

# Gonflement et actionnement optimal d'une plaque piézoélectrique soumise à un différentiel de pression

O. Doaré, E. Garnell, C. Rouby

IMSIA, UMR9219, ENSTA Paristech, 828 Boulevard des Maréchaux, 91120 Palaiseau  
olivier.doare@ensta-paristech.fr

## Résumé

*L'objectif de cette étude est de contrôler la dynamique modale d'une enceinte piézo-électrique afin d'atteindre des critères d'efficacité ou de directivité. Dans ce contexte, nous étudions la dynamique et le comportement de rayonnement d'une plaque piézoélectrique déformée par un différentiel de pression statique. Cette pression gonfle la plaque et sa dynamique forcée autour de cette position d'équilibre est ensuite étudiée. À l'aide de la théorie des plaques de von Karman, la position d'équilibre statique d'une plaque de forme quelconque est recherchée avant d'écrire sa dynamique linéaire autour de cette position d'équilibre. Ce problème en deux étapes est résolu numériquement à l'aide d'un logiciel d'éléments finis (Freefem ++). Il en résulte une série de modes propres et de fréquences propres pour chaque valeur de la différence de pression statique. Les forces modales dues au couplage piézoélectrique sont ensuite calculées. En considérant une plaque encastrée dans un plan infini, le rayonnement acoustique est calculé à l'aide de l'intégrale de Rayleigh. Le modèle numérique est utilisé pour effectuer une optimisation paramétrique du système.*

## Abstract

*The goal of the present work is to control the modal dynamics of a piezo-electric loudspeaker in order to reach directivity of efficiency criteria. In this context, we study the dynamics and sound radiation of a piezoelectric plate biased by a static pressure on one side. This pressure inflates the plate and its forced dynamics around this equilibrium position are then studied. With the help of von Karman plate theory, the static equilibrium position of a plate of any shape is sought for before writing its linear dynamics around this equilibrium position. This two-step problem is solved numerically using a finite elements software (Freefem++). This results in a series of eigenmodes and eigenfrequencies for each value of the static pressure difference. Next the modal forces due to the piezoelectric coupling are calculated. By considering a baffled plate, the acoustical radiation is computed using the Rayleigh integral. The numerical model is used to perform a parametric optimisation of the system.*

**Mots clefs : Plaque, piézoélectricité, actionneur et capteur modal, haut-parleur.**

## 1 Introduction

De nombreuses études portent sur la dynamique de plaques piézoélectriques, avec pour objectif de concevoir des haut-parleurs [4], de réduire la transmission acoustique au travers de panneaux [8], ou

encore de contrôler les vibrations d'une structure [2]. Très souvent, le couplage piézoélectrique est intégré au modèle linéaire de plaque de Kirchhoff–Love. Une configuration antisymétrique des couches piézoélectriques est alors considérée afin de coupler le champ électrique et les moments de flexion au sein de la plaque. Une configuration symétrique ne produit en effet que des efforts membranaires et ne permet donc pas d'engendrer un déplacement transversal de la plaque dans le cadre de cette modélisation linéaire. Pour lier le champ électrique au déplacement transversal dans ce cadre, la structure doit présenter une certaine courbure. Il est alors nécessaire de considérer des coques ou des plaques précontraintes. Nous proposons ici une configuration de plaque précontrainte par un différentiel de pression sur laquelle nous nous offrons la possibilité de jouer sur le degré d'assymétrie des couches piézoélectriques.

Ce système peut présenter de nombreuses applications (capteurs pour le contrôle non destructif, microphone, récupération d'énergie...). Nous nous concentrons ici sur une application de type haut-parleur et souhaitons optimiser le rayonnement du système. Un de nos objectifs est de trouver une configuration présentant une réponse à un signal électrique dominée par la réponse selon un seul mode de vibration, sur la plus large gamme de fréquence possible, en jouant sur la forme des électrodes disposées sur la plaque piézoélectrique. On trouve dans la littérature plusieurs travaux cherchant à réaliser un forçage modal en jouant sur la forme des électrodes [5, 4, 9]. L'approche développée dans cet article en reprendra les grands principes en intégrant les précontraintes, le degré d'assymétrie et les propriétés du rayonnement acoustique en basses fréquences dans l'optimisation.

Après la présentation d'un modèle de plaque piezoélectrique précontrainte par un différentiel de pression statique et excitée dynamiquement par une tension électrique sur les électrodes, celui-ci sera utilisé pour réaliser une optimisation de différents paramètres afin de créer un système rayonnant selon un unique mode de structure. Quelques résultats d'optimisation seront présentés et analysés.

## 2 Modèle de plaque soumise à un différentiel de pression

On s'intéresse au système représenté et décrit sur la figure 1. Il s'agit d'une plaque plane d'épaisseur  $h$ , de forme quelconque, de dimension caractéristique  $L$ . Cette plaque est constituée d'un matériau élastique linéaire et isotrope, caractérisé par son module d'Young  $E$  et son coefficient de Poisson  $\nu$ . La plaque est encadrée sur son bord  $\Sigma$ . Le déplacement est noté  $\underline{\xi} = u\underline{e}_x + v\underline{e}_y + w\underline{e}_z$ . Les équations décrivant la dynamique de cette plaque sont obtenues à partir des hypothèses de Von Kármán [6] (plaque mince,  $w$  au plus d'ordre de  $h$  et dérivées petites devant l'unité, déformations faibles, hypothèses de Kirchhoff sur les contraintes dans le plan médian et déplacements  $u$  et  $v$  petits par rapport à  $w$ ).

Localement, les contraintes dans la plaque proviennent des contraintes internes liées à la déformation et des contraintes engendrées par le couplage piézoélectrique :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}) + e_{31}\mathcal{F}\mathcal{E} \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{yy} + \nu\epsilon_{xx}) + e_{31}\mathcal{F}\mathcal{E} \\ \sigma_{xy} &= \frac{E}{1+\nu}\gamma_{xy}\end{aligned}\tag{1}$$

où  $\mathcal{E}$  est le champ électrique dirigé selon  $\underline{e}_z$ . Il vaut  $2\mathcal{V}/h$  dans la moitié supérieure et  $\mathcal{E} = 2c\mathcal{V}/h$  dans la partie inférieure. On suppose ici que le couplage piézoélectrique ne se fait qu'entre le champ électrique selon  $z$  et les contraintes uniaxiales dans le plan de la plaque, et que ce couplage est isotrope

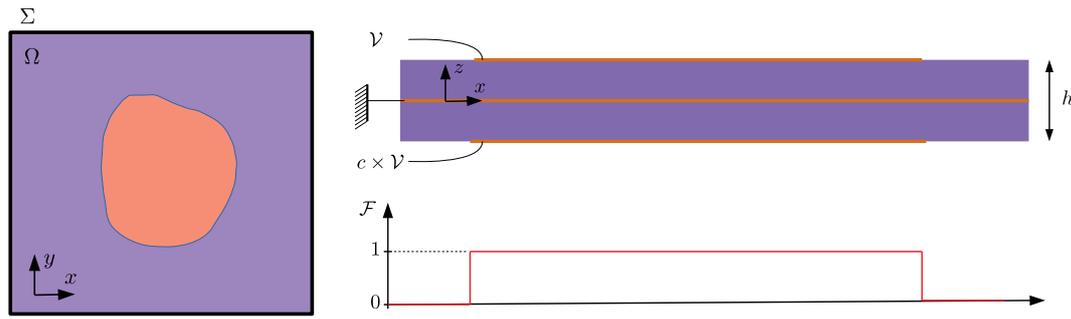


FIGURE 1 – Vue schématique du problème considéré : une plaque définie par son bord  $\Sigma$ , encastré. Le domaine de la plaque est noté  $\Omega$ . Cette plaque est constituée de deux couches piézoélectriques séparées par une électrode. Les faces supérieures et inférieures de cette plaque bi-couche sont recouvertes partiellement d'une électrode. La couleur saumon indique la présence d'une électrode. Sur l'électrode supérieure, un potentiel  $\mathcal{V}$  est imposé, tandis que  $c \times \mathcal{V}$  est imposé sur l'électrode inférieure.

dans le plan. Dans ces dernières équations,  $e_{31}$  est le coefficient couplage piézoélectrique associé. La fonction  $\mathcal{F}$  est une fonction qui décrit le recouvrement partiel par les électrodes du film piézoélectrique. C'est une fonction qui vaut 1 là où l'électrode est présente, et 0 ailleurs.

Les équations décrivant la dynamique non linéaire du système tenant compte des hypothèses énoncées ci-dessus sont détaillées dans de nombreux ouvrages (par exemple [1]). Le même développement est effectué ici en tenant compte du couplage piézoélectrique tel qu'introduit en équation (1). Après avoir introduit les efforts membranaires  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ , et les moments  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ , le comportement lie ces six efforts généralisés aux déformations aux travers de six équations écrites ci-après sous forme adimensionnée, en utilisant les quantités suivantes pour l'adimensionnement :

$$\text{Temps} : L^2 \sqrt{\frac{\rho(1-\nu^2)}{Eh^2}} \quad \text{Longueurs} : L \quad \text{Pression} : \frac{12(1-\nu^2)L^3}{(Eh^3)} \quad (2)$$

$$\text{Efforts membranaires} : \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad \text{Moments} : \frac{Eh^3}{12L(1-\nu^2)} \quad \text{Tension électrique} : \frac{Eh}{e_{31}(1-\nu^2)} \quad (3)$$

Le comportement s'écrit :

$$N_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + (1+c)\mathcal{F}v \quad (4)$$

$$N_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + (1+c)\mathcal{F}v \quad (5)$$

$$N_{xy} = \frac{1-\nu}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (6)$$

$$M_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 3l(1-c)\mathcal{F}v \quad (7)$$

$$M_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 3l(1-c)\mathcal{F}v \quad (8)$$

$$M_{xy} = -(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (9)$$

L'équilibre s'écrit ainsi :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

$$p + \ddot{w} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + 12l^2 \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (12)$$

Ces équations dépendent uniquement de quatre paramètres sans dimension, le coefficient de Poisson  $\nu$ ,  $l = L/h$ , le différentiel de pression sans dimension  $p$  et le paramètre de symétrie du forçage  $c$ , en plus des paramètres décrivant la forme de la plaque. L'encastrement sur le bord  $\Sigma$ , où la normale sortante est notée  $\underline{n}$  implique :

$$u = v = w = 0 \quad \text{et} \quad (13)$$

$$\underline{\text{grad}} w \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \quad (14)$$

### 3 Dynamique linéaire autour d'un état précontraint

On s'intéresse à la réponse du système soumis à une pression statique  $p_0$  lorsqu'une tension électrique  $\mathcal{V}(t)$  est imposée. Pour ce faire, les équations non linéaires présentées dans la section précédente sont tout d'abord séparées entre partie permanente et fluctuations d'amplitude faible par rapport à la partie permanente. Les quantités d'ordre deux sont alors négligées et la forme faible du système est écrite pour ensuite implémenter la méthode des éléments finis dans Freefem++ [7].

Le problème statique non linéaire d'une membrane soumise à  $p = p_0$  est tout d'abord résolu. Numériquement, une méthode de gradient est implémentée dans Freefem++ pour rechercher la solution non linéaire. Cette solution est représentée en figure figure 3 pour quelques valeurs typiques des paramètres du problème.

Ensuite, la dynamique linéaire du système autour de l'état précontraint par une pression statique  $p$  est écrite. La méthode des éléments finis permet de calculer les matrices de masse  $M$  et raideur  $K$ . Il est à noter que la matrice de raideur éléments finis n'est pas symétrique et l'analyse modale numérique du problème fait intervenir deux familles de modes : les modes droits  $\phi$ , issus du problème aux valeurs propres direct, et les modes gauches  $\psi$ , donnés par le problème aux valeurs propres transposé. Ainsi la dynamique du système forcé dans la base modale fait intervenir une expansion selon les modes droits des 9 quantités du problème. Le déplacement  $w$  selon  $z$  s'écrit ainsi,

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \phi_{wn}(x, y), \quad (15)$$

et le vecteur des forces modales, issu d'une projection sur les modes gauche, s'écrit

$$F_n = \int_{\Omega} [(1+c)(\psi_{N_{xx}} + \psi_{N_{yy}}) + 3l(1-c)(\psi_{M_{xx}} + \psi_{M_{yy}})] \mathcal{F} v d\Omega$$

Dans cette expression de la force modale apparaissent les projections de  $\mathcal{F}$  sur deux fonctions modales,

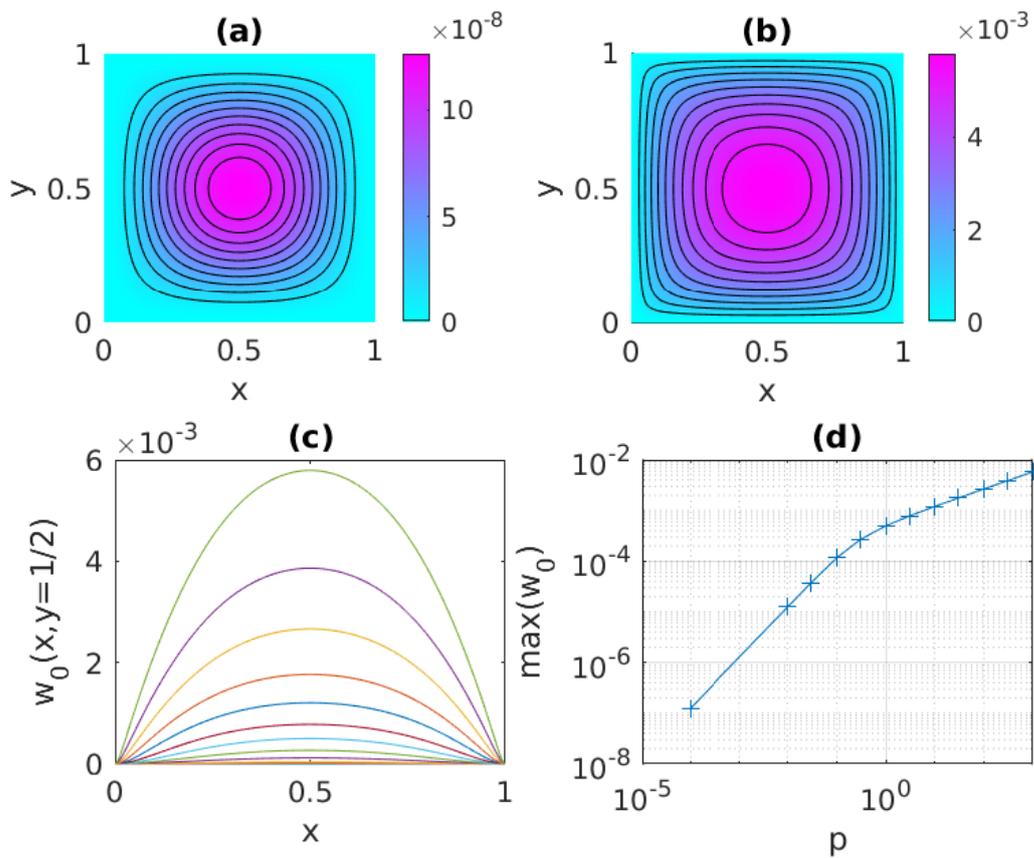


FIGURE 2 – Déformation statique d'une plaque soumise à un différentiel de pression  $p$  pour  $l = 3.33 \times 10^4$  et  $\nu = 0.25$ . (a) Déplacement  $w$  pour  $p = 10^{-4}$ , (b) déplacement pour  $p = 100$  (c) déplacement  $w(x, y = 1/2)$  pour différentes valeurs de  $p$  entre  $10^{-4}$  et  $10^3$ , (d) valeur maximale du déplacement en fonction de  $p$ .

l'une liée aux efforts membranaires  $N_x + N_y$ , l'autre aux moments  $M_x + M_y$ . Il est à noter un facteur  $l$  devant la projection sur les moments. Pour des plaque minces,  $l$  est très grand ( $l = 3.33 \times 10^4$  dans le cas traité dans cet article). Ainsi, pour que les efforts membranaires contribuent significativement à la force modale  $n$ , il faut que  $\psi_{N_{xn}} + \psi_{N_{yn}}$  soit de plusieurs ordres de grandeur supérieur à  $\psi_{M_{xn}} + \psi_{M_{yn}}$ . C'est ce que l'on observe en pratique pour les grandes valeurs de la pression de gonflement  $p$ . Cela est illustré en figure 3 où sont représentés  $\phi_{w1}$ ,  $\psi_{M_{x1}} + \psi_{M_{y1}}$  et  $\psi_{N_{x1}} + \psi_{N_{y1}}$  pour deux pressions de gonflement. On observe que lorsque  $p$  augmente, les efforts membranaires de ce mode deviennent très grands par rapport aux moments, de sorte que même en facteur d'un coefficient  $l = 3.33 \times 10^4$ , ils sont dominants.

Soit  $w = \Re(\hat{w}(x, y)e^{i\omega t})$  la réponse harmonique de la plaque lorsqu'une tension d'entrée de la forme  $v = \Re(\hat{v}e^{i\omega t})$  est appliquée. L'amplitude dans l'espace de Fourier  $\hat{w}$  prend alors la forme d'une somme de contributions modales,

$$\hat{w}(x, y) = \sum_n \frac{F_n \phi_{wn}(x, y)}{\omega_n^2 - \omega^2}. \quad (16)$$

En faisant en plus l'hypothèse de longueurs d'ondes acoustiques rayonnées grandes devant  $L$ , la pression rayonnée à une distance  $R_0 \gg L$  de la plaque encastée dans un plan rigide infini prend la forme simple

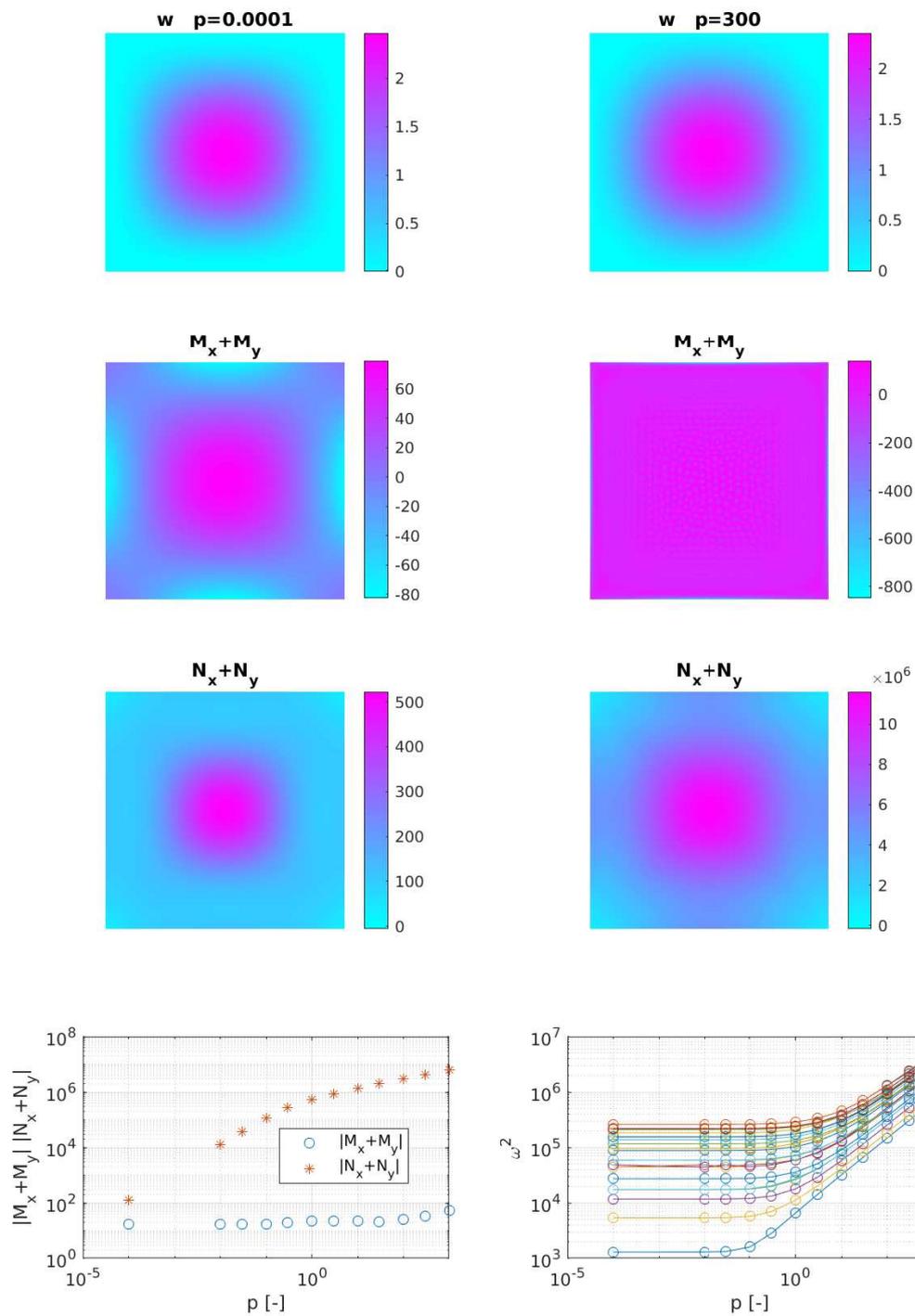


FIGURE 3 – Premier mode propre pour deux valeurs de gonflement différentes. La première ligne correspond au déplacement du premier mode gauche, les deux suivantes au premier mode droit selon les composantes des moments et des efforts membranaires respectivement. La figure en bas à droite représente la valeur moyenne de ces composantes en fonction de  $p$ , et la figure en bas à droite représente l'évolution des valeurs propres  $\omega^2$  en fonction de  $p$ .

ci-dessous,

$$\frac{2\pi P}{\rho_f c_0^2} = -e^{ikr_0} \sum_n \frac{F_n \chi_n}{\omega_n^2 - \omega^2}, \quad \text{avec } \chi_n = \int_{\Omega} \phi_{wn} ds, \quad (17)$$

où  $P$  est en Pascals,  $k$  est le nombre d'onde acoustique adimensionné par  $L$  et  $r_0 = R_0/L$ . Cette approximation en basse fréquences est obtenue en pratique à partir de l'intégrale de Rayleigh [3]. On voit ainsi qu'avec les approximations faites, la contribution au rayonnement d'un mode  $n$  de la structure est directement proportionnelle au produit  $F_n \chi_n$ . C'est sur cette quantité que l'optimisation de la section suivante est basée.

## 4 Optimisation de la géométrie des électrodes

Le rayonnement associé à une tension d'entrée  $v(t)$  du système a été calculé en section précédente. Cette modélisation peut ensuite être mise à profit pour optimiser la géométrie du système pour différents objectifs. On propose ici de travailler sur une géométrie d'électrodes définie à partir d'anneaux concentriques, paramétrée par cinq rayons et schématisée en figure 4a. Cette géométrie définit la fonction  $\mathcal{F}$  définie en figure 1 et apparaissant dans l'équation (16), qui vaut 1 là où l'électrode est présente et 0 ailleurs. L'objectif fixé ici est de maximiser le rayonnement de la plaque selon un mode, et minimiser les autres. On cherche ainsi à minimiser la fonction coût :

$$J = \frac{\sum_{n=1, n \neq m}^N (\chi_n F_n)^2}{(\chi_m F_m)^2}, \quad (18)$$

avec les contraintes,

$$0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_5 < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 < \gamma < 1. \quad (19)$$

Cette optimisation a été réalisée pour différentes valeurs des paramètres  $\bar{h}$ ,  $\nu$  et  $p$ , en faisant appel à un algorithme génétique, implémenté sous Matlab. Dans la suite on se concentrera sur le cas  $m = 1$ .

En figure 4 sont présentés trois cas de meilleurs optimaux locaux pour trois valeurs de pression de gonflement différentes. Les fonctions de réponse en fréquence loin de la plaque sont tracées en figure 4. Les lignes grisées correspondent à la réponse en fréquence obtenue si on fait une erreur de +5% ou -5% sur les dimensions des électrodes. La plaque soumise à un fort différentiel de pression semble à la fois donner un optimal plus robuste et augmenter l'efficacité du rayonnement.

## 5 Conclusion

Nous avons présenté un modèle faiblement non linéaire d'une plaque de forme quelconque encadrée forcée par un différentiel de pression statique et un chargement dynamique par le couplage piézoélectrique. Ce modèle permet de calculer rapidement la dynamique et le rayonnement acoustique et a pu ainsi être utilisé pour réaliser un travail d'optimisation sur plusieurs paramètres (géométrie des électrodes  $r_1 \dots r_5$  et coefficient d'assymétrie du forçage piézoélectrique  $\gamma$ ) dont l'objectif est de maximiser le rayonnement du modes 1 par rapport aux autres. Ce problème d'optimisation présente de nombreux minima locaux et bien qu'une longue phase d'exploration de l'algorithme génétique avec de vastes populations soit effectuée pour chaque cas, nous n'avons pas de preuve qu'il s'agisse d'un minimum global. Pour autant, les résultats montrent que l'on est capable d'isoler le rayonnement d'un unique mode.

Nous constatons aussi une très grande sensibilité de la fonction coût  $J$  aux paramètres du problème, le minimum trouvé par l'algorithme génétique, qu'il soit local ou global, se trouvant au fond d'un puits

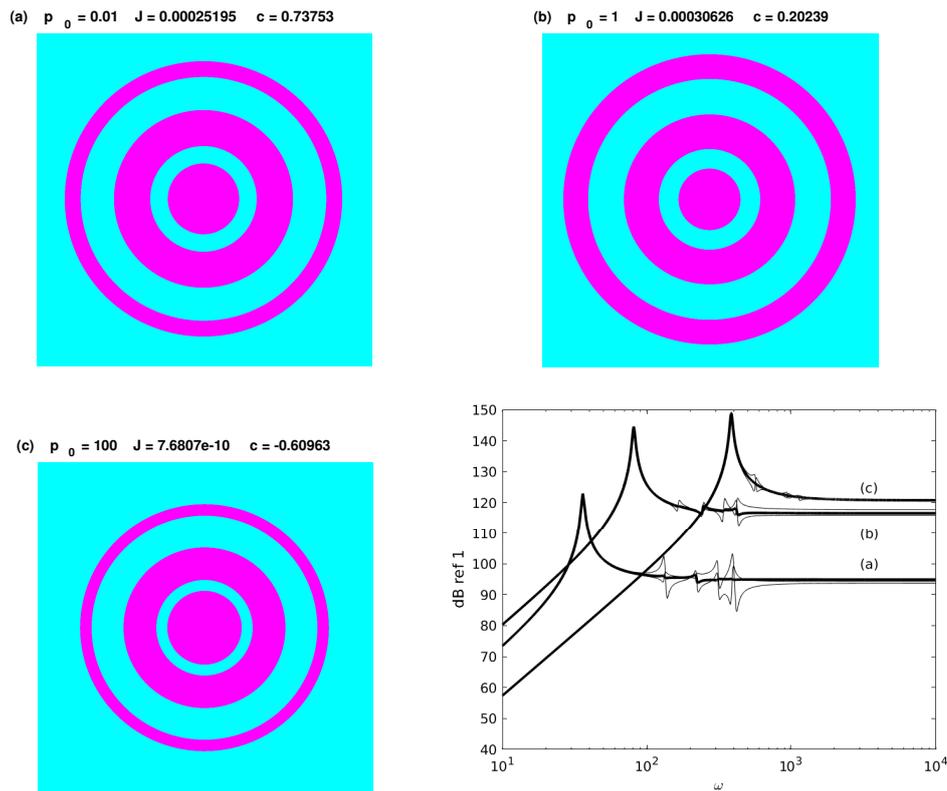


FIGURE 4 – Différentes configurations correspondant aux meilleurs minima locaux trouvés par l’algorithme génétique.

très étroit. Cette particularité n’est pas mentionnée dans les travaux précédents sur les actionneurs ou capteurs modaux basés sur une distribution d’électrodes binaire ( $\mathcal{F} = 0$  ou  $1$ ) [5], et peut poser des problèmes de fiabilité dans le cadre d’une application pratique. La configuration proposée dans ce travail peut avantageusement palier à ce problème, car deux paramètres peuvent être ajustés après la conception du dispositif, la pression de gonflement  $p_0$  et le coefficient d’asymétrie  $c$  du forçage piézoélectrique.

Nous travaillons à présent sur d’autres formes et d’autres objectifs d’optimisations, ainsi qu’à la réalisation de prototypes optimisés.

## Références

- [1] Marco Amabili. *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*. Cambridge University Press, 2008.
- [2] Isabelle Bruant, Laurent Gallimard, and Shahram Nikoukar. Optimal piezoelectric actuator and sensor location for active vibration control, using genetic algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 329(10) :1615–1635, 2010.
- [3] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des Instruments de Musique*. 2008.
- [4] O. Doaré, G. Kergourlay, and C. Sambuc. Design of a circular clamped plate excited by a voice coil and piezoelectric patches used as a loudspeaker. *Journal of Vibration and Acoustics*, 135(5) :051025, 2013.
- [5] A. Donoso and J. C. Bellido. Distributed piezoelectric modal sensors for circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, 319(1-2) :50–57, 2009.

- 
- [6] Yuan-cheng Fung. *Foundations of solid mechanics(Book on deformation and motion of elastic and plastic solids including variational calculus and tensor analysis)*. 1965.
- [7] F. Hecht and A. le Hyaric. <http://www.freefem.org/ff++/index.htm>.
- [8] N. Quaegebeur, P. Micheau, and A. Berry. Decentralized harmonic control of sound radiation and transmission by a plate using a virtual impedance approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 125(5) :2978–86, 2009.
- [9] Xiaopeng Zhang and Zhan Kang. Topology optimization of piezoelectric layers in plates with active vibration control. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 25(6) :697–712, 2014.