

# Loi de comportement globale non-linéaire pour des coques en béton armé en prenant en compte le cisaillement hors plan

O. LHERMINIER<sup>a</sup>, M. HUGUET<sup>b</sup>, B. NEDJAR<sup>a</sup>, S. ERLICHER<sup>b</sup>,  
P. ARGOUL<sup>a</sup>

a. Université Paris-Est – IFSTTAR-MAST-EMGCU,  
14-20 Bd Newton, Cité Descartes, 77477 Marne-la-Vallée Cedex 2 – France  
olivier.lherminier@ifsttar.fr

b. EGIS, 4 rue Dolorès Ibarruri, 93188 Montreuil Cedex – France  
miquel.huguet-aguilera@egis.fr

## Résumé :

*Pour les installations nucléaires existantes ou en phase de conception, il est nécessaire de pouvoir établir un diagnostic sismique réaliste, afin de prédire le comportement d'une structure en béton armé pendant un séisme extrême et ses conditions d'endommagement après le séisme. D'un point de vue structurel et parasismique, la particularité des bâtiments des centrales nucléaires est que leur système de contreventement est essentiellement constitué de voiles connectés entre eux et avec les planchers par des chaînages fortement armés : il n'y a pratiquement pas de portiques (systèmes poteau-poutre). Cet article concerne donc essentiellement des voiles et des planchers en béton armé (des éléments structuraux bidimensionnels avec comportement de membrane ou de coque). De plus, la prise en compte de la fissuration dans les codes Éléments Finis pour les éléments en béton armé des bâtiments industriels de grande taille est un sujet loin d'être maîtrisé. Le temps de calcul dans un code Éléments Finis est un facteur clef lors de la formulation d'une loi constitutive pour le béton armé prenant en compte la fissuration. Ainsi, cet article concerne une approche dite globale, où le béton et les armatures sont pris comme un seul matériau "béton armé". Le modèle non-linéaire pour les coques en béton armé GLRC\_HEGIS est développé dans le cadre rigoureux de la thermodynamique des processus irréversibles et implémenté numériquement sur le logiciel Code\_Aster. Il prend en compte quatre phénomènes dissipatifs, en utilisant une analyse multi-échelle analytique : l'endommagement du béton en compression, la fissuration du béton armé en traction, le glissement entre les aciers et le béton et la plastification des aciers. La modélisation du comportement hors plan avec GLRC\_HEGIS a été abordée avec une approche qui prend en compte (de manière simplifiée) le comportement en flexion composée (efforts de membrane plus moments hors plan) mais qui ne permet pas de tenir compte de l'effet de l'effort tranchant hors plan sur la fissuration des dalles en béton armé, ni de la contribution à la résistance du ferrailage transversale (épingles). Les travaux en cours concernent la possibilité de prendre en compte le cisaillement hors plan et de remédier aux restrictions de l'approche précédente. Les développements théoriques et les validations numériques du passage d'un élément coque de Love-Kirchhoff (DKTG sans cisaillement transverse) à un élément coque de Reissner-Mindlin (Q4GG avec cisaillement transverse) sont présentés dans cet article. Les possibilités que cette amélioration apporte sont illustrées sur des applications du génie civil et les résultats sont comparés à ceux donnés par l'approche précédente.*

## Abstract :

*For existing or in the design phase nuclear installations in France and abroad, it becomes necessary to be able to establish a realistic seismic diagnosis, in order to predict the behavior of a reinforced concrete structure during an extreme earthquake and its damage conditions after the earthquake. From a structural and earthquake-resistant point of view, the peculiarity of nuclear power plant buildings is that their bracing system essentially consists of shells connected to each other and to the floors by heavily armed chaining : there are practically no gantries (column-beam systems). Therefore, this paper mainly concern reinforced concrete walls and floors (two-dimensional structural elements with membrane or shell behavior). Moreover, the cracking phenomenon in Finite Element (FE) software for large reinforced concrete buildings is far from being under control. The calculation time in a FE software is a crucial point when a reinforced concrete constitutive law taking into account cracking is being formulated. Therefore, this paper focuses on a global approach where concrete and steel reinforcement are taken as an unique material "reinforced concrete". The non-linear model for reinforced concrete shells GLRC\_HEGIS is developed under the rigorous framework of the Thermodynamics of Irreversible Processes and numerically implemented on code\_Aster software. The model takes into account four dissipating phenomena, using an analytic homogenization : concrete damage in compression, reinforced concrete cracking in tension, steel-concrete relative slip and steel bars yielding. The modeling of out-of-plane behavior with GLRC\_HEGIS has been performed through an approach which estimates in a simplified way the behavior in combined bending (membrane forces plus out-of-plane moments) and which does not allow to take into account the effect of out-of-plane shear force on the cracking of reinforced concrete slabs, nor the contribution to the strength of the transverse reinforcement. The work in progress studies the possibility to take into account the out-of-plane shear, to go further in the modeling and to overcome the restrictions of the previous approach. Theoretical development and numeric validations of the skipping from a Love-Kirchhoff shell element (DKTG without transverse shear) to a Reissner-Mindlin (Q4GG with transverse shear) are presented in this paper. The possibilities that this improvement brings are illustrated on civil engineering applications and compared to the obtained results with the previous approach.*

**Mots clefs : Béton armé, Fissuration, Endommagement, Flexion et cisaillement transverse, Coque, Installations nucléaires, Lois de comportement, Éléments finis, Eurocode 2, Eurocode 8**

# 1 Introduction

Pour de nombreuses applications, les analyses des structures en Béton Armé (BA) menées par des bureaux d'étude sont faites en utilisant des modèles Éléments Finis (EF) en supposant que le comportement de la structure reste linéaire élastique. Cependant, dans certains cas (e.g. pour les bâtiments nucléaires), des vérifications structurelles doivent être effectuées pour des sollicitations extrêmes ; dans ce cas, un comportement non-linéaire est nécessaire pour des calculs cycliques concernant le BA.

Le comportement non-linéaire à l'échelle globale d'un élément en BA peut être défini par l'apparition et l'évolution de différents phénomènes non-linéaires dissipant de l'énergie. Dans cet article, les murs et les dalles des structures analysées sont modélisés avec la loi de comportement GLRC\_HEGIS [2]. Ce modèle prend en compte quatre mécanismes non-linéaires : la fissuration du BA en traction, l'endommagement (ou réduction de rigidité) du béton en compression, le glissement entre les aciers et le béton et la plastification des aciers. Il permet une modélisation globale performante se basant sur un EF coque mono-couche en utilisant une approche analytique permettant une étude multi-échelle et une formulation du modèle à l'échelle globale (macro-échelle). L'élaboration d'un modèle thermodynamiquement admissible implique que le premier et le second principes de la thermodynamique doivent être respectés. La formulation de l'énergie libre de Helmholtz ainsi que les forces thermodynamiques associées à l'évolution des variables internes constituant le modèle permettent d'établir les potentiels de dissipation (pseudo-potentiels) qui régissent la loi de comportement. Les principes généraux pour obtenir les déformations et les contraintes généralisées ainsi que l'évolution des phénomènes non-linéaires de la loi de comportement sont présentés dans la section 2.

Le comportement des coques, étudié dans la section 3, est un comportement 3D en "contraintes planes" : la contrainte transversale est nulle car considérée comme négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur des contraintes. Les déformations membranaires, les déformations de flexion (ou variations de courbure) et les déformations associées aux cisaillements transverses de la surface moyenne sont disponibles pour les éléments coques de Reissner-Mindlin (Q4GG avec cisaillement transverse) mais seul les deux premières (déformations membranaires et déformations de flexion) sont prises en compte par un élément coque de type Love-Kirchhoff (DKTG sans cisaillement transverse). Une cinématique plus élaborée (e.g. avec cisaillement transverse) permet de décrire plus précisément la physique et les phénomènes mécaniques régissant le comportement des murs ou des dalles en BA ayant une épaisseur conséquentes (et étudiés dans le génie civil nucléaire). Les développements intégrant le cisaillement transverse à la loi de comportement GLRC\_HEGIS et menant au calcul de la matrice de rigidité tangente sont présentés dans la section 4.

Des applications numériques sont faites dans la section 5. Des calculs de validation "tests" pour vérifier la bonne implémentation de la loi de comportement permettent de vérifier la cohérence des résultats en les comparant à d'autres. Ce sont des calculs sur quelques éléments finis de poutres ou de membranes simples sur des cas de charges statiques ou dynamiques et des analyses modales avec des comparaisons avec d'autres lois de comportement ou avec des résultats expérimentaux. Pour chaque mécanismes de la loi de comportement, il est nécessaire de valider ces tests pour vérifier si la modélisation numérique est cohérente avec la réalité des phénomènes observés. Ici, ne sont présentés que deux de ces cas tests : un premier en flexion pure et un second en cisaillement transverse. Les résultats sont présentés en comparant les différences obtenues à l'échelle globale (force, déplacement) et à l'échelle locale (ouverture de fissure, plastification des aciers) en étudiant l'utilité de la prise en compte du cisaillement transverse.

## 2 Loi de comportement GLRC\_HEGIS pour les coques en BA

Le modèle est implémenté dans le logiciel EF Code\_Aster [4] et permet une modélisation globale performante, étant implémenté dans un EF coque mono-couche et correspondant à un "matériau béton armé" équivalent. Pour obtenir un modèle en contraintes résultantes prenant en compte plusieurs phénomènes cycliques non-linéaires locaux qui sont à l'origine du comportement global des éléments en BA, des développements analytiques multi-échelle ont été menés dans [1]. Ainsi, il n'y a pas besoin de dépenser de temps de calcul numérique multi-échelle à chaque point de Gauss et à chaque pas de chargement. Le modèle résultant est formulé dans le cadre de la Thermodynamique des Processus Irréversibles ; la formulation détaillée peut être trouvée dans [3].

Le modèle GLRC\_HEGIS considère quatre différents phénomènes non-linéaires locaux :

- La fissuration du béton est le développement de discontinuités en déplacement (macro-fissures) dans le béton causé par des contraintes de traction. À chaque point de Gauss, un motif constant de fissuration stabilisée moyenne caractérisé par un espacement entre deux fissures  $s_r$  (obtenu avec la formule de Vecchio et Collins [5]) et une orientation  $\theta_r$  (perpendiculaire à la contrainte principale en traction) apparaît lorsque les contraintes de traction atteignent la limite en traction du béton  $f_{ct}$ . Après l'apparition des fissures, ces deux paramètres restent connus et constants (motif de fissuration fixe), et seulement les ouvertures de fissure normale  $w_n$  et tangentielle  $w_t$  peuvent évoluer avec les contraintes correspondant respectivement à l'effet de pont et à l'imbrication des granulats. Quatre familles de fissures sont considérées : pour chaque couche (supérieure et inférieure) de la coque en BA, le motif de fissuration typique des voiles en BA soumis à des chargements cycliques dans le plan peut être reproduit par deux familles de fissures caractérisées par deux orientations de fissure différentes.
- L'endommagement du béton est supposé être associé au développement de micro-fissures homogènes et diffuses dont résulte la réduction de rigidité du béton. Cette dégradation de la rigidité du béton n'a lieu qu'à des contraintes élevées et est associée au comportement en compression du béton. GLRC\_HEGIS considère que l'endommagement du béton est isotrope et il est introduit comme une variable interne d'endommagement  $d$  scalaire (deux valeurs définies pour les couches supérieure et inférieure de la coque en BA), positive, non-décroissante dans le temps et qui n'évolue qu'à des valeurs de contrainte importantes.
- Le glissement relatif entre le béton et les barres d'acier est à l'origine des contraintes d'adhérence pour chaque couche (supérieure et inférieure) d'armatures en acier en  $x$  et en  $y$ . Comme les contraintes sont transmises des aciers au béton entre deux fissures consécutives, ce phénomène est à l'origine de l'effet de raidissement en traction. Le modèle GLRC\_HEGIS utilise une variable inélastique de glissement béton-acier  $v^p$  pour limiter l'effet du raidissement en traction moyen à des valeurs données dans les codes de construction [6].
- La plastification des aciers est supposée être concentrée à l'intersection avec les fissures à l'aide du phénomène de transfert de contraintes par adhésion entre le béton et les aciers. Le modèle GLRC\_HEGIS considère que les armatures en acier ne reprennent que les efforts longitudinaux et que la loi constitutive du phénomène est une loi élasto-plastique caractérisée par un seuil constant égal à la limite d'élasticité de l'acier  $f_{sy}$  et dont la variable inélastique  $\epsilon^{ps}$  donne les déformations plastiques des aciers.

### 3 Comportement des coques avec et sans cisaillement transverse

Le choix d'un élément coque pour implémenter une loi de comportement non-linéaire prenant en compte des phénomènes mécaniques au niveau membranaire, de flexion et de cisaillement transverse pour des coques en BA nécessite une étude approfondie de la cinématique des éléments coques [7].

#### 3.1 Cinématique des éléments coques

Afin de correctement calculer les déformations d'une dalle en BA (voir Figure 1-a), il est nécessaire de paramétrer la coque avec un repère local (voir Figure 1-b). Les calculs au niveau des points de Gauss d'un élément coque se basent sur la discrétisation de la coque avec des équations par rapport à la surface moyenne, comme schématisé sur la Figure 1-c.

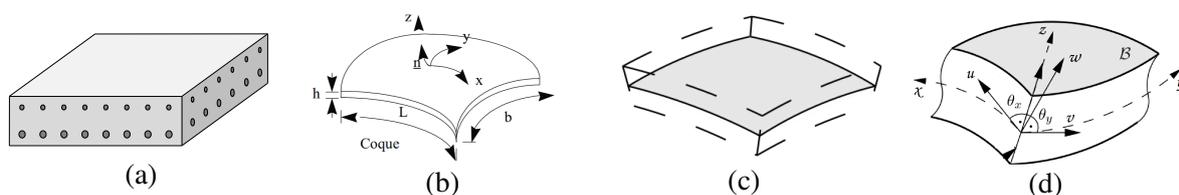


FIGURE 1 – (a) Schéma d'une dalle en BA, (b) paramétrisation de l'EF coque, (c) surface moyenne et (d) cinématique de l'EF coque.

On rappelle que la contrainte transversale  $\sigma_{zz}$  est nulle car considérée comme négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur des contraintes (hypothèse des contraintes planes). Les variables principales sont les déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$  et les rotations  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  et  $\theta_z$ , comme indiqué sur la Figure 1-d. Il est alors possible d'exprimer les déformations membranaires de la surface moyenne (ou extensions membranaires)  $e = [e_{xx}, e_{yy}, e_{xy}]^T$ , les variations de courbure (ou déformations de flexion)  $\kappa = [\kappa_{xx}, \kappa_{yy}, \kappa_{xy}]^T$  et les déformations associées aux cisaillements transverses (ou distorsions transverses)  $\gamma = [\gamma_x, \gamma_y]^T$  données par :

$$\begin{aligned}
 e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad ; \\
 \kappa_{xx} &= \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad ; \quad \kappa_{yy} = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad ; \quad \kappa_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad ; \\
 \beta_x &= \theta_y \quad ; \quad \beta_y = -\theta_x \quad ; \\
 \gamma_x &= \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_y = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \quad ,
 \end{aligned} \tag{1}$$

ce qui conduit à une écriture des déformations au niveau de la hauteur  $z$  de la coque :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{pmatrix} . \tag{2}$$

Remarque : la théorie de Reissner-Mindlin repose sur la cinématique présentée précédemment. Lorsque

l'on ne prend pas en compte les distorsions transverses  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$ , le modèle obtenu est celui de Love-Kirchhoff (éléments finis DKTG). Les deux rotations de la surface moyenne sont alors liées aux déplacements de la surface moyenne par la relation suivante :

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}. \quad (3)$$

### 3.2 Comportement global avec une coque Q4GG

Lors de l'utilisation d'un modèle global, la matrice de rigidité établit la relation entre le tenseur des déformations généralisées  $[\mathbf{e}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\gamma}]^T$  et le tenseur des contraintes généralisées  $[\mathbf{N}, \mathbf{M}, \mathbf{T}]^T$ . Les contraintes généralisées sont l'effort membranaire  $\mathbf{N}$ , le moment fléchissant  $\mathbf{M}$ , et le cisaillement transverse  $\mathbf{T}$  :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad ; \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz \quad ; \quad (4)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} dz .$$

Le fait de devoir résoudre au niveau des EF des problèmes en déplacements plutôt que des problèmes en contraintes par interpolation des déplacements nous amène à utiliser l'approche équivalente en déplacements du problème de Reissner formulé en contraintes. Lors de l'utilisation d'un modèle global, la relation entre les contraintes et les déformations est définie en terme des variables généralisées :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{mm} & \mathbb{A}^{mf} & \mathbb{A}^{mc} \\ \mathbb{A}^{mf} & \mathbb{A}^{ff} & \mathbb{A}^{fc} \\ \mathbb{A}^{mc} & \mathbb{A}^{fc} & \mathbb{A}^{cc} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} , \quad (5)$$

où  $\mathbb{A}^{mm}$ ,  $\mathbb{A}^{ff}$  et  $\mathbb{A}^{cc}$  sont les tenseurs élastiques d'ordre 2 pour les déformations membranaires, de flexion et de cisaillement transverse et  $\mathbb{A}^{mf}$  pour le couplage membrane-flexion,  $\mathbb{A}^{mc}$  pour le couplage membrane-cisaillement transverse et  $\mathbb{A}^{fc}$  pour le couplage flexion-cisaillement transverse.

La détermination des matrices généralisées  $\mathbb{A}^{mm}$ ,  $\mathbb{A}^{ff}$ ,  $\mathbb{A}^{cc}$ ,  $\mathbb{A}^{mf}$ ,  $\mathbb{A}^{mc}$  et  $\mathbb{A}^{fc}$  se fait en intégrant suivant l'épaisseur  $z$ , comme indiqué par l'Eq.4. Le choix est fait ici de calculer analytiquement la contribution des aciers d'une part et du béton d'autre part. Par exemple, la contribution locale du béton élastique linéaire isotrope est modélisée de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{K}^m & \mathbb{K}^{mc} \\ (\mathbb{K}^{mc})^T & \mathbb{K}^c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{xx} + z\kappa_{xx} \\ e_{yy} + z\kappa_{yy} \\ 2(e_{xy} + z\kappa_{xy}) \\ \gamma_x \\ \gamma_y \end{pmatrix} , \quad (6)$$

avec, pour le béton élastique linéaire isotrope :

$$\mathbb{K}^m = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} ; \quad \mathbb{K}^c = \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \begin{pmatrix} \frac{k(1-\nu)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{k(1-\nu)}{2} \end{pmatrix} ; \quad \mathbb{K}^{mc} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (7)$$

La matrice  $\mathbb{K}^m$  ( $3 \times 3$ ) correspond au bloc diagonal supérieur gauche de la matrice de l'Eq.6,  $\mathbb{K}^c$  ( $2 \times 2$ ) correspond au bloc diagonal inférieur droit et  $\mathbb{K}^{mc}$  ( $3 \times 2$ ) correspond au bloc hors diagonale. Le facteur de correction de cisaillement transverse, noté  $k$  permet de mieux tenir compte de la répartition réelle des contraintes dans l'épaisseur [7]. On peut, en première approximation utiliser pour les coques homogènes  $k = 5/6$ . Finalement, on a les relations :

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{mm} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbb{K}^m dz ; & \mathbb{A}^{ff} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbb{K}^m z^2 dz ; & \mathbb{A}^{cc} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbb{K}^c dz \\ \mathbb{A}^{mf} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbb{K}^m z dz ; & \mathbb{A}^{mc} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbb{K}^{mc} dz ; & \mathbb{A}^{fc} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbb{K}^{mc} z dz \end{aligned} \quad (8)$$

### 3.3 Étude des éléments de coque disponibles dans Code\_Aster

Le comportement des plaques et des coques suppose tout d'abord un comportement 3D en contraintes planes. D'autre part, les éléments de coque sont des éléments courbes alors que les éléments de plaque sont plans. La variation de métrique de la géométrie (c'est-à-dire son rayon de courbure) en fonction de son épaisseur est prise en compte pour les éléments de coques mais pas pour les éléments de plaques. Cette variation de métrique implique un couplage entre les effets de membrane et de flexion pour des structures non planes qui ne peut pas être observé avec des éléments de plaque plan pour un matériau homogène.

Plusieurs éléments coques sont disponibles dans Code\_Aster [4]. Les éléments coques volumiques SHB s'appuient sur des mailles 3D. Ils ont des mailles support et des formulations dépendant du nombre de nœuds : l'élément SHB8 a pour maille support l'hexaèdre à huit nœuds.

Les éléments de coques quelconques COQUE\_3D ont des mailles support quadrangulaires à 9 nœuds. Ces éléments ont donc à peu près deux fois plus de degrés de liberté que les éléments de plaque de la famille DKT correspondants. Leur coût en temps, à nombre égal, dans un calcul sera donc plus important. Les éléments de COQUE\_3D prennent en compte automatiquement la correction de métrique entre la surface moyenne et les surfaces supérieure et inférieure.

Deux familles d'éléments finis de coque à quatre nœuds existent : les éléments DKT (basés sur la théorie de Love-Kirchhoff) pour lesquels le cisaillement transverse est nul et les éléments finis avec cisaillement transverse Q4G (basés sur la théorie de Reissner-Mindlin) pour lesquels les déformations et les contraintes dans le plan de l'élément varient linéairement avec l'épaisseur de la coque. De plus, la distorsion associée au cisaillement transverse est constante et non nulle dans l'épaisseur de l'élément. Les comportements non linéaires en contraintes planes ne sont disponibles que pour les éléments DKTG et Q4GG uniquement, ce sont donc ces éléments qui sont choisis pour définir la cinématique des éléments coques sur laquelle s'appuie le modèle GLRC\_HEGIS.

## 4 Modèle GLRC\_HEGIS avec cisaillement transverse

La densité surfacique d'énergie libre de Helmholtz définit la partie élastique du comportement du matériau [8]. Pour le modèle GLRC\_HEGIS, l'énergie libre de Helmholtz  $\psi^\circ$  dépend des variables d'état régissant l'évolution des phénomènes non-linéaires présentés dans la section 2 et est définie comme :

$$\begin{aligned}
\psi^\circ &= \psi^\circ(\mathbf{e}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\gamma}, \underline{w}_1^t, \underline{w}_2^t, \underline{w}_1^b, \underline{w}_1^b, \underline{v}^{pt}, \underline{v}^{pb}, \underline{\epsilon}^{pst}, \underline{\epsilon}^{psb}, d^t, d^b) \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathbb{A}^{mm}(d^t, d^b) & \mathbb{A}^{mf}(d^t, d^b) & \mathbb{A}^{mc}(d^t, d^b) \\ \mathbb{A}^{mf}(d^t, d^b) & \mathbb{A}^{ff}(d^t, d^b) & \mathbb{A}^{fc}(d^t, d^b) \\ \mathbb{A}^{mc}(d^t, d^b) & \mathbb{A}^{fc}(d^t, d^b) & \mathbb{A}^{cc}(d^t, d^b) \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} \\
&+ \sum_{\beta} \left( - \sum_{\chi} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{\chi}^{\beta m}(d^{\beta}) \\ \mathbb{B}_{\chi}^{\beta f}(d^{\beta}) \\ \mathbb{B}_{\chi}^{\beta c}(d^{\beta}) \end{pmatrix} \cdot \underline{w}_{\chi}^{\beta} - \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathbb{C}^{\beta m} \\ \mathbb{C}^{\beta f} \\ \mathbb{C}^{\beta c} \end{pmatrix} \cdot \underline{\epsilon}^{ps\beta} \right. \\
&+ \sum_{\chi} \frac{1}{2} \underline{w}_{\chi}^{\beta} \cdot \mathbf{D}_{\chi}^{\beta}(d^{\beta}) \cdot \underline{w}_{\chi}^{\beta} + \frac{1}{2} \underline{v}^{p\beta} \cdot \mathbf{E}^{\beta}(d^{\beta}) \cdot \underline{v}^{p\beta} + \frac{1}{2} \underline{\epsilon}^{ps\beta} \cdot \mathbf{F}^{\beta} \cdot \underline{\epsilon}^{ps\beta} \\
&\left. - \sum_{\chi} \underline{w}_{\chi}^{\beta} \cdot \mathbf{G}_{\chi}^{\beta}(d^{\beta}) \cdot \underline{v}^{p\beta} + \underline{w}_1^{\beta} \cdot \mathbf{H}^{\beta}(d^{\beta}) \cdot \underline{w}_2^{\beta} \right), \tag{9}
\end{aligned}$$

où, ici,  $\mathbb{A}^{mm}$ ,  $\mathbb{A}^{ff}$ ,  $\mathbb{A}^{cc}$ ,  $\mathbb{A}^{mf}$ ,  $\mathbb{A}^{mc}$  et  $\mathbb{A}^{fc}$  dépendent des variables d'endommagement  $d^{\beta}$  pour les couches supérieures et inférieures ( $\beta = t$  pour "top" et  $\beta = b$  pour "bottom"). Pour les parties non-linéaires, on définit les tenseurs non-linéaires  $\mathbb{C}^{\beta m}$ ,  $\mathbb{C}^{\beta f}$  et  $\mathbb{C}^{\beta c}$ , correspondant à la plastification des aciers,  $\mathbb{B}_{\chi}^{\beta m}$ ,  $\mathbb{B}_{\chi}^{\beta f}$  et  $\mathbb{B}_{\chi}^{\beta c}$  correspondant au couplage membrane-flexion et fissuration, et les tenseurs  $\mathbf{D}_{\chi}^{\beta}$ ,  $\mathbf{E}^{\beta}$ ,  $\mathbf{F}^{\beta}$ ,  $\mathbf{G}_{\chi}^{\beta}$  et  $\mathbf{H}^{\beta}$  qui correspondent respectivement aux phénomènes d'ouverture de fissure des réseaux  $\chi = 1, 2$ , de glissement acier-béton, de plastification des aciers, de couplage glissement-fissuration et de couplage entre les deux réseaux de fissures. Dans la section 5, il a été choisi de ne pas prendre en compte les couplages avec le cisaillement transverse pour, dans un premier temps, valider la bonne implémentation du cisaillement transverse dans la loi de comportement. L'ajout de la cinématique en cisaillement transverse permettra de modéliser d'autres phénomènes comme la prise en compte du ferrailage transversal (épingles) ou de mieux représenter le comportement du béton armé dans les angles des structures. Ainsi, pour la suite,  $\mathbb{A}^{mc}$ ,  $\mathbb{A}^{fc}$ ,  $\mathbb{B}_{\chi}^{\beta c}$  et  $\mathbb{C}^{\beta c}$  sont prises égales à des tenseurs nuls. Les contraintes généralisées sont obtenues en dérivant  $\psi^\circ$  par rapport aux déformations généralisées :

$$\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \frac{\partial \psi^\circ}{\partial \mathbf{e}} = \mathbb{A}^{mm}(d) : \mathbf{e} + \mathbb{A}^{mf}(d) : \boldsymbol{\kappa} - \sum_{\beta} \left( \sum_{\chi} \mathbb{B}_{\chi}^{\beta m}(d) : \underline{w}_{\chi}^{\beta} + \mathbb{C}^{\beta m}(d) \cdot \underline{\epsilon}^{ps\beta} \right) \\
\mathbf{M} &= \frac{\partial \psi^\circ}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \mathbb{A}^{mf}(d) : \mathbf{e} + \mathbb{A}^{ff}(d) : \boldsymbol{\kappa} - \sum_{\beta} \left( \sum_{\gamma} \mathbb{B}_{\chi}^{\beta f}(d) : \underline{w}_{\chi}^{\beta} + \mathbb{C}^{\beta f}(d) \cdot \underline{\epsilon}^{ps\beta} \right) \tag{10} \\
\mathbf{T} &= \frac{\partial \psi^\circ}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = \mathbb{A}^{ct}(d) : \boldsymbol{\gamma}
\end{aligned}$$

Les forces thermodynamiques sont obtenues en dérivant  $\psi^\circ$  par rapport aux variables d'état :

$$-\underline{q}_s^{\beta} = \frac{\partial \psi^\circ}{\partial \underline{\epsilon}^{ps\beta}} \quad ; \quad -\underline{q}_{r1}^{\beta} = \frac{\partial \psi^\circ}{\partial \underline{w}_1^{\beta}} \quad ; \quad -\underline{q}_{r2}^{\beta} = \frac{\partial \psi^\circ}{\partial \underline{w}_2^{\beta}} \quad ; \quad -\underline{q}_v^{\beta} = \frac{\partial \psi^\circ}{\partial \underline{v}^{p\beta}} \quad ; \quad -Y^{\beta} = \frac{\partial \psi^\circ}{\partial d^{\beta}} \tag{11}$$

## 5 Applications numériques

Dans cette section, le modèle GLRC\_HEGIS est appliqué sur des éléments DKTG (sans cisaillement transverse) et Q4GG (avec cisaillement transverse) et les résultats sont comparés pour des analyses élastiques linéaires et non-linéaires. Des chargements élémentaires de flexion pure alternée et de cisaillement transverse pure sont appliqués à une dalle en BA (Figure 2-a) renforcée avec un ratio de 1.5% d'acier comme illustré sur la Figure 2-b.

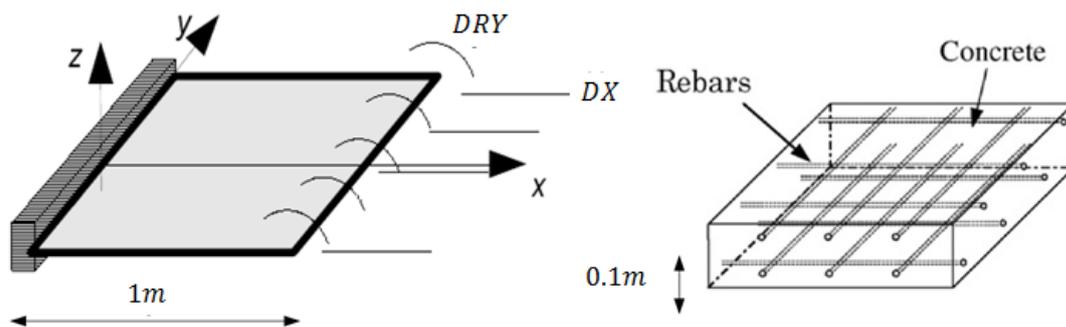


FIGURE 2 – (a) Schéma et (b) géométrie d'une dalle en BA utilisés pour les comparaisons numériques

Les dimensions de la dalle sont  $1m \times 1m$  dans le plan  $x - y$  et  $h = 0.10m$  dans l'épaisseur. La dalle est composée de béton caractérisé par un module d'Young de  $E_c = 32.2GPa$ , un coefficient de Poisson de  $\nu_c = 0.2$ , une limite en traction de  $f_{ct} = 3.4MPa$  et une pente post-fissuration valant 20% du module d'Young initial. La dalle est renforcée par des barres d'aciers de diamètre  $10mm$  espacées de  $10cm$  dans les couches supérieures et inférieures et dans les directions  $x$  et  $y$  avec un enrobage de  $10mm$ ; l'acier est caractérisé par un module d'Young de  $200GPa$  et une limite élastique de  $570MPa$ . L'espacement entre deux fissures est estimé être de  $0.160m$  pour les deux applications.

### 5.1 Cas tests de validation en flexion

La Figure 3-a présente le modèle EF de la dalle en BA ainsi que les conditions aux limites. Le chargement consiste en l'application d'une rotation de l'arête dont l'historique est présenté dans la Figure 3-b.

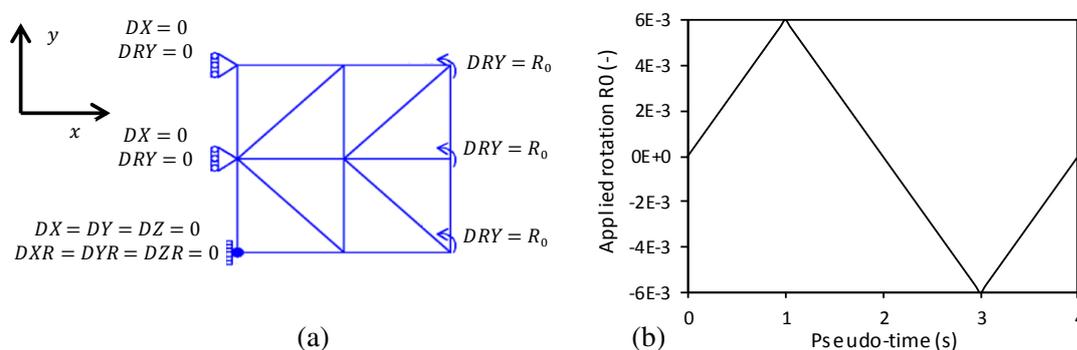


FIGURE 3 – (a) Conditions aux limites de la dalle en BA et (b) chargement de flexion pure alterné

Ce chargement créé un état homogène de contrainte dans toute la dalle. Premièrement (0-2s), un cycle de charge décharge est appliqué avec une rotation positive pour que la couche inférieure de la dalle soit en état de traction. Puis (2-4s), un cycle de charge décharge est appliqué avec une rotation négative pour que la couche supérieure de la dalle soit en état de traction.

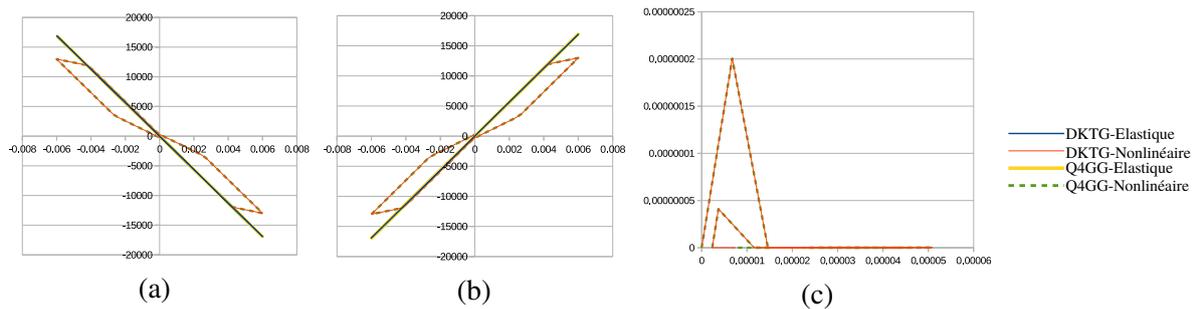


FIGURE 4 – Résultats obtenus : (a) moment-rotation global :  $MYY - DRY$ , (b) moment fléchissant-variation de courbure local :  $M_{xx} - \kappa_{xx}$  et (c) effort membranaire-extension membranaire :  $N_{xx} - \epsilon_{xx}$ .

Les courbes de la Figure 4-a concernent les résultats à l'échelle globale de moment-rotation et celles de la Figure 4-b concernent les résultats à l'échelle locale (point de Gauss) de moment fléchissant-variation de courbure pour les quatre cas considérés. Les courbes de la Figure 4-c sont les résultats non-linéaires à l'échelle locale de l'effort membranaire en fonction de l'extension membranaire caractéristique du modèle GLRC\_HEGIS pour la fissuration.

Sous le chargement de flexion, les deux faces de la dalle en BA se trouvent en état de traction l'une après l'autre. La fissuration qui en résulte donne un motif de fissures espacées de  $0.16m$  (donc 6 fissures en tout sur la largeur de la dalle) qui s'ouvrent jusqu'à  $16\mu m$  sur la face inférieure puis se referment et s'ouvrent jusqu'à  $17\mu m$  sur la face supérieure puis se referment. Ce phénomène est responsable des changements de pente des courbes non-linéaires des Figures 4-a et 4-b. Les autres phénomènes non-linéaires ne sont pas mobilisés lors de ce cas test.

Les droites linéaires superposées correspondent aux résultats obtenus avec les modèles élastiques linéaires pour les éléments DKTG et Q4GG. Les deux courbes non-linéaires superposées correspondent aux résultats obtenus avec les modèles non-linéaires pour les éléments DKTG et Q4GG. La comparaison des courbes montre que les deux éléments DKTG et Q4GG donnent les mêmes résultats que ce soit avec un modèle élastique linéaire ou non-linéaire. En effet, le chargement en flexion pure ne fait pas intervenir les termes de cisaillement transverse et les deux éléments donnent rigoureusement la même solution. Ces résultats valident le cas test en flexion pure.

## 5.2 Cas tests de validation en cisaillement transverse

La Figure 5-a présente le modèle EF de la dalle en BA ainsi que les conditions aux limites. Le chargement consiste en l'application d'une pression uniformément répartie sur la surface inférieure de la dalle dont le mode d'application est présenté dans la Figure 5-b et qui crée un état homogène de contrainte dans toute la dalle. La couche supérieure de la dalle est en état de traction et la couche inférieure, en état de compression. Ainsi la dalle se retrouve cisailée dans son épaisseur.

Les courbes de la Figure 6-a concernent les résultats globaux de moment-déplacement et les courbes de la Figure 6-b concernent les résultats locaux (point de Gauss) du moment fléchissant en fonction de la variation de courbure pour les quatre modèles constitutifs. Les droites linéaires correspondent aux résultats obtenus avec les modèles élastiques linéaires pour les éléments DKTG et Q4GG. Les deux courbes non-linéaires correspondent aux résultats obtenus avec les modèles non-linéaires pour les éléments DKTG et Q4GG.

La comparaison des courbes montre que cette fois-ci les deux éléments DKTG et Q4GG ne donnent pas

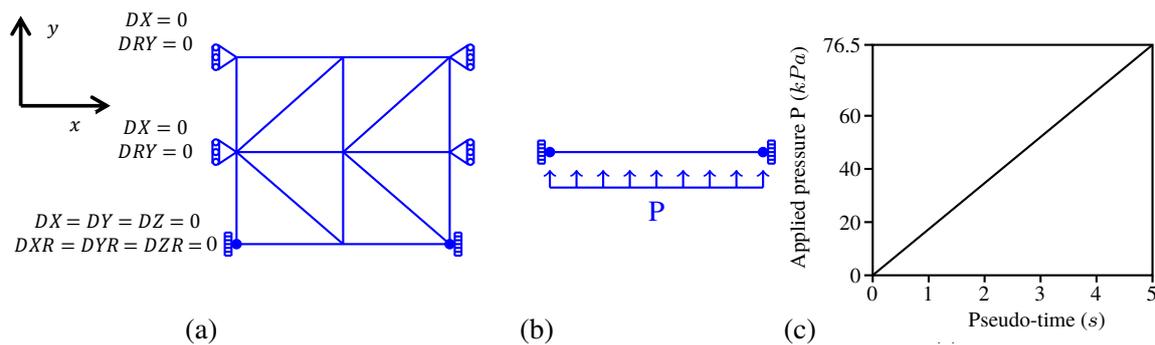


FIGURE 5 – (a) Conditions aux limites de la dalle en BA et (b) chargement de cisaillement transverse

les mêmes résultats que ce soit avec un modèle élastique linéaire ou non-linéaire. En effet, le chargement en cisaillement pure implique la rigidité de cisaillement transverse  $\mathbb{A}^{cc}$ , qui est fonction du module de cisaillement pour l'élément Q4GG alors qu'elle est infiniment grande pour l'élément DKTG. Il est donc normal de trouver des pentes plus faibles pour les résultats obtenus avec les éléments Q4GG en comparaison de ceux obtenus avec les éléments DKTG.

Les courbes de la Figure 6-c concernent les résultats locaux de cisaillement transverse en fonction de la distorsion transverse. Les résultats obtenus pour l'élément Q4GG montrent que la rigidité en cisaillement transverse demeure dans le domaine linéaire pour le modèle non-linéaire. En effet, le modèle ne prend en compte que l'endommagement (associé à la variable interne scalaire  $d$ ) en cisaillement transverse comme variable non-linéaire et le seuil à atteindre en compression est en dehors des contraintes de compression atteintes par ce cas test.

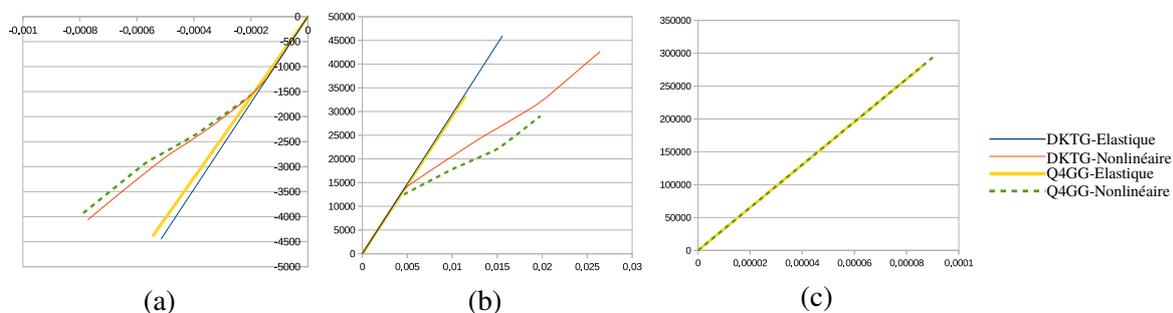


FIGURE 6 – Résultats obtenus : (a) moment-rotation global :  $MYY - DRY$ , (b) moment fléchissant-variation de courbure local :  $M_{xx} - \kappa_{xx}$  et (c) cisaillement transverse-distorsion transverse. :  $T_x - \gamma_x$ .

Sous le chargement de pression, la face opposée de la dalle en BA qui se trouve en état de traction. La fissuration qui en résulte donne un motif de fissures espacées de  $0.16m$  (donc 6 fissures en tout sur la largeur de la dalle) qui s'ouvrent jusqu'à  $130\mu m$  pour la modélisation avec DKTG et  $110\mu m$  avec Q4GG à la fin du chargement. Ce phénomène est responsable du premier changement de pente des courbes non-linéaires des Figures 6-a et 6-b. Le second changement de pente observable sur ces courbes est dû au glissement entre l'acier et le béton qui vaut  $85\mu m$  pour la modélisation avec DKTG et  $67\mu m$  avec Q4GG à la fin du chargement. Les autres phénomènes non-linéaires ne sont pas mobilisés lors de ce cas test.

La souplesse apportée par la prise en compte du cisaillement transverse avec Q4GG diminue la valeur des déformations membranaires et de flexion qui étaient surestimées avec DKTG. Ces résultats valident le cas test en cisaillement transverse pure.

## 6 Conclusions

Pour des calculs de structures en BA sous sollicitation extrême, le modèle GLRC\_HEGIS permet de prendre en compte différents phénomènes non-linéaires pour les coques. La nécessité d'obtenir des résultats précis pour les structures épaisses et lourdement armées (e.g. pour les bâtiments nucléaires) amène à enrichir les modèles non-linéaires.

La prise en compte du cisaillement transverse avec le GLRC\_HEGIS passant par l'étude de la cinématique des coques et aboutissant à un enrichissement de la densité d'énergie libre de Helmholtz a permis de comparer les résultats obtenus avec et sans cisaillement transverse. Il est impératif de retrouver les mêmes résultats avec les deux cinématiques lorsque le chargement ne mobilise pas le comportement en cisaillement transverse (test de flexion pure) mais la rigidité de l'élément doit être plus souple avec une cinématique de Reissner-Mindlin (Q4GG avec cisaillement transverse) qu'avec celle de Love-Kirchhoff (DKTG sans cisaillement transverse) pour les calculs mobilisant le cisaillement transverse.

La prise en compte du cisaillement transverse dans le modèle non-linéaire GLRC\_HEGIS a permis d'enrichir la cinématique de la loi de comportement. La souplesse apportée par la prise en compte du cisaillement transverse avec les éléments Q4GG diminue la valeur des déformations membranaires et de flexion qui étaient surestimées avec les éléments DKTG. Cette cinématique enrichie ouvre de nouvelles possibilités pour ajouter des phénomènes mécaniques (linéaires ou non-linéaires) particuliers des coques en BA comme la prise en compte des armatures transversales (épingles) ou du couplage entre fissuration et cisaillement transverse.

## Références

- [1] M. Huguet, S. Erlicher, P. Kotronis, F. Voltaire, Stress resultant nonlinear constitutive model for cracked reinforced concrete panels. *Engineering Fracture Mechanics*, 176, 375–405, 2017.
- [2] M. Huguet, P. Kotronis, S. Erlicher, F. Voltaire, Une nouvelle loi de comportement homogénéisée pour des membranes en béton armé. *Congrès Français de Mécanique*, Lyon, France, 2015.
- [3] M. Huguet, A homogenized nonlinear stress resultant constitutive model for cracked reinforced concrete panels *Ph.D. Thesis Report, Ecole Centrale Nantes / Egis*, 2016.
- [4] Electricité de France, Open source on [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org). Finite element *Code\_Aster, Analysis of Structures and Thermomechanics for Studies and Research*, 1989–2019.
- [5] F.J. Vecchio, M.P. Collins, The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear, *ACI Journal*, 83 :2, 219–231, 1986.
- [6] Comité Européen de Normalisation, *EuroCode 2 - 2004 Design of concrete structures : Part 1-1*, 2005.
- [7] J.L. Batoz, G. Dhett, Modélisation des structures par éléments finis. Vol.3 : Coques, *Lavoisier-Hermès*, 1992.
- [8] J.C. Simo, T.J.R. Hughes, Computational Inelasticity, *Springer Verlag*, New York, 1998.