est tracée en fonction du nombre de cycles  $N$  sur la figure 9 pour différentes amplitudes de déformation de cisaillement  $\bar{\gamma}_a$  (de 0,4 % à 0,8 %). Le champ d'endommagement final, obtenu pour une amplitude de déformation de cisaillement de 0,8 %, est présenté sur la Figure 10. On peut remarquer que l'évolution de l'endommagement est cohérente

2. La densité moyenne d'énergie dissipée par cycle de chargement  $w_d$  est donnée par  $w_d(\mathbf{X}) = \oint \rho_0(\mathbf{X}) d(\mathbf{X}, t) dt$ .

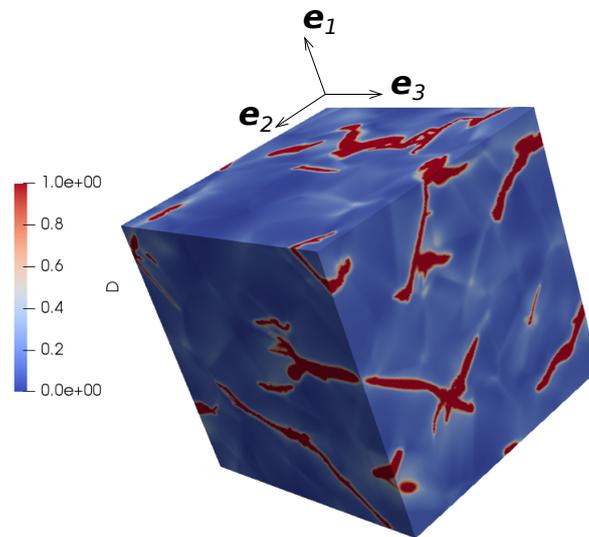


FIGURE 6 – Champ d'endommagement  $D$  obtenu à la fin d'un test de traction-compression avec une amplitude de déformation  $\bar{\epsilon}_a$  0,6 %.

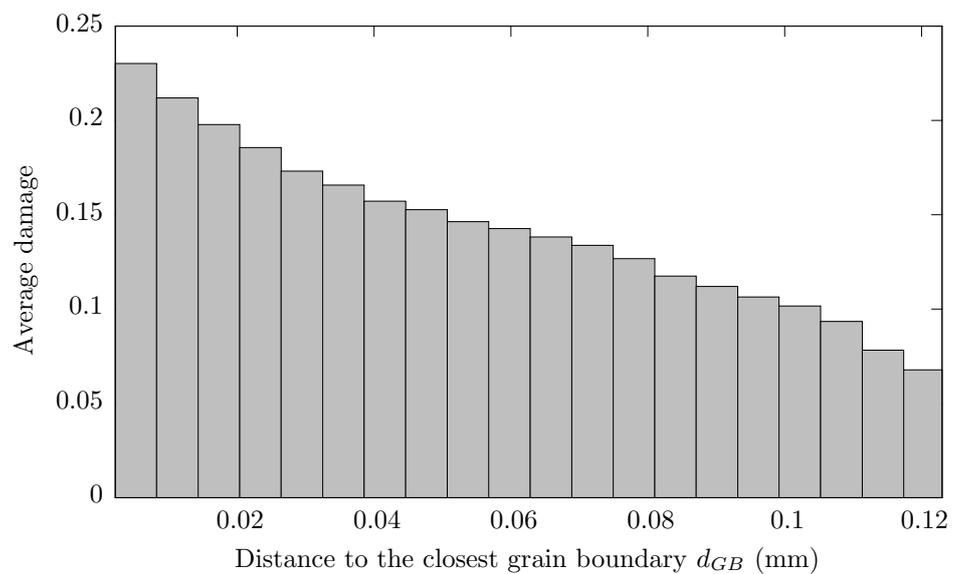


FIGURE 7 – Evolution de la variable d'endommagement en fonction de la distance au plus proche joint de grain  $d_{GB}$  lors d'un test de traction-compression avec une amplitude de déformation  $\bar{\epsilon}_a$  0,6 %.

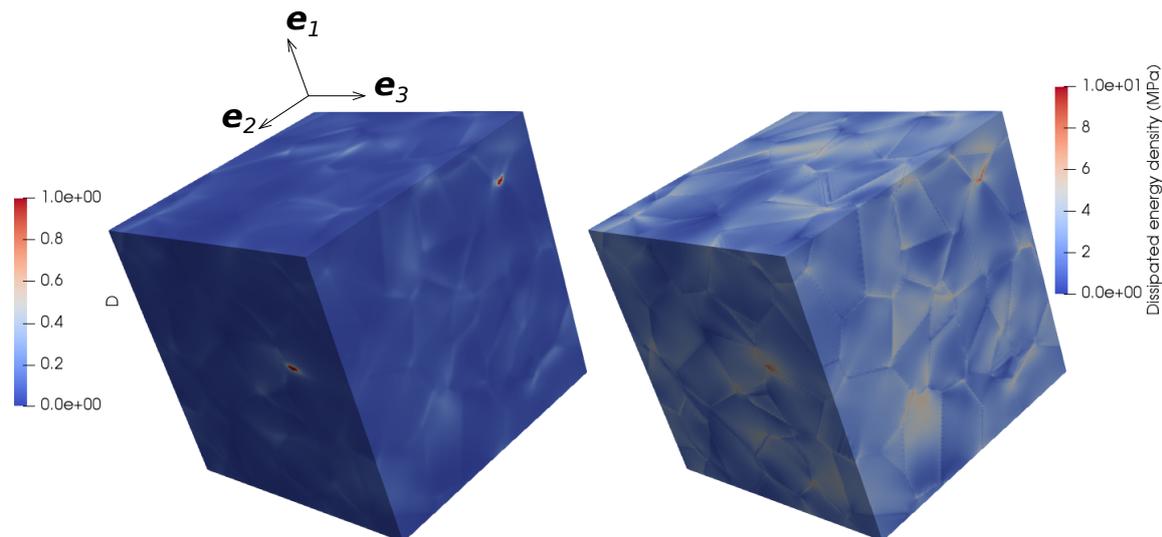


FIGURE 8 – Champ d’endommagement intermédiaire  $D$  pour un test de traction-compression avec une amplitude de déformation  $\bar{\epsilon}_a$  de 0,6 % (à gauche). Densité d’énergie dissipée moyenne par cycle de chargement  $w_d$  pour un test de traction-compression avec une amplitude de déformation  $\bar{\epsilon}_a$  de 0,6 % (à droite). Les résultats intermédiaires ont été obtenus à la fin du quatrième cycle de chargement (i.e.  $N = 4$ ).

avec les observations expérimentales montrant que les fissures de fatigue se développent de préférence sur des plans orientés de manière favorable pour le glissement plastique [1].

**Impact de pré-fissures** La dernière application porte sur l’impact d’une fissure initiale sur le comportement en fatigue de l’élément de volume polycristallin. À cette fin, une fissure circulaire de rayon 0,15 mm est insérée au centre de l’élément de volume. Les conditions de chargement sont les mêmes que dans la section précédente et correspondent donc à un test de cisaillement cyclique contrôlé en déformation. Comme le montrent les figures 11 et 12, deux cas différents sont examinés, en fonction de l’orientation de la fissure. Dans le premier cas, la surface de la fissure est normale à la direction  $e_1$ . Dans le second cas, la fissure est perpendiculaire à la direction  $e_3$ .

L’évolution de la variable d’endommagement macroscopique  $\bar{D}$  en fonction du nombre de cycles de chargement est montrée à la figure 13 pour une amplitude de déformation de cisaillement  $\bar{\gamma}_a$  de 0,8 %. L’endommagement augmente plus rapidement dans le premier cas, qui correspond à la situation où la fissure initiale est contenue dans le plan avec des contraintes de cisaillement maximales. Comme l’illustre la figure 11, dans le premier cas, la fissure initiale s’étend rapidement le long de la direction  $e_2$ , pour laquelle les contraintes de cisaillement sont maximales. Dans le second cas, le développement de l’endommagement est peu affecté par la fissure initiale. En effet, dans ce cas, les concentrations de contraintes dues aux hétérogénéités microstructurales sont plus critiques du point de vue de l’initiation des fissures de fatigue. De nombreuses fissures s’amorcent donc loin la fissure initiale (voir 12).

## 5 Conclusions

Un cadre théorique pour la modélisation de l’amorçage et des premiers stades de propagation des fissures de fatigue dans les matériaux polycristallins est proposé. À cette fin, on développe un modèle d’endommagement non-local prenant explicitement en compte la réduction progressive de rigidité due à la

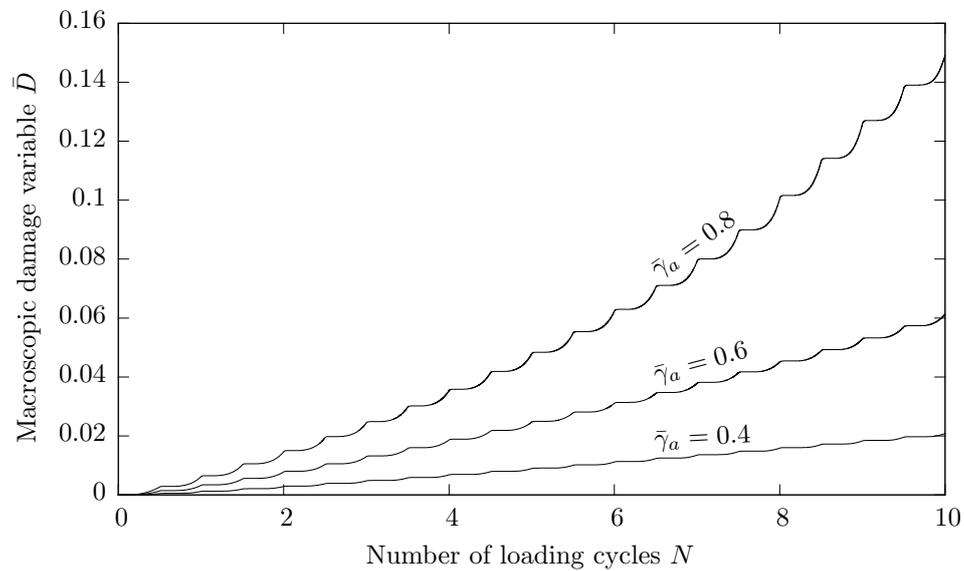


FIGURE 9 – Evolution de la variable d’endommagement macroscopique  $\bar{D}$  en fonction du nombre de cycles de chargement  $N$  lors d’un essai de cisaillement pour différentes amplitudes de déformation.

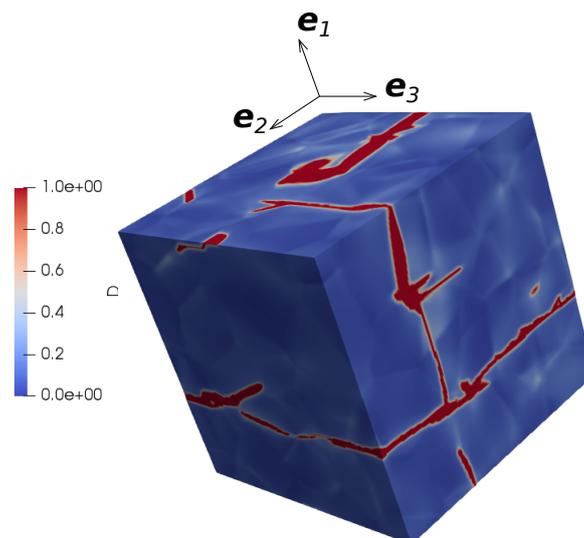


FIGURE 10 – Champ d’endommagement  $D$  obtenu à la fin d’un test de cisaillement avec une amplitude de déformation  $\bar{\gamma}_a$  0,8 %.

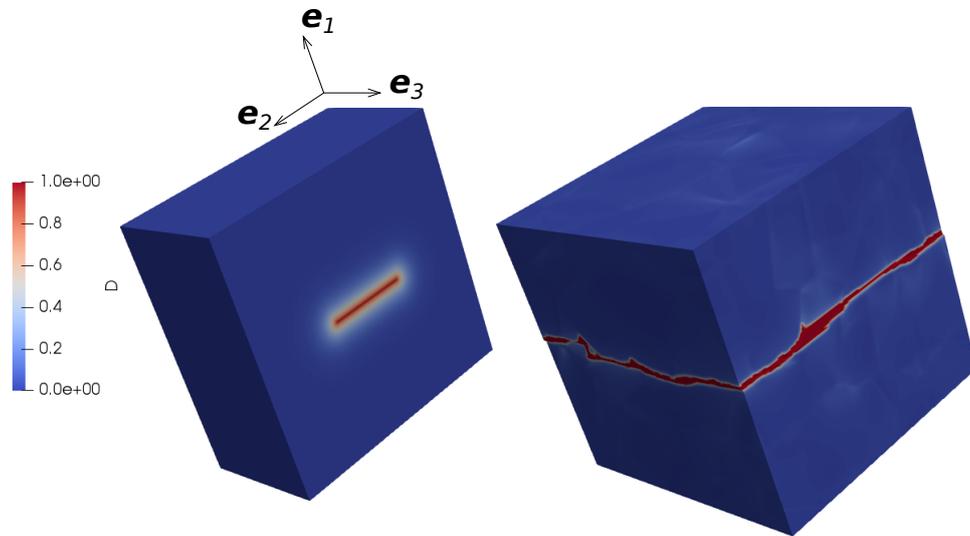


FIGURE 11 – Champs d'endommagement  $D$  initial (gauche) et final (droite) pour un test de cisaillement avec une amplitude de déformation  $\bar{\gamma}_a$  0,8 %. La fissure initiale est orthogonal à la direction  $e_1$ .

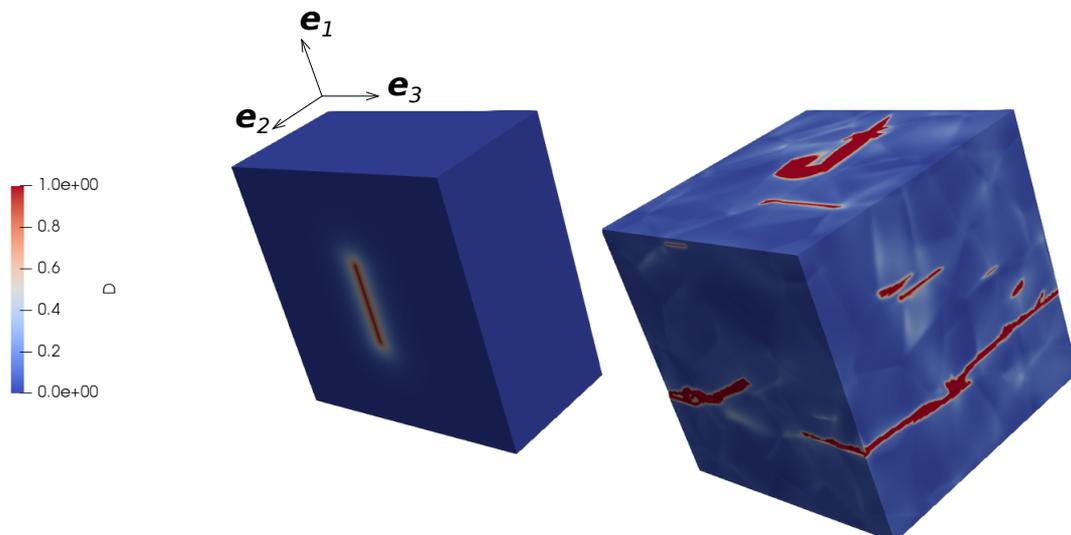


FIGURE 12 – Champs d'endommagement  $D$  initial (gauche) et final (droite) pour un test de cisaillement avec une amplitude de déformation  $\bar{\gamma}_a$  0,8 %. La fissure initiale est orthogonal à la direction  $e_3$ .

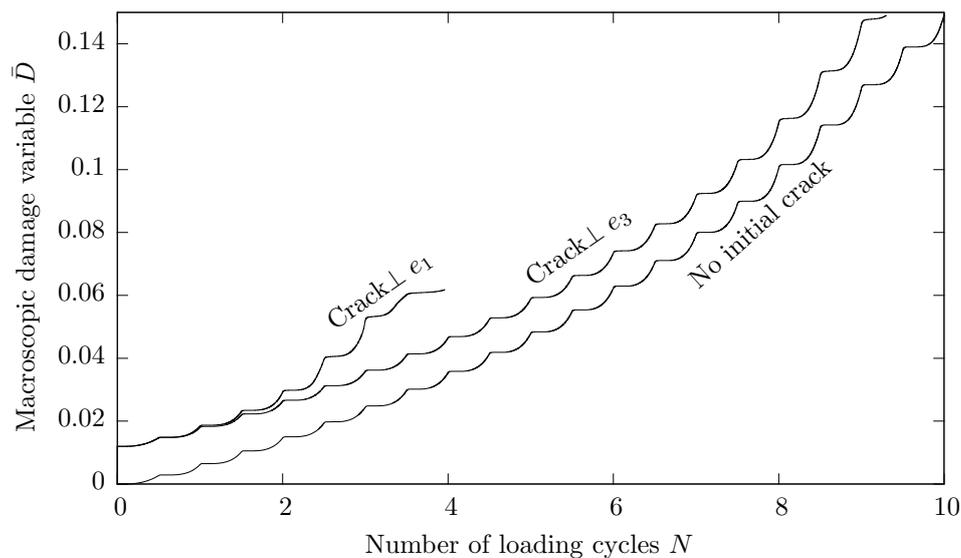


FIGURE 13 – Evolution de la variable d’endommagement macroscopique  $\bar{D}$  en fonction du nombre de cycles de chargement  $N$  lors d’un essai de cisaillement pour une amplitude de déformation  $\bar{\gamma}_a$  de 0,8 %.

formation de fissures de fatigue. Spécifiquement, une variable d’endommagement est attachée à chaque système de glissement de manière à prendre en compte l’aspect anisotrope de l’endommagement de fatigue. Les gradients spatiaux des variables d’endommagement sont traités comme des variables d’état supplémentaires, ce qui permet de prendre en compte l’augmentation de l’énergie de surface associée à la formation de fissures de fatigue. Pour que les équations d’évolution soient compatibles avec le deuxième principe de la thermodynamique, une contribution supplémentaire au transfert d’entropie a été postulée. Les relations de comportement ont ensuite été implémentées dans un solveur spectral pour résoudre les équations de champ régissant le comportement d’un élément de volume polycristallin.

À des fins d’illustration, le modèle proposé a été utilisé pour décrire le comportement en fatigue d’un élément de volume polycristallin périodique. D’après les résultats numériques, l’impact du mode de chargement sur l’orientation des plans d’amorçage de la fissure est correctement reproduit. De plus, étant donné que le modèle est formulé dans un cadre thermodynamique cohérent, il est possible d’étudier la compétition entre dissipation et stockage d’énergie au cours d’un processus de déformation cyclique. Enfin, le modèle permet d’évaluer l’impact des caractéristiques microstructurales (défauts, joints de grains, par exemple) sur le comportement en fatigue des matériaux polycristallins.

Les travaux futurs porteront sur l’effet de l’état de contrainte moyen sur le comportement en fatigue des matériaux métalliques, ce qui n’est actuellement pas pris en compte. À cette fin, le couplage possible entre les variables d’écrouissage et les variables d’endommagement doit être étudié. Comme discuté dans [15], ce couplage devrait en effet être un élément clé pour la prise en compte de l’influence de l’état de contrainte moyen.

## Références

- [1] K.S. Chan, Roles of microstructure in fatigue crack initiation, *Int. J. Fatigue*, 32 (2010) 1428–1447.

- [2] G.M. Castelluccio, D.L. McDowell, Microstructure-sensitive small fatigue crack growth assessment : Effect of strain ratio, multiaxial strain state, and geometric discontinuities, *Int. J. Fatigue*, 82 (2016) 521–529.
- [3] D.L. McDowell, F.P.E. Dunne, Microstructure-sensitive computational modeling of fatigue crack formation, *Int. J. Fatigue*, 32 (2010) 1521–1542.
- [4] K. Dang Van. Sur la résistance à la fatigue des métaux, *Sciences Techniques Armement*, 3 (1973).
- [5] A. Fatemi, D.F. Socie DF, A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, 11 (1988) 149–65.
- [6] C. Przybyla, R. Prasannavenkatesan, N. Salajegheh, D.L. McDowell, Microstructure-sensitive modeling of high cycle fatigue, *International Journal of Fatigue*, 32 (2010) 512–525.
- [7] Y. Guilhem, S. Basseville, F. Curtit, J.M. Stéphan, G. Cailletaud, Investigation of the effect of grain clusters on fatigue crack initiation in polycrystals, *International Journal of Fatigue*, 32 (2010) 1748–1763.
- [8] C. Robert, N. Saintier, T. Palin-Luc, F. Morel, Micro-mechanical modelling of high cycle fatigue behaviour of metals under multiaxial loads, *Mech. Mater.*, 55 (2012) 112–29.
- [9] R. Guerchais, C. Robert, F. Morel, N. Saintier, Micromechanical study of the loading path effect in high cycle fatigue, *Int. J. Fatigue*, 59 (2014) 64–75.
- [10] G.M. Castelluccio, D.L. McDowell, A mesoscale approach for growth of 3D microstructurally small fatigue cracks in polycrystals, *Int J Damage Mech*, 23 (2014) 791–818.
- [11] G.M. Castelluccio, D.L. McDowell, Mesoscale modeling of microstructurally small fatigue cracks in metallic polycrystals, *Materials Science & Engineering A*, 598 (2014) 34–55.
- [12] J. Lemaitre, *A Course on Damage Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [13] V. Monchiet, E. Charkaluk, D. Kondo, Plasticity-damage based micromechanical modelling in high cycle fatigue, *C. R. Mecanique*, 334 (2006) 129–136.
- [14] J. Zghal, H. Gmati , C. Mareau, F. Morel, A crystal plasticity based approach for the modelling of high cycle fatigue damage in metallic materials, *International Journal of Damage Mechanics*, 25 (2016) 611–628.
- [15] C. Mareau, F. Morel, A continuum damage mechanics-based approach for the high cycle fatigue behavior of metallic polycrystals, *International Journal of Damage Mechanics*, (2018) 1–19.
- [16] G.A. Maugin, W. Muschik, Thermodynamics with Internal Variables. Part I. General Concepts, *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 19 (1994) 217–249.
- [17] R. de Borst, J. Pamin , M.G.D. Geers, On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 18 (1999) 939–962.
- [18] M. Frémond, B. Nedjar, Damage, gradient of damage and principle of virtual power, *Int. J. Solids and Structures*, 33 (1996) 1083–1103.
- [19] G.A. Maugin, Internal Variables and Dissipative Structures, *J. Non-Equilib. Thermodyn.*, 15 (1990) 173–192.
- [20] P. Germain, Q.S. Nguyen, P. Suquet, Continuum thermodynamics, *Journal of Applied Mechanics*, 50 (1983) 1010–1020.
- [21] P. Ireman, Q.S. Nguyen, Using the gradients of temperature and internal in Continuum Thermodynamics, *C. R. Mecanique*, 332 (2004) 249–255.

- [22] E. H. Lee, Elastic-plastic deformation at finite strains, *J. Appl. Mech.*, 36 (1969) 1–6.
- [23] Q. Chen, H.W. Liu, Resolved shear stress intensity coefficient and fatigue crack growth in large crystals, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 10 (1988) 111–122.
- [24] C. Miehe, F. Welschinger, M. Hofacker, Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field FE implementations, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 83 (2010) 1273–1311.
- [25] H. Moulinec, P. Suquet, A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 157 (1998) 69–94.
- [26] N. Lahellec, J .C. Michel, H. Moulinec, P. Suquet, Analysis of inhomogeneous materials at large strains using Fast Fourier Transforms, in : C. Miehe, *Computational Mechanics of Solid Materials at large Strains*, Kluwer Academic Press, Stuttgart, 2003, pp. 247–258.
- [27] P. Eisenlohr, M. Diehl, R.A. Lebensohn, F. Roters, A spectral method solution to crystal elastoviscoplasticity at finite strains, *International Journal of Plasticity*, 46 (2013) 37–53.
- [28] R. Chang, A dislocation mechanism of grain boundary crack nucleation and growth under low cyclic stresses, *Scripta Metall.*, 13 (1979) 1079–1081.
- [29] H.J. Christ, On the orientation of cyclic-slip-induced intergranular fatigue cracks in face-centered cubic metals, *Mater. Sci. Engng A*, 117 (1989) L25–L29.
- [30] B. Berthel, B. Wattrisse, A. Chrysochoos, A. Galtier, Thermographic Analysis of Fatigue Dissipation Properties of Steel Sheets, *Strain*, 43 (2007) 273–279.