

Approche Lattice-Boltzmann multiphasique pour l'Interaction Fluide-Structure déformable

S. MEY, E. LIBERGE, C. BEGHEIN

LaSIE UMR-7356 CNRS, La Rochelle Université, Avenue Michel Crépeau, 17000 La Rochelle,
sebastien.mey@univ-lr.fr

Résumé :

On s'intéresse dans cet article à la modélisation de l'interaction entre un fluide et un solide de type incompressible (néohookéen) par la méthode de lattice Boltzmann (LBM). Afin de garder une formulation monolithique et d'utiliser la LBM comme solveur principal, une approche eulérienne du solide est utilisée. Le problème initial est ainsi transformé en un problème diphasique et un seul solveur LBM est utilisé pour les deux phases. L'approche proposée est validée sur trois cas de la littérature.

Abstract :

This paper deals with the numerical modelling of the interaction between a fluid and an incompressible solid (Neo Hookean) with the lattice Boltzmann method. In order to use a monolithic formulation and to solve the whole problem with the lattice Boltzmann method, an eulerian approach is employed for the solid medium. The initial problem is thus transformed into a diphasic problem and a unique LBM solver is used for both phases (fluid and solid). This approach is validated with three cases found in the literature.

Mots clefs : Méthode de Lattice Boltzman, Interaction Fluide Structure, Méthode multiphasique, Structure déformable

1 Introduction

L'interaction fluide structure (IFS) consiste en l'étude des phénomènes physiques faisant interagir un fluide avec un solide. Un exemple classique est l'étude de solides se déplaçant et/ou se déformant sous l'effet d'un écoulement, cet écoulement étant alors affecté par ce changement de conditions aux limites. De très nombreux exemples peuvent être trouvés en biomécanique (écoulement du sang dans les artères, dans le coeur ...), aérodynamique (écoulement de l'air autour des pales d'éoliennes, autour des avions, ...), hydrodynamique (écoulement autour des navires, des sous-marins, ...). Ces phénomènes sont complexes et ont lieu à des échelles de temps et d'espace variés. La modélisation numérique de tels phénomènes requiert des maillages denses et des pas de temps faibles, et elle s'avère coûteuse lorsque des techniques classiques de résolution des équations de Navier-Stokes (éléments finis, volumes finis, ...) sont employées.

Un des intérêts de la méthode de lattice Boltzmann (LBM) est qu'elle est facilement parallélisable sur cartes graphiques ([16], [25]), et que des temps de calcul très faibles et à moindre coût sont ainsi obtenus. Elle semble donc une candidate idéale à la recherche d'un solveur rapide en interaction fluide-structure. Depuis les années 1990, la méthode de Lattice Boltzmann est couramment utilisée comme solveur en mécanique des fluides. Avec cette méthode, on résout l'équation de Boltzmann discrète, à une échelle mésoscopique (intermédiaire entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique) ([32], [7], [1], [27]). C'est cette méthode que nous avons choisie pour cette étude.

Afin de modéliser des phénomènes d'interaction fluide-structure avec la méthode de Lattice Boltzmann, différentes approches ont été développées. Ainsi, depuis les travaux de Ladd [17], la méthode du bounce back a été beaucoup utilisée pour calculer des écoulements autour d'obstacles immobiles ou mobiles ([18], [28]). Cette méthode a aussi été employée pour évaluer les conditions aux limites au niveau d'un obstacle se déformant, dans le cadre du couplage de la LBM avec la méthode des éléments finis ([23], [2], [31]). Une autre méthode, qui a été développée par Noble et Torczynski [29], prend en compte les conditions aux limites fluide-solide grâce à une modification du terme de collision de l'équation de Lattice Boltzmann. Cette méthode a été appliquée à des problèmes d'IFS ([13]). Cependant, elle présente quelques difficultés car il est nécessaire avec cette méthode d'évaluer pour chaque nœud du maillage la fraction volumique du solide. Par ailleurs, la méthode des frontières immergées qui permet de modéliser des écoulements autour de solides déformables a été implémentée dans la méthode de Lattice Boltzmann depuis les années 2000 ([21], [5], [15]). Avec cette méthode, l'écoulement du fluide est calculé avec une approche eulérienne sur un maillage cartésien fixe, et le contour du solide est suivi avec une approche lagrangienne en introduisant des forces nodales d'interaction entre le solide et le fluide. Cette méthode, qui est devenue très populaire dans la communauté de LBM, a permis de traiter des problèmes d'interaction fluide-structure, en couplant le solveur de Lattice Boltzmann avec la méthode des éléments finis pour résoudre le déplacement de la structure ([31], [10]). En outre, la formulation des multiplicateurs de Lagrange et domaines fictifs ([14]) a été introduite dans la méthode de Lattice Boltzmann. Cette méthode consiste à écrire les équations de quantité de mouvement et de continuité sur l'ensemble du domaine de calcul (fluide et solide) qui reste fixe, et un multiplicateur de Lagrange (une force) contraint le fluide à l'intérieur du solide à bouger comme le solide. Cette méthode permet d'éviter la phase coûteuse de remaillage. Grâce à l'implémentation de cette méthode dans la LBM, Shi et Phan Tien [22], et Shi et Piang Lim [20] ont couplé la LBM avec la méthode des éléments finis.

Dans des travaux précédents, nous avons résolu des problèmes d'IFS en introduisant la méthode de pénalisation volumique initialement développée par Angot et al [9], dans la LBM ([3], [4]). Avec cette méthode, un terme source de pénalisation volumique représentant l'influence du domaine solide sur l'écoulement est ajouté dans l'équation de la LBM. Les conditions aux limites fluide-solide sont naturellement prises en compte grâce à cette méthode, et le solveur ainsi obtenu est facilement parallélisable. Cette méthode nous a permis de résoudre de façon satisfaisante des écoulements autour de solides indéformables. Dans cet article, nous présentons une approche permettant de modéliser l'interaction entre un fluide et un solide incompressible (néohookéen) par la méthode de Lattice Boltzmann. Le solide est traité de façon eulérienne. Ceci nous permet de développer une approche diphasique dans laquelle on résout des problèmes d'Interaction Fluide-Structure avec de petites déformations par un unique solveur LBM (contenant des différences finies pour calculer certaines dérivées). De plus, grâce à cette méthode, les efforts fluide/solide sont intrinsèques à la formulation. Cette nouvelle approche est testée pour différents cas trouvés dans la littérature. Dans le paragraphe suivant, nous décrivons la méthode de Lattice Boltzmann. La méthode de résolution des problèmes d'IFS en petites déformations que nous

avons choisie, ainsi que son adaptation à la LBM, sont ensuite présentées. Puis les résultats obtenus par cette nouvelle méthode pour différents cas tests sont détaillés, et les conclusions et perspectives de ce travail sont explicitées.

2 Formulations mathématiques

2.1 Méthode de Lattice Boltzmann

Dans cette étude, la méthode de Lattice Boltzmann a été utilisée pour calculer l'écoulement, ainsi que pour résoudre l'équation eulérienne décrivant le comportement du solide déformable. Avec cette méthode, on s'intéresse à un ensemble de particules au sein du milieu continu étudié, et on résout numériquement l'équation de Boltzmann discrétisée, qui permet de trouver à un instant t , à une position \mathbf{x} , la fonction $f_i(\mathbf{x}, t)$ de distribution des particules ayant une vitesse discrète \mathbf{c}_i :

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = \Omega_i(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

Dans cette équation, Δt est le pas de temps ($\Delta t = 1$ en LBM), et $\Omega_i(\mathbf{x}, t)$ est l'opérateur de collision.

Notons ici que l'on s'intéresse à des cas bidimensionnels. Ainsi, un modèle à 9 vitesses discrètes $D2Q9$ est utilisé. Le réseau sur lequel les particules se déplacent est représenté sur la figure 1.

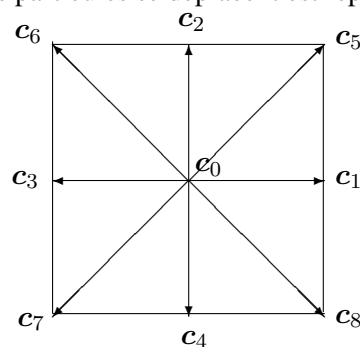


FIGURE 1 – Vitesses discrètes du modèle $D2Q9$

Les coordonnées des vitesses discrètes \mathbf{c}_i sont :

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

où \mathbf{c}_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne du tableau ci-dessus.

Pour modéliser le terme de collision $\Omega_i(\mathbf{x}, t)$, il existe plusieurs modèles ([8]) :

- le modèle Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) avec lequel toutes les fonctions de distribution $f_i(\mathbf{x}, t)$ tendent vers leur valeur à l'équilibre $f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)$ en un même temps de relaxation τ . Pour ce modèle, l'opérateur de collision s'écrit :

$$\Omega_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau} (f_i(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (3)$$

- le modèle Multi Relaxation Time (MRT) avec lequel les moments des fonctions de distribution tendent vers leur valeur à l'équilibre avec des temps de relaxation différents,

- le modèle Two Relaxation Time (TRT) avec lequel les moments des fonctions de distribution tendent vers leur valeur à l'équilibre avec deux temps de relaxation différents.

Les modèles MRT et TRT sont plus stables que le modèle BGK. Ainsi, notre choix s'est porté sur le modèle TRT, qui est un peu plus simple à mettre en oeuvre que le modèle MRT. Le modèle TRT est basé sur le fait que les vecteurs vitesses du réseau sont symétriques ([8] et [12]) :

pour chaque vecteur \mathbf{c}_i , on a $\mathbf{c}_{\bar{i}} = -\mathbf{c}_i$. Ceci permet de décomposer les fonctions de distribution $f_i(\mathbf{x}, t)$ de la façon suivante :

$$f_i^+ = \frac{f_i + f_{\bar{i}}}{2}; f_i^- = \frac{f_i - f_{\bar{i}}}{2} \quad (4)$$

De même, on a pour les fonctions d'équilibre :

$$f_i^{eq+} = \frac{f_i^{eq} + f_{\bar{i}}^{eq}}{2}; f_i^{eq-} = \frac{f_i^{eq} - f_{\bar{i}}^{eq}}{2} \quad (5)$$

où f_i^{eq} se calcule de la façon suivante, pour le modèle $D2Q9$:

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left(1 + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{c}_i \rangle}{c_s^2} + \frac{(\langle \mathbf{v}, \mathbf{c}_i \rangle)^2}{2 c_s^4} - \frac{(\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle)^2}{2 c_s^2} \right), \quad (6)$$

avec ρ et \mathbf{v} la densité et la vitesse du fluide, $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ la célérité du son, ω_i les poids définis par $\omega_0 = \frac{4}{9}$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \frac{1}{9}$ et $\omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = \frac{1}{36}$ pour un schéma $D2Q9$ et \langle, \rangle désigne le produit scalaire. Avec le modèle TRT, l'équation de lattice Boltzmann, lorsqu'on résout un écoulement soumis à une force volumique extérieure \mathbf{F} , est :

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Delta t}{\tau^+} \left(f_i^+(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq+}(\mathbf{x}, t) \right) - \frac{\Delta t}{\tau^-} \left(f_i^-(\mathbf{x}, t) - f_i^{eq-}(\mathbf{x}, t) \right) + \left(1 - \frac{\delta t}{2\tau^+} \right) \mathbf{F}_i, \quad (7)$$

Dans cette équation, τ^+ est le temps de relaxation relié à la viscosité adimensionnelle η par la formule :

$$\eta = \frac{1}{3} \left(\tau^+ - \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

Le temps de relaxation τ^- s'obtient selon :

$$\tau^- = \frac{\Delta t \Lambda}{\tau^+ - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}, \quad (9)$$

avec $\Lambda = \frac{1}{6}$ ([8]). Par ailleurs, \mathbf{F}_i est le terme de force selon la direction i . Il est modélisé grâce à la formulation proposée par Guo et al. ([26]) :

$$\mathbf{F}_i = \langle w_i \left(\frac{(\mathbf{c}_i - \mathbf{v})}{c_s^2} + \frac{\langle \mathbf{c}_i, \mathbf{v} \rangle \mathbf{c}_i}{c_s^4} \right), \mathbf{F} \rangle, \quad (10)$$

où \mathbf{F} est la force volumique apparaissant dans les équations de conservation des quantités de mouvement.

Les grandeurs macroscopiques ρ et \mathbf{v} sont ensuite obtenues par les formules :

$$\rho = \sum_i f_i; \quad \rho \mathbf{v} = \sum_i \mathbf{c}_i f_i + \frac{\mathbf{F} \Delta t}{2} \quad (11)$$

2.2 Formulation eulérienne pour l'étude des solides incompressibles Néo-Hookéen

Soit Ω_f le domaine fluide, Ω_s le domaine solide et Γ l'interface entre le domaine fluide et le domaine solide. On note alors $\Omega = \Omega_f \cup \Omega_s \cup \Gamma$ le domaine global, $\partial\Omega$ sa frontière et $H(\mathbf{x})$ la fonction caractéristique (dépendant du temps) du domaine solide définie comme suit :

$$H(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (12)$$

On désigne par \mathbf{v}_f, ρ_f (respectivement \mathbf{v}_s, ρ_s) le champ de vitesse et la densité du fluide dans Ω_f (respectivement Ω_s). Ainsi, on définit les champ de vitesse et de masse volumique globaux :

$$\rho = \rho_s H + (1 - H) \rho_f, \quad (13)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_s H + (1 - H) \mathbf{v}_f \quad (14)$$

Par défaut, tout les opérateurs de dérivation apparaissant dans la suite sont définis en eulérien.

L'approche utilisée dans ce travail considère une formulation eulérienne pour le domaine solide dans le cadre d'un matériau incompressible Néo-Hookéen, c'est à dire que en particulier $\nu = 0.5$ avec ν le coefficient de Poisson du matériau. Dans ce contexte, pour un fluide de masse volumique ρ_f et viscosité η_f , et un solide de masse volumique ρ_s , et de coefficient de Lamé μ , El Feghali et al. [11] proposent la formulation suivante :

$$\rho(\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v}) - \nabla \cdot (2\eta_f \mathbf{D}(\mathbf{v}_f) + \Theta - p I_d) = \mathbf{F}_v \quad \text{dans } \Omega, \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (16)$$

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) - \frac{1}{2\mu} \Theta = 0 \quad \text{dans } \Omega_s \quad (17)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{dans } \Omega_s \quad (18)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\partial\Omega} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (19)$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (20)$$

où \mathbf{u} désigne le champ de déplacement eulérien dans le domaine solide défini par

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad (21)$$

avec \mathbf{X} les coordonnées Lagrangiennes. \mathbf{L} est le tenseur des contraintes de Green-Lagrange défini par

$$\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left((I_d - \nabla \mathbf{u})^{-T} (I_d - \nabla \mathbf{u})^{-1} - I_d \right), \quad (22)$$

et $\mathbf{D}(\mathbf{v})$ le tenseur des déformations :

$$D(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right). \quad (23)$$

Afin de retrouver à la place de l'équation (15) une forme plus classique de l'équation de Navier-Stokes El Feghali [11] suggère de remplacer $L(\mathbf{u})$ par $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}\Delta t)$ puis de faire un développement limité :

$$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}\Delta t) = L(\mathbf{u}) + \left[\Delta t \mathbf{D}(\mathbf{v}) + \frac{\Delta t}{2} \left((\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \nabla \mathbf{u} \right) \right] \quad (24)$$

Ce choix se justifie en considérant une discrétisation temporelle du problème où à chaque pas de temps les équations (18) et (17) sont résolues avant les équations (15) et (16).

En remplaçant directement Θ par l'équation (17), on définit le pseudo tenseur des contraintes dans le domaine solide

$$\sigma_s = -p_s Id + 2\eta_s \mathbf{D}(\mathbf{v}_s) \text{ dans } \Omega_s \quad (25)$$

avec $\eta_s = \mu \Delta t$ une viscosité artificielle pour le domaine solide, et

$$\mathbf{F}_s = H \nabla \cdot \left(2\mu L(\mathbf{u}) + \frac{\eta_s}{2} \left((\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{v}_s + (\nabla \mathbf{v}_s)^T \nabla \mathbf{u} \right) \right) \text{ sur } \Omega \quad (26)$$

on obtient la formulation globale suivante pour le problème d'interaction fluide structure dans le cadre d'un solide incompressible Néo-Hookéen :

$$\rho (\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \mathbf{v}) = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_s, \quad \text{dans } \Omega, \quad (27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (28)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{dans } \Omega_s \quad (29)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\partial\Omega} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (30)$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x) \quad \text{dans } \Omega \quad (31)$$

Avec

$$\begin{aligned} \sigma &= -p Id + 2\eta_f \mathbf{D}(\mathbf{v}_f) + 2\eta_s \mathbf{D}(\mathbf{v}_s) \\ &= -p Id + 2\eta \mathbf{D}(\mathbf{v}) \end{aligned} \quad (32)$$

et $\eta = \eta_s H + (1 - H)\eta_f$

Il est à noter que l'équation (29) correspond à la dérivée eulérienne du champ de déplacement dans le domaine solide.

2.3 Adaptation de la méthode de Lattice Boltzmann (LBM)

Les équations (27) et (28) sont résolues par la méthode de Lattice Boltzmann avec schéma TRT explicitée dans la section 2.1 où le terme de forçage des équations (10) et (11) devient :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_s \quad (33)$$

Le calcul des gradients et opérateurs laplaciens apparaissant dans le terme (équation (26)) est effectué via un schéma garantissant l'isotropie de la discrétisation [19] :

$$\nabla\psi = \sum_{i \neq 0} \omega_i \mathbf{c}_i (\mathbf{c}_i \cdot \nabla\psi) / c_s^2, \quad (34)$$

$$\Delta\psi = \sum_{i \neq 0} \omega_i (\mathbf{c}_i \cdot \nabla)^2 \psi / c_s^2 \quad (35)$$

avec ψ une quantité macroscopique. Les dérivées selon les vecteurs \mathbf{c}_i sont effectuées via un schéma de différences finies centrées :

$$\mathbf{c}_i \cdot \nabla\psi(\mathbf{x}) = \frac{\psi(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i\Delta t) - \psi(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\Delta t)}{2\Delta t} \quad (36)$$

$$(\mathbf{c}_i \cdot \nabla)^2 \psi(\mathbf{x}) = \frac{\psi(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i\Delta t) - 2\psi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\Delta t)}{2\Delta t^2} \quad (37)$$

L'équation de calcul du déplacement \mathbf{u} (équation (29)) est effectuée via un schéma de différences finies centrées, explicite en temps :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t + \Delta t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \Delta t (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad (38)$$

La fonction caractéristique H suit l'équation d'évolution suivante :

$$\begin{cases} \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla H = 0, & \text{dans } \Omega, \\ H(\mathbf{x}, 0) = H_0(\mathbf{x}), & \text{dans } \Omega, \\ H = H_{\partial\Omega} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (39)$$

Comme les équations sont résolues sur un maillage fixe, on cherche seulement à mettre à jour la valeur de H sur les noeuds du maillage. L'équation (39) est ainsi résolue via intégration de la dérivée particulaire, et la valeur de H sur chacun des noeuds du maillage est calculé explicitement par :

$$H(\mathbf{x}, t) = H_0(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega(t) \quad (40)$$

L'assemblage de l'ensemble de ces éléments se fait via l'algorithme temporel présenté ci-dessous

Algorithme 1 : Algorithme de résolution

- 1 Initialisation $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)$, $f_i^{eq}(\mathbf{x}, 0)$, $f_i^{eq}(\mathbf{x}, 0)$, $H_0(\mathbf{x})$
 - 2 **tant que** $t \leq t_{final}$ **faire**
 - 3 Calcul de $\mathbf{F}_s(t)$
 - 4 Résolution de $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ par LBM
 - 5 Calcul de $\mathbf{u}(t + \Delta t)$ (équation (29))
 - 6 Mise à jour de $H(t + \Delta t)$ (équation(40))
 - 7 $t = t + \Delta t$
-

On notera que la formulation présentée ici ne nécessite pas de calculer explicitement les efforts créés par le fluide sur le solide. Ceux-ci sont intrinsèque à la formulation proposée.

3 Exemples numériques pour les problèmes d'Interaction Fluide Structure (IFS) en petites déformations pour un solide Néo-hookéen

On présente ici 3 cas pour des solides incompressibles Néo-Hookéen. La méthode de Lattice Boltzmann est résolue avec un pas d'espace $\Delta x = 1$ et un pas de temps $\Delta t = 1$ pour des grandeurs adimensionnelles.

3.1 Cavité entraînée avec solide Néo-Hookéen incompressible en partie inférieure

Le premier cas traité concerne celui d'une cavité entraînée dont le fond est constitué d'un solide incompressible Néo-Hookéen (figure 2). Cette configuration a servi de cas de validations dans plusieurs travaux précédents ([6],[30],[24]). Nos résultats seront comparés à ceux obtenus par [30].

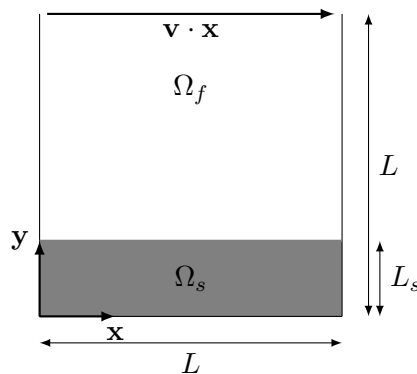


FIGURE 2 – Description de la configuration de la première application à l'état initial

Wang et al [30] étudient une cavité de dimensions $[0, 2]\text{cm} \times [0, 2]\text{cm}$ dont le quart inférieur est occupé par le domaine solide ($L_s = L/4$). Les caractéristiques du fluide et du solide de cette étude sont $\eta_f = 20 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\mu = 0.001 \text{ Pa}$, $\rho_f = \rho_s = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Des conditions de Dirichlet homogènes en vitesse sont imposées en $x = 0$, $y = 0$ et $y = L$, et le déplacement du solide est imposée nul partout sur sa frontière sauf sur l'interface fluide solide. En $y = L$ on impose un profil de vitesse horizontal, tel que :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}(x, L) = \begin{cases} (4v_0)x & , \text{ si } x \in [0, L/4], \\ v_0 & , \text{ si } x \in [L/4, 3L/4], \\ \frac{4v_0}{L}(L-x) & , \text{ si } x \in [3L/4, L], \end{cases} \quad (41)$$

avec $v_0 = 0.5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

L'étude se situe à un nombre de Reynolds de 5.

Pour l'approche LBM les paramètres suivants permettent de résoudre le problème équivalent via la conservation du nombre de Reynolds :

$$L_{\text{LBM}} = 160 \quad v_{0\text{LBM}} = 0.14666 \quad \tau_f^+ = 14.58 \quad \tau_s^+ = 0.526 \quad (42)$$

On définit ainsi les paramètres d'adimensionnement

$$C_v = \frac{v_0}{v_{0\text{LBM}}} \quad C_L = \frac{L}{L_{\text{LBM}}} \quad C_t = \frac{C_v}{C_L}. \quad (43)$$

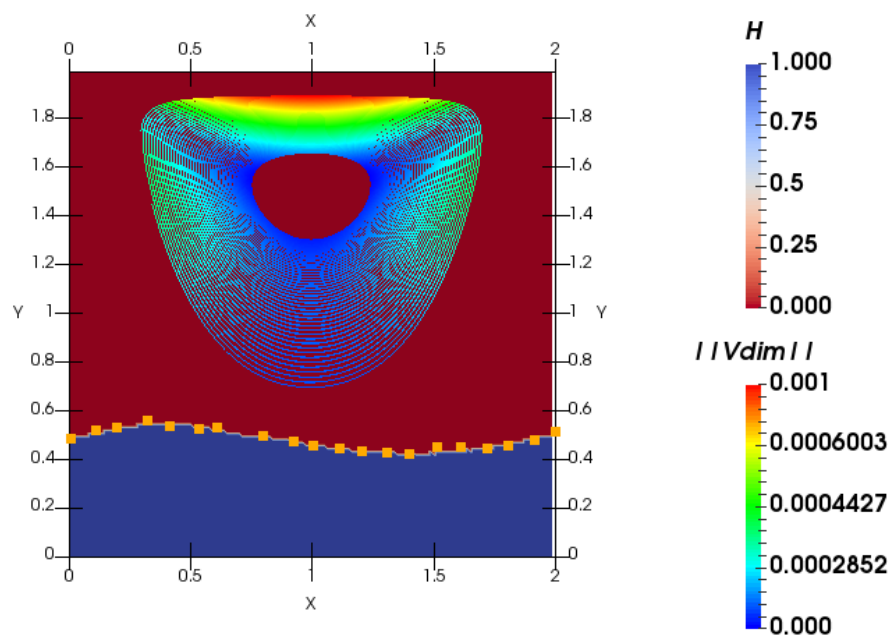


FIGURE 3 – Comparaison de la position de l'interface calculée avec la LBM (H) avec celle de Wang et al [30] (points) et lignes de courant de la vitesse redimensionnée

Afin de comparer les résultats, les données issues de la LBM sont redimensionnées via les coefficients (43). La solution stationnaire obtenue par Wang et al. [30] est ainsi comparée à celle obtenue par la méthode proposée sur la figure 3. On observe une bonne concordance de la déformation des interfaces. L'écoulement se stabilise ainsi que la déformation de l'interface, qui sous l'effet de l'écoulement va s'enfoncer sur la droite de la cavité, là où les efforts du fluide sont les plus élevés. Le solide étant incompressible, cet enfoncement de l'interface est compensé par une élévation sur le côté gauche de la cavité. Au final, le volume de la structure est bien conservé.

3.2 Cavité entraînée avec solide élastique

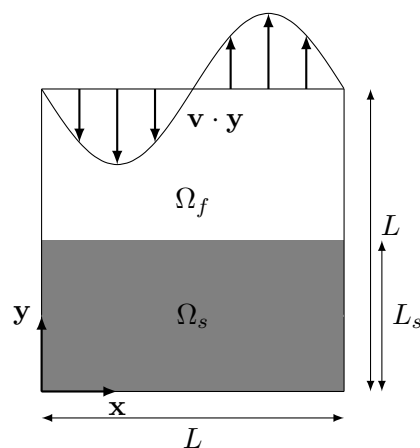


FIGURE 4 – Description de la configuration de la deuxième application

Le second cas (figure 4) est assez similaire au premier, sauf que le profil de vitesse imposée en $y = L$ est cette fois instationnaire et perpendiculaire à la frontière :

$$\mathbf{v}(x, L, t) = V_0 (1 - \cos(2\pi t)) \sin(2\pi x) \mathbf{y}, \quad x \in [0, L], \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (44)$$

Nos résultats sont comparés à ceux de Zhao et al [6], pour une cavité carré dont les dimensions physiques sont de $L = 1$ m, $L_s = L/2$, et les caractéristiques du fluide et du matériau solide sont $\eta_f = 10^{-2}$ Pa.s, $\mu = 0.25$ Pa, $\rho_f = \rho_s = 1$ kg · m⁻³ et $V_0 = 1$ m · s⁻¹. Des conditions aux limites de périodicité sont imposées en $x = 0$ et $x = L$, tandis que en $y = 0$ sont imposées des conditions de Dirichlet homogènes.

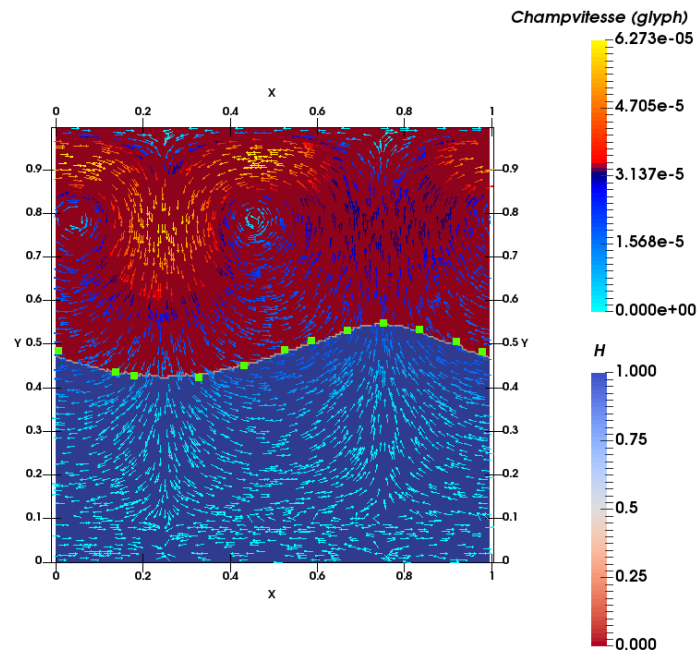


FIGURE 5 – Comparaison de la position de l’interface calculée avec la LBM (H) avec celle de Zhao et al [6] (points verts) et lignes de courant

Les paramètres LBM pour simuler le problème équivalent, calculés à partir du Reynolds estimé en fonction de la vitesse maximale en ($V_{\max} = 2V_0$) et L , sont les suivants :

$$L_{\text{LBM}} = 200 \quad V_{0\text{LBM}} = 0.05 \quad \tau_f^+ = 0.8 \quad \tau_s^+ = 0.502 \quad (45)$$

On représente sur la figure 5 les résultats obtenus par la LBM étendue aux solides incompressibles Néo-Hookéens, comparés avec la déformation de l’interface obtenue par Zhao et al [6] pour un temps de simulation de 1 s. On observe également, dans ce cas d’écoulement instationnaire, que la méthode proposée permet de capturer la physique étudiée.

3.3 Disque déformable dans une cavité entraînée

Le dernier exemple concerne un disque déformable dans une cavité entraînée de dimension $L = 1$ m (figure 6). Initialement, un disque de rayon $R = L/5$, de masse volumique $\rho_s = 1$ kg · m⁻³ et coefficient de Lamé $\mu = 0.1$ Pa est placé en $(x_0, y_0) = (3L/5, L/2)$. Sous l’effet d’un écoulement de masse volumique $\rho_f = 1$ kg · m⁻³ et viscosité $\eta_f = 10^{-2}$ Pa · s, entraîné par une vitesse $\mathbf{v}(x, L) = 1$ m · s⁻¹, le disque solide va se déformer et se déplacer dans la cavité.

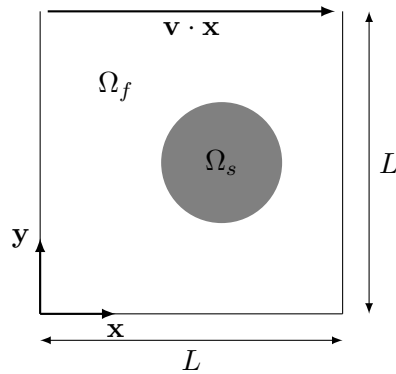


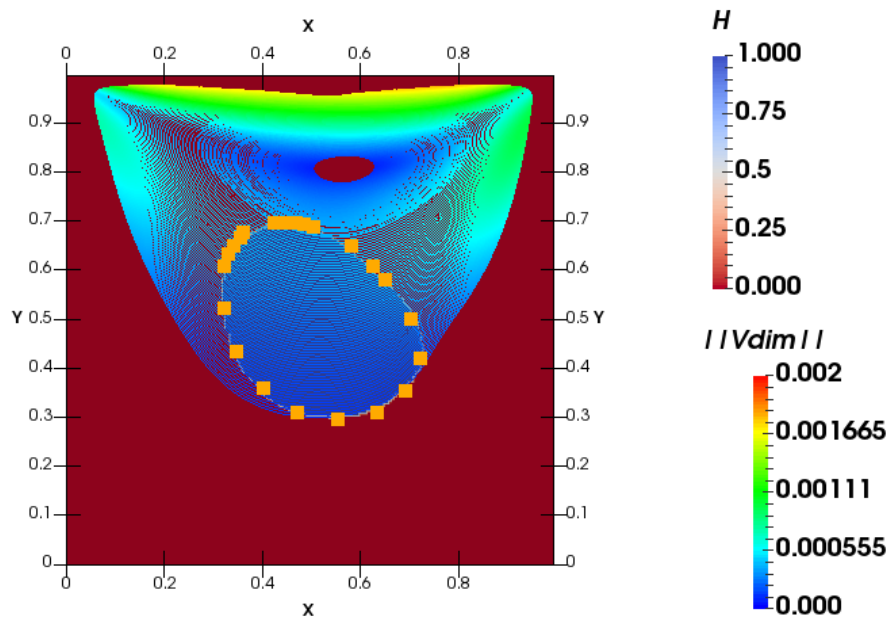
FIGURE 6 – Description de la configuration de la troisième application à l'état initial

eL calcul est LBM est effectué avec les paramètres suivant :

$$L_{\text{LBM}} = 200 \quad V_{0\text{LBM}} = 0.078 \quad \tau_f^+ = 0.968 \quad \tau_s^+ = 0.502 \quad (46)$$

La position et et la déformation sont comparés avec ceux obtenus par Zhao et al. [6] sur la figure 7 pour un temps de simulation $t = 1.17$ s.

On observe que la méthode proposée permet de prédire correctement la physique complexe de ce cas.

FIGURE 7 – Comparaison de la position de l'interface calculée avec la LBM (H) avec celle de Zhao et al [6] (points) et lignes de courant

Sur Fig.7, nous présentons la position de l'interface à l'instant $T_s = 1.17$ s.

On remarque un bon accord entre les résultats obtenus avec la LBM et ceux obtenus par Zhao et al [6] avec les méthode des éléments finis.

On peut conclure que la méthode fonctionne.

4 Conclusions et perspectives

Dans ces travaux, une méthode pour résoudre les problèmes d'Interaction Fluide Structure (IFS) dans le cas de solides incompressibles Néo-Hookéens avec petites déformations via la méthode de Lattice Boltzmann (LBM) est proposée. L'utilisation d'une approche diphasique où le milieu solide est considéré comme un fluide incompressible est considérée. Cela permet, au niveau macroscopique, d'étendre les équations de Navier-Stokes à la structure, et ainsi d'utiliser une formulation LBM unique pour le fluide et le solide. L'approche est testée sur trois configurations de complexité croissante. Pour chacun des cas les résultats obtenus concordent avec ceux de la littérature

Références

- [1] A.A.Mohamad. *Lattice Boltzmann Method, Fundamentals and Engineering Applications with Computer Codes*. Springer, 2011.
- [2] J.R. Clausen; D.A. Reasor Jr.; C.K. Aidun. Parallel performance of a lattice boltzmann/finite element cellular blood flow solver on the ibm blue gene/p architecture. *Comput. Phys. Commun.*, 181 :1013–1020, 2010.
- [3] M. Benamour; E. Liberge; C. Béghein. Lattice boltzmann method for fluid flow around bodies using volume penalization. *International Journal of Multiphysics*, 9 (3) :299–315, 2015.
- [4] M.Bennamour; E.Liberge; C.Beghein. A new approach using lattice boltzmann method to simulate fluid structure interaction. *Energy Procedia*, 139 :481–486, 2017.
- [5] A. Ten Cate; C. Nieuwstad; J. Derksen; H. Van den Akker. Particle imaging velocimetry experiments and lattice boltzmann simulations on a single sphere settling under gravity. *Phys. Fluids*, 14 (11) :4012–4025, 2002.
- [6] Hong Zhao; Jonathan B.Freund; Robert D.Moser. A fixed-mesh method for incompressible flow-structure systems with finite solid deformations. *J. Comput. Phys*, 227 :3114–3140, 2008.
- [7] S. Chen; G. D. Doolen. Lattice boltzmann method for fluid flows. *Annu. Rev. Fluid. Mech.*, 30 (1) :329–364, 1998.
- [8] Timm Kruger; Halim Kusumaatmaja; Alexandr Kuzmin; Orest Shardt; Goncalo Silva et Erlend Magnus Viggen. *The Lattice Boltzmann Method Principles and Practice*. Springer, 2017.
- [9] P. Angot; C.-H. Bruneau; P. Fabrie. A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows. *Numerische Mathematik*, 81 (4) :497–520, 1999.
- [10] Zhe Li; Julien Favier. A non-staggered coupling of finite element and lattice boltzmann methods via an immersed boundary scheme for fluid-structure interaction. *Computers and Fluids*, 143 :90–102, 2017.
- [11] El Feghali. *Nouvelle formulation monolithique en éléments finis stabilisés pour l'Interaction Fluide-Structure*. PhD thesis, ParisTech, Ecole doctorale 364 : Sciences Fondamentales et Appliquées, 2012.
- [12] L. Talon; D. Bauer; N. Gland; S. Youssef; H. Auradou; I. Ginzburg. Assessment of the two relaxation time lattice-boltzmann scheme to simulate stokes flow in porous media. *Water Resources Research*, 48, 2012.

- [13] E. Lorenz; V. Sivadasan; D. Bonn; A. G. Hoekstra. Combined lattice-boltzmann and rigid-body method for simulations of shear-thickening dense suspensions of hard particles. *Computers & Fluids*, 172 :474–482, 2018.
- [14] R. Glowinski; T. W. Pan; T. I. Hesla; D. D. Joseph. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *Int. J. Multiphase Flow*, 25 (5) :755–794, 1999.
- [15] A. Dupuis; P. Chatelain; P. Koumoutsakos. An immersed boundary lattice boltzmann method for the simulation of the flow past an impulsively started cylinder. *J. Comput. Phys.*, 227 (9) :4486–4498, 2008.
- [16] J. Tolke; M. Krafczyk. Teraflop computing on a desktop pc with gpus for 3d cfd. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 22(7) :443–456, 2008.
- [17] A. Ladd. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized boltzmann equation. part 1. theoretical foundation. *J. Fluid Mech*, 271 :285–309, 1994.
- [18] M. Bouzidi; M. Firdaouss; P. Lallemand. Momentum transfer of a boltzmann-lattice fluid with boundaries. *Phys. Fluids*, 13 (11) :3452–3459, 2001.
- [19] Taehun Lee and Ching-Long Lin. A stable discretization of the lattice boltzmann equation for simulation of incompressible two-phase flows at high density ratio. *Journal of Computational Physics*, 206(1) :16 – 47, 2005.
- [20] X. Shi; S. Piang Lim. A lbm-dlm/fd method for 3d fluid-structure interactions. *J. Comput. Phys.*, 226 :2028–2043, 2007.
- [21] Z. Feng; E. Michaelides. The immersed boundary lattice boltzmann method for solving fluid-particles interaction problems. *J. Comput. Phys.*, 195 :602–628, 2004.
- [22] X. Shi; N. Phan-Thien. Distributed lagrange multiplier/fictitious domain method in the framework of lattice boltzmann method for fluid–structure interactions. *J. Comput. Phys.*, 206 (1) :81–94, 2005.
- [23] S. Kollmansberger; S. Geller; A. Duster; J. Tolke; C. Sorger; M. Krafczyk; E. Rank. Fixed-grid fluid-structure interaction in two dimensions based on a partitioned lattice boltzmann and p-fem approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79 :817–845, 2009.
- [24] E.Hachem; S.Feghali; T.Coupez; R.Codina. A three-field stabilized finite element method for fluid-structure interaction : elastic solid and rigid body limit. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 104 :566–584, 2015.
- [25] C. Obrecht; F. Kuznik; B. Tourancheau; J.J. Roux. Multi-gpu implementation of the lattice boltzmann method. *Computers & Mathematics with Applications*, 65 :252–261, 2013.
- [26] Guo; Zheng; Shi. Discrete lattice effects on the forcing term in the lattice boltzmann method. *Phys. Rev. E*, 65, 2002.
- [27] Z. Guo; C. Shu. *Lattice Boltzmann method and its applications in engineering*. World Scientific, 2013.
- [28] D. Yu; R. Mei; W. Shyy. A unified boundary treatment in lattice boltzmann method. 41st aerospace sciences meeting and exhibit, vol. 1. *AIAA*, page 2003–2953, 2003.
- [29] D. Noble; J. Torczynski. A lattice boltzmann method for partially saturated computational cells. *Int. J. Mod. Phys. C*, 9 (8) :1189–1201, 1998.

- [30] Xingshi Wang ; Lucy T.Zhang. Interpolation functions in the immersed boundary and finite element methods. *Comput Mech*, 45 :321–334, 2009.
- [31] A. De Rosis ; G. Falcucci ; S. Ubertini ; F. Ubertini. A coupled lattice boltzmann – finite element approach for two-dimensional fluid-structure interaction. *Computers & Fluids*, 86 :558–568, 2013.
- [32] R. Benzi ; S. Succi ; M. Vergassola. The lattice boltzmann equation : theory and applications. *Physics Reports*, 222 (3) :145–197, 1992.