

Stabilité des écoulements bidimensionnels parallèles cisailés à grande variation de masse volumique

C. JACQUES^a, B. DI PIERRO^a, M. BUFFAT^a

a. Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique, UMR 5509, Université Claude Bernard
Lyon1

Résumé :

Cette étude traite de la stabilité linéaire de couches de mélange et de jets à masse volumique variable. D'un point de vue théorique, il est montré que les gradients de masse volumique ont une forte influence sur les conditions d'apparition de l'instabilité. En utilisant une discrétisation spectrale, les taux de croissance ont été numériquement calculés en incluant les effets diffusifs. Ces calculs montrent que le jet est beaucoup plus instable que la couche de mélange, avec une forte influence de la masse volumique. Finalement, les effets visqueux apparaissent comme purement stabilisants.

Abstract :

This study deals with the stability of variable density shear layers and jets. It is theoretically shown that density gradients enhance the instability by enlarging its onset conditions. Using a spectral discretisation, growth rates are numerically compute including diffusion effects. It is observed that variable density jets are most unstable than shear layers, driven by density variations. Finally, viscous effects are purely stabilising.

Mots clefs : Instabilité linéaire, incompressible, masse volumique

1 Introduction

Un attrait renouvelé pour l'étude des écoulements cisailés s'explique par le fait qu'ils sont largement présents dans l'industrie, comme les écoulements de cheminées, ou dans des phénomènes naturels tels que les émissions volcaniques. Ces rejets peuvent être représentés par des mélanges gazeux et sont donc sujets à de grandes variations locales de masses volumiques. D'un point de vue fondamental, il est légitime de questionner l'importance de ces variations sur la dynamique inertielle; la masse volumique devenant un scalaire actif de l'écoulement. Dans le cadre des écoulements à masse volumique constante, la dynamique instable a été largement étudiée dans la littérature. On trouve les travaux précurseurs de Helmholtz et Lord Kelvin qui ont obtenu des solutions exactes dans le cas de discontinuité de vitesse, qu'ils ont confronté aux observations expérimentales. Plus tard, Lord Rayleigh [1] a obtenu une condition nécessaire d'instabilité si l'on considère des variations continues dans l'écoulement. Cette condition implique que la variation transversale de la vitesse longitudinale présente un point d'inflexion. Ce critère

a ensuite été élargi par Fjorthoft [4]. Dans la même période, Drazin et Howard [2] ont analysé la stabilité de ces écoulements dans la limite de grand nombre d'onde. Ils ont pu mettre en avant l'instabilité d'un jet par rapport à celle d'une couche cisailée, montrant une interaction forte des modes instables au centre du jet. Nous nous plaçons ici dans la configuration où le fluide est Newtonien, monophasique de viscosité dynamique constante. Le mélange binaire gazeux est alors représenté par une masse volumique variable en espace soumis à la loi de Fick (les effets de Duffour sont cependant négligés). L'écoulement est supposé incompressible et en régime de convection forcée. Deux configurations infinies et parallèles ont été retenues : une couche de mélange et un jet. Le cas du jet à masse volumique variable a été traité par Ravier *et al.* qui ont mis en avant la concordance d'un mode absolument instable obtenu numériquement avec un mode global expérimental [10]. Nous proposons dans cette étude de combler la lacune présente entre ces deux types d'analyse en étendant les résultats théoriques précédents au cas de la masse volumique variable ainsi qu'en calculant numériquement les propriétés instables de ces écoulements pour un mélange visqueux et diffusif.

2 Positionnement du problème

On considère un écoulement incompressible d'un mélange binaire fluide dont la masse volumique ρ^* évolue en espace et en temps, soumis à la diffusion moléculaire. Pour cela, on introduit la vitesse moyennée par la masse \mathbf{w}^* et son analogue par le volume \mathbf{u}^* , reliés par la loi de Fick $\mathbf{u}^* = \mathbf{w}^* + \lambda \nabla \rho^* / \rho^*$, avec λ la diffusivité moléculaire. Les équations de la dynamique s'écrivent alors [5-8, 12] :

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* = -\frac{\nabla p^*}{\rho^*} + \frac{\mu}{\rho^*} \Delta \mathbf{u}^* + \mathbf{f}(\rho^*, \mathbf{u}^*, \lambda) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla \rho^* = \lambda \Delta \rho^* \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{f}(\rho^*, \mathbf{u}^*, \lambda) = \frac{\lambda}{\rho^*} \left[(\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \nabla \rho^* + (\nabla \rho^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* \right] \quad (4)$$

où p^* est un analogue à la pression et μ la viscosité dynamique supposée constante. Cette étude est réalisée sur des écoulements de base ouvert dans un repère cartésien bidimensionnel (x, z) , $\Phi_0 = (U_0(z)\mathbf{e}_x, \rho_0(z), p_0(z))$, parallèles et stationnaires. Deux types d'écoulements sont considérés ici : une couche de mélange (5) et un jet (6),

$$U_0(z) = \bar{U} \tanh(z/L), \quad \rho_0(z) = \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1) \tanh\left(\frac{z}{\delta L}\right) + \frac{1}{2}(\rho_2 + \rho_1), \quad (5)$$

$$U_0(z) = \frac{\bar{U}}{2} \left(\tanh\left(\frac{z+L}{\delta L}\right) - \tanh\left(\frac{z-L}{\delta L}\right) \right), \quad \rho_0(z) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} \frac{U_0(z)}{\bar{U}} \quad (6)$$

Il faut noter que ces écoulements de bases sont solutions des équations non diffusives ; on considèrera ici que les temps caractéristiques de l'instabilité sont courts devant ceux du processus de diffusion. Finalement le problème est adimensionnalisé par l'introduction du nombre de Reynolds, du nombre de Schmidt et du rapport de masse volumique, respectivement définis comme :

$$\text{Re} = \frac{\rho_1 \bar{U} L}{\mu}, \quad \text{Sc} = \frac{\mu}{\rho_1 \lambda}, \quad S = \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad ; \quad \zeta = \{\text{Re}, \text{Sc}, S\} \quad (7)$$

3 Stabilité linéaire

On s'intéresse à la croissance temporelle des modes instables autour de l'écoulement de base $\Phi = (\mathbf{u}^*, \rho^*, p^*)$. On introduit donc une perturbation infinitésimale $\phi = (\mathbf{u}, \rho, \psi)$ telle que [1, 3] :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \Phi_0(z) + \phi(\mathbf{x}, t) \quad \text{avec} \quad \phi(\mathbf{x}, t) = \phi(z)e^{i(kx - \omega t)} \quad (8)$$

Avec $k \in \mathbb{R}$ le nombre d'onde longitudinale et $\omega(k, \zeta) = \omega_r(k, \zeta) + i\sigma(k, \zeta)$ la pulsation complexe du système. En introduisant la forme (8) dans le système d'équation (1) (2) (3) adimensionnalisé, on obtient un problème aux valeurs propres généralisé de la forme :

$$\mathbb{A}\phi = i\omega\mathbb{B}\phi \quad (9)$$

Afin d'améliorer le conditionnement de ce système et de réduire la taille du problème, la pression est éliminée des équations par la méthode du descripteur [9] en introduisant un opérateur de Helmholtz à coefficients variables :

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) = \mathcal{F}(\phi) \implies p = \left[\nabla \cdot \frac{1}{\rho_0} \nabla \right]^{-1} (\mathcal{F}(\phi)) \quad (10)$$

Cette formulation permet d'assurer explicitement la contrainte d'incompressibilité tout en évitant le calcul de modes spurieux. Les modes propres sont alors projetés sur les polynômes de Tchebychev et le système matriciel est résolu avec la bibliothèque LAPACK. Sous les hypothèses de fluide non visqueux et non diffusif le système algébrique (9) s'écrit sous la forme d'une équation différentielle linéaire qui est la généralisation de l'équation de Rayleigh (1880)

$$\psi'' + \frac{\rho'}{\rho} \psi' - \left[\frac{\rho' U_0'}{\rho (U_0 - c)} + \frac{U_0''}{U_0 - c} + k^2 \right] \psi = 0 \quad (11)$$

avec $c = \frac{\omega}{k}$ et ψ la fonction de courant de perturbation et $()'$ représente l'opérateur $\partial/\partial z$. Une analyse théorique de ce type d'écoulement a permis dans un premier temps d'étendre le critère de stabilité de Rayleigh et Fjortoft en incluant les effets de densités. La démarche utilisée pour obtenir ces critères généralisés reste la même que celle proposée par Rayleigh et Fjortoft. Ces critères généralisés sont des conditions nécessaires d'instabilité :

$$\text{L'écoulement de base est instable} \implies \begin{cases} \text{(Rayleigh)} \exists z_s, (\rho_0(z_s)U_0'(z_s))' = 0 \\ \text{(Fjortoft)} \begin{cases} \exists z_s, (\rho_0(z_s)U_0'(z_s))' = 0 \\ (\rho_0 U_0')' (U_0 - U(z_s)) < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (12)$$

L'existence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse (*critère de Rayleigh 1880*) n'est plus une condition nécessaire d'instabilité dans un cas à densité variable mais s'étend à un critère qui fait intervenir les gradients de masse volumique et de vitesse. La deuxième phase de cette étude théorique consiste à étudier asymptotiquement la relation de dispersion lorsque le nombre d'onde k associé à la perturbation tend vers 0. En se basant sur la même démarche que celle proposée par Drazin et Howard [2] pour des cas à masse volumique constante, on étend cette analyse en incluant la variation de masse volumique. On suppose que ρ_0' , U_0' et U_0'' tendent vers 0 à l'infini de telle sorte qu'asymptotiquement l'équation de Rayleigh généralisée (11) possède deux solutions proportionnelles à $e^{\pm kz}$. Dans la limite de petits nombres

d'ondes, on peut alors développer la solution sous forme d'une série de puissances

$$\phi_+(z) = e^{-kz} \sum_{n=0}^{+\infty} k^n \chi_n(z) \text{ si } z > 0, \quad \phi_-(z) = e^{kz} \sum_{n=0}^{+\infty} (-k)^n \theta_n(z) \text{ si } z < 0$$

En introduisant ϕ_+ dans l'équation (11) avec $\Sigma = U_0 - c$, on obtient¹ la relation de récurrence :

$$\left[\rho_0 \Sigma^2 \left(\frac{\chi_0}{\Sigma} \right)' \right]' = 0 \quad \text{et} \quad \left[\rho_0 \Sigma^2 \left(\frac{\chi_{n+1}}{\Sigma} \right)' \right]' = 2 \Sigma \sqrt{\rho_0} [\sqrt{\rho_0} \chi_n]' \quad \forall n > 0 \quad (13)$$

En intégrant ces équations et en posant $\Delta_n(z) = \sqrt{\rho_0} \chi_n$, $\Delta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} k^n \Delta_n$ et $W = \Sigma \sqrt{\rho_0}$ on obtient²

$$\Delta_0(z) = W(z) \quad \text{et} \quad \Delta_{n+1}(z) = 2W(z) \int_{\infty}^z W^{-2}(\eta) \int_{\infty}^{\eta} W(\xi) \Delta_n'(\xi) d\xi d\eta \quad \forall n > 0 \quad (14)$$

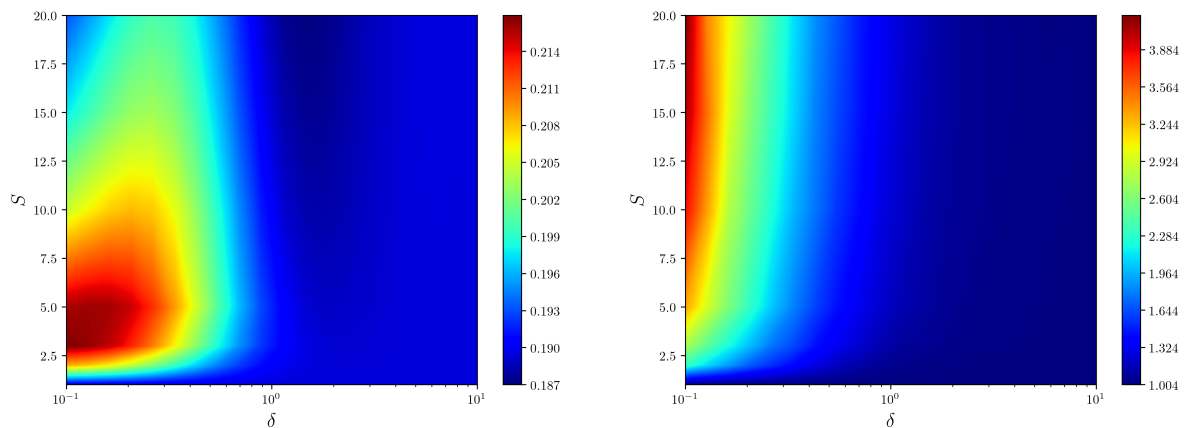
La relation de dispersion est alors obtenue en annulant le Wronskien en $z = 0$:

$$\Delta'(0)\Pi(0) - \Pi'(0)\Delta(0) - 2k\Pi(0)\Delta(0) = 0, \quad (15)$$

et donne à l'ordre dominant les taux de croissance $\sigma = \text{Im}(\omega)$ de la couche de mélange et du jet

$$\sigma_{\text{shear layer}} = k \frac{2\sqrt{S}}{S+1} \quad \text{et} \quad \sigma_{\text{jet}} = \frac{k^{3/2}}{S+1} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 U_0^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

4 Resultats numériques



(a) Taux de croissance des modes les plus instables

(b) Nombre d'onde de coupure de l'instabilité (courbe neutre)

FIGURE 1: Cartographie des taux de croissance des modes les plus instables (a) et des nombres d'onde de coupure (b) dans le plan (S, δ) pour la couche de mélange sans viscosité ni diffusion de masse

L'étude numérique de l'instabilité montre que le paramètre le plus influent de la dynamique est l'épais-

1. On obtient la même relation de récurrence avec ϕ_- en remplaçant χ par θ
2. On obtient les mêmes résultats pour θ_n en remplaçant Δ_n par $\Pi_n(z) = \sqrt{\rho_0} \theta_n$, $\Pi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-k)^n \Pi_n$

seur des couches δ , comme illustré sur les figures 1 et 2. En effet, dans ces cas de couches de mélanges et de jet non visqueux et non diffusif, le taux de croissance croît très rapidement dès lors que $\delta < 1$. Dans cette même gamme, le nombre d'onde critique k_c (tel que $\sigma(k) < 0$, si $k > k_c$) évolue de la même manière, alors que les caractéristiques de la couche de mélange à masse volumique constante sont retrouvées dès lors que $\delta > 1$. Le second paramètre le plus influent est le rapport de densité s . Alors que l'on voit un zone préférentielle de l'instabilité apparaître autour de $s = 4$ dans le cas de la couche de mélange (figure 1a) alors que dans le cas du jet, le taux de croissance semble indépendant du rapport de densité. Finalement, on remarque un élargissement de la gamme de nombre d'onde instable lorsque s s'éloigne de 1. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus théoriquement dans la section précédente. L'étude précédente a été étendue à l'analyse des effets diffusifs et visqueux sur l'instabilité, tel

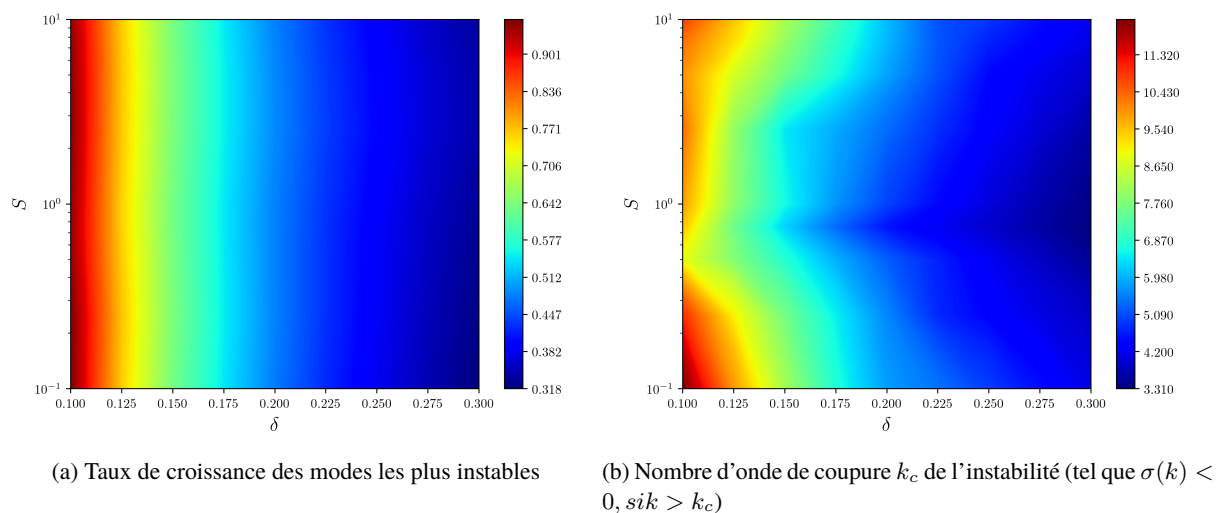


FIGURE 2: Cartographie des taux de croissance des modes les plus instables (a) et des nombres d'onde de coupure (b) dans le plan (S, δ) pour le jet sans viscosité ni diffusion

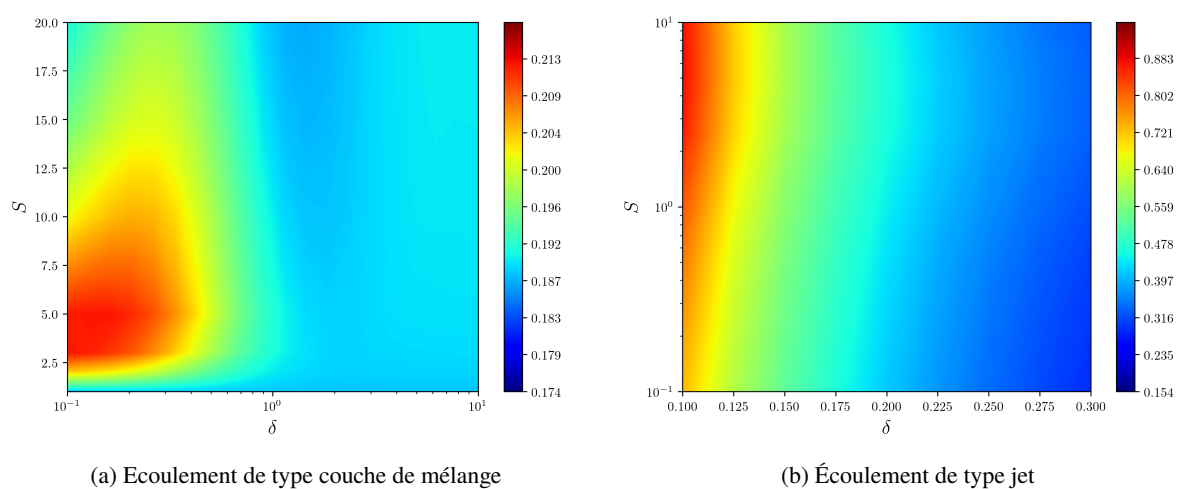


FIGURE 3: Cartographie des taux de croissance dans le plan (s, δ) pour les deux écoulements de base, avec $Re = 1000$, $Sc = 1$.

qu'illustré sur la figure 3. L'influence globale de ces nouveaux effets est de stabiliser l'écoulement en abaissant le taux de croissance ainsi qu'en diminuant la gamme de nombre d'onde instable. Cette étude

a été menée pour des nombres de Reynolds et de Schmidt variant respectivement de 100 à 10000 et de 1 à 100. Il a été observé que la viscosité a une influence plus forte que la diffusion moléculaire, cette dernière n'ayant d'effet notable que pour de faibles nombres de Reynolds $Re = O(100)$.

5 Conclusion et remerciements

Dans cet article, la stabilité d'un écoulement parallèle et cisailé à masse volumique variable est étudiée d'un point de vue théorique et numérique. Il est montré que l'instabilité résultante est très sensible aux gradients de la densité puisque ce dernier influe autant sur le taux de croissance que sur les conditions d'apparitions de l'instabilité. L'instabilité peut alors être accrue simplement en jouant sur l'épaisseur des couches ou sur le rapport de densité. Finalement, l'ajout des effets visqueux et diffusifs ne modifient pas le comportement global de la dynamique mais joue un rôle purement stabilisant.

Les auteurs remercient la Fédération Lyonnaise de Modélisation et de Simulation Numérique pour la mise à disposition de ressources de calculs sur le calculateur P2CHPD.

Références

- [1] S CHANDRASEKHAR. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Dover Publications, 1961.
- [2] P. G. DRAZIN et L. N. HOWARD. "The instability to long waves of unbounded parallel inviscid flow". *Journal of Fluid Mechanics* 14.02 (1962), p. 257. DOI : [10.1017/s0022112062001238](https://doi.org/10.1017/s0022112062001238).
- [3] P. G. DRAZIN. "On the Steady Flow of a Fluid of Variable Density Past an Obstacle". *Tellus* 13.2 (1961), p. 239-251. DOI : [10.3402/tellusa.v13i2.9451](https://doi.org/10.3402/tellusa.v13i2.9451).
- [4] R. FJØRTOFT. *Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex*. Grøndahl & søns boktr., I kommisjon hos Cammermeyers boghandel, 1950.
- [5] J. FONTANE. "Transition des écoulements cisailés libres à densité variable". Thèse de doct. Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [6] D. A. FRANK-KAMENETSKII. "Diffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics" (1955). DOI : [10.1515/9781400877195](https://doi.org/10.1515/9781400877195).
- [7] F. GUILLÉN-GONZÁLEZ, P. DAMÁZIO et M. ROJAS-MEDAR. "Approximation by an iterative method for regular solutions for incompressible fluids with mass diffusion". *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 326.1 (2007), p. 468 -487. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.03.009>.
- [8] A. LOPEZ-ZAZUETA. "Stabilité secondaire non-modale d'une couche de mélange inhomogène". Thèse de doct. Toulouse, ISAE, 2015.
- [9] M. L. MANNING, B BAMIEH et J M. CARLSON. "Eliminating spurious eigenvalues in the analysis of incompressible fluids and other systems of differential-algebraic equations" (juin 2007).
- [10] S. RAVIER. "Étude des instabilités d'un jet plan à masse volumique variable". Theses. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, juin 2004.
- [11] L. RAYLEIGH. "On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions". *Proceedings of the London Mathematical Society* s1-11.1 (1879), p. 57-72. DOI : [10.1112/plms/s1-11.1.57](https://doi.org/10.1112/plms/s1-11.1.57).
- [12] P. SECCHI. "On the Motion of Viscous Fluids in the Presence of Diffusion". *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 19.1 (1988), p. 22-31. DOI : [10.1137/0519002](https://doi.org/10.1137/0519002).