

# Analyse dynamique des structures dissipatives subissant des modifications paramétriques

M. O. Dadah<sup>1</sup>, M. H. Aitrimouch<sup>1</sup>, M. A. MOUSRIJ<sup>2</sup>, M. H. Grimech<sup>1</sup>

1. Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, FST Béni Mellal,  
Université Sultan Moulay Slimane, BP 523 (Maroc)

2. Laboratoire Ingénierie Mécanique-Management Industriel et Innovation, FST Settat  
Université Hassan Premier(Maroc)

## Résumé

*Dans la plupart des secteurs de l'ingénierie mécanique, les vibrations peuvent conduire à la détérioration progressive ou l'effondrement brutal des structures. Il est essentiel de pouvoir caractériser ses vibrations au stade de la conception (élaboration d'un modèle mathématique) afin d'en réduire leurs conséquences néfastes (réduction des sollicitations, modification de la conception, isolation vibratoire, influence des effets d'amortissement). Etant donné la taille, la complexité des structures et le caractère répétitif des procédures utilisées, une réanalyse exacte reste longue et coûteuse. Pour cela plusieurs méthodes de réanalyse approchées ont été développées pour prédire le comportement dynamique des structures.*

*On se propose ici de développer une méthode de réanalyse modale, précise et performante, permettant de traiter le cas des structures conservatives et (ou) dissipatives. La technique proposée permet de réduire considérablement la taille du problème aux valeurs propres associées à la structure modifiée et de tenir compte des effets dus à la troncature modale. Dans ce travail, les modifications introduites n'altèrent pas la taille de la structure d'origine (pas d'ajout de ddl).*

*Des exemples de simulation numérique sont proposés pour tester la précision de la méthode.*

## Abstract

*In the most mechanical engineering, vibrations can gradually damage structures. For that, it is necessary to develop a mathematic model which describes these vibrations, in order to reduce their consequences during design. If we consider the structure's size and complexity, and also the repetitive nature which characterize these procedures, an exact reanalysis is a long and expensive choice. That is why, several method have been developed to help predicting systems behavior.*

*In this work, we will develop a method of Modal Reanalysis, which will be precise and efficient, and useful for either conservative or dissipative structures. This technique can also reduce problems related to these structures, and consider the effects due to modal truncation. In this work, all of the changes introduced don't affect the original structures size (there is no addition of DOFs).*

*Numerical tests illustrating the effectiveness of this method are presented.*

## Mots clefs

**Vibrations - Réanalyse - Troncature modale -Déformées statiques – Eléments finis – Modifications paramétriques.**

## 1. INTRODUCTION

La prédiction du comportement dynamique d'une structure mécanique est une exigence pour l'assurance de la fiabilité du matériel et le respect des critères vibratoires. Pour atteindre ces objectifs, les concepteurs sont souvent entraînés dans un processus d'essais et d'erreurs successives. En effet, le produit final résulte de multiples modifications apportées successivement au prototype initial. Ayant utilisé une méthode classique pour déterminer les modes propres et les réponses de la structure initiale, le concepteur, après modification de cette dernière, est contraint de réviser son modèle et de recalculer les réponses par le même procédé jusqu'à l'obtention du modèle souhaité. Lorsque la taille de la structure est très importante, plusieurs milliers de ddl, ce procédé itératif devient lourd et coûteux.

Les méthodes de réanalyse sont conçues pour une analyse des structures subissant des modifications à cause d'une détérioration, d'un mauvais entretien, accidents. Le but est d'évaluer la réponse structurelle (les déplacements, les forces et les contraintes) pour de tels changements sans résoudre l'ensemble complet d'équations simultanées modifiées [DUNCAN 11]

Afin d'accélérer la procédure de conception, plusieurs méthodes simplifiées, appelées techniques de réanalyse, ont été proposées appelées techniques de réanalyse [Lang 8], servant de clarifier les explications faites sur les modes complexes. Pourtant, peu nombreux les œuvres qui s'intéressent au cas amorti, si on exclue ceux qui essaient de le faire en utilisant une approche mathématique permettant d'exprimer la matrice d'amortissement comme une combinaison linéaire des matrices de masse et de rigidité, ce qui nous permet d'avoir les modes réels d'un système conservateur associé, bien qu'elle n'a plus de sens physique, puisqu'elle repose sur une formulation strictement mathématique.

Parmi ces approches de réanalyse, nous nous sommes intéressés par l'approche de Réception, présentée par [Palazzolo 9] qui l'a développée en absence des amortissements.

Qu'il s'agit du type structurel dû à la friction interne au niveau des ddl de connexions d'une structure, visqueux lié aux vibrations d'un système dans l'air ou dans un liquide, négatif résultant lors d'ajouter, au lieu de dissiper, de l'énergie, à un système en vibration ou un de type Coulomb dû au déplacement d'un corps sur une surface sèche, l'effet de l'amortissement sur la réponse structurelle est sans doute un sujet à développer, tout en essayant de présenter des méthodes permettant de calculer les coefficients d'amortissement, ainsi que l'analyse de réponse des systèmes à multiples ddl. Notons que la matrice d'amortissement peut être de forme symétrique ou non, proportionnelle ou non proportionnelle, où le dernier cas implique des solutions propres de formes complexes

[Level 10] ont repris le travail réalisé par Palazzolo et l'ont adapté à des cas spécifiques de structures amorties, il s'agit d'une procédure qui vise à améliorer les solutions propres d'une structure mécanique à travers une réanalyse efficace dans un temps de calcul réduit, ainsi que dans une taille de mémoire réduite.

D'autres formulations ont été proposées dans le domaine conservatif [Coppolino 2], [Coupry 3]. Elles se basent toutes sur l'exploitation d'une base modale tronquée. Cette troncature peut fausser considérablement l'estimation des solutions propres de la structure modifiée. Pour contourner cet inconvénient, certains auteurs [Sohaney 5], [Aitrimouch 1] introduisent certains termes correcteurs sous formes de résidus identifiables à partir d'essais.

Dans ce travail, on propose une méthode de réanalyse traitant le cas de structures conservatives et (ou) dissipatives et permettant de tenir compte, d'une manière significative, des effets de la troncature modale. Cette méthode sera validée par trois tests de simulation numérique : le 1er correspond au cas d'une structure conservative, le 2ème à celui d'une structure dissipative à amortissement proportionnel et le 3ème pour une structure dissipative à amortissement non proportionnel.

## 2. HYPOTHESES GENERALES

Si le solide est rendu dissipatif par un mécanisme d'amortissement interne ou externe de type visqueux, son comportement en régime libre, lorsque le corps est admis non tournant, est régi par les équations différentielles semi discrètes, après annulation du second membre.

$$M\ddot{q}(t) + B\dot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad (1)$$

Où  $K$ ,  $M$  et  $B \in R^{n,n}$  sont des matrices de raideur, de masse et d'amortissement, réelles symétriques et définies positives. Alors que  $q$  représente le vecteur de  $n$  degré de liberté repéré dans un référentiel d'inertie.

L'équation du comportement mécanique autonome, dans le domaine fréquentiel, régissant la structure dissipative est donnée par le système de taille  $n$  suivant :

$$(s_\nu^2 M + s_\nu B + K)z_\nu = 0 \quad (2)$$

Où  $s_\nu$  et  $z_\nu$  sont respectivement la  $\nu^{\text{ème}}$  valeur propre et le  $\nu^{\text{ème}}$  vecteur propre de la structure dissipative.

L'équation du système conservatif associé est donné par :

$$(K - \lambda_\nu M)x_\nu = 0 \quad (3)$$

Ce système admet  $n$  valeurs propres réelles positives, ses matrices modales et spectrales sont découpées sous la forme suivante :

$$X = [X_1 X_2]; \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

où :  $X_1 \in R^{n,m}$  matrice modale connue ;  $\Lambda_1 = \text{Diag} \{ \lambda_\nu, \nu = 1, 2, \dots, m \}$  matrice spectrale connue ;  $m$  étant le nombre de modes identifiés.

$X_2 \in R^{n,n-m}$  matrice modale inconnue ;  $\Lambda_2 = \text{Diag}\{\lambda_\nu, \nu = m+1, \dots, n\}$  matrice spectrale inconnue.

Les matrices  $X, \Lambda, K$  et  $M$  vérifient les relations d'orthogonalités suivantes :

$$X^T M X = I ; \quad X^T K X = \Lambda \quad (5)$$

où  $I$  est la matrice unité. Les valeurs propres sont classées par ordre croissant  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

La structure modifiée est caractérisée par les matrices masse  $\widehat{M} = M + \Delta M \in R^{n,n}$ , raideur  $\widehat{K} = K + \Delta K \in R^{n,n}$  et amortissement  $\widehat{B} = B + \Delta B \in R^{n,n}$  ;  $\Delta M$ ,  $\Delta K$  et  $\Delta B$  sont respectivement les matrices de modification de masse, de raideur et d'amortissement.

Le système modifié aura la forme suivante :

$$[\hat{s}_\nu^2 \widehat{M} + \hat{s}_\nu \widehat{B} + \widehat{K}] \hat{z}_\nu = 0 \quad (6)$$

On cherche à déterminer les solutions propres  $\hat{s}_\nu$  et  $\hat{z}_\nu$  de la S.M. Connaissant les modifications introduites et les paramètres modaux identifiés de la structure initiale.

## 2.1. Cas des structures conservatives

Pour des structures conservatives ( $B = 0$  et  $\Delta B = 0$ ), le problème aux valeurs propres de la S.M [éq (6)], s'écrit :

$$[\widehat{K} - \hat{\lambda}_\nu \widehat{M}] \hat{x}_\nu = 0 \quad \nu = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

Cette équation peut être résolue, dans l'espace physique ou modale. La plupart des logiciels d'analyse par éléments finis peuvent résoudre ce problème dans l'espace physique.

Pour résoudre le problème aux valeurs propres en coordonnées modales, on effectue la projection de  $\hat{x}_\nu$  dans la base modale  $X$  de la S.I. comme suit :

$$\hat{x}_\nu = X p_\nu \quad (8)$$

où  $p_\nu$  est le vecteur des coordonnées généralisées.

L'injection de l'équation (7) dans (6) et la prémultiplication par  $X^T$ , conduit au problème aux valeurs propres suivant :

$$[\Lambda + X^T \Delta K X - \hat{\lambda}_\nu (I + X^T \Delta M X)] p_\nu = 0 \quad (9)$$

Les solutions de l'équation précédente sont exactes si tous les modes de la structure d'origine sont utilisés.

L'objectif est d'évaluer les meilleures solutions approchées de l'équation (8), en utilisant uniquement les paramètres modaux identifiés de la structure d'origine.

Dans tout ce qui suit les modifications seront de types paramétriques (pas de changement de taille de la structure initiale).

Après utilisation de la décomposition (3), l'équation (8) se ramène à la résolution du système suivant :

$$\begin{cases} [\Lambda_1 + X_1^T \widehat{\Delta K} X_1 - \hat{\lambda}_\nu (I_1 + X_1^T \widehat{\Delta M} X_1)] p_{1\nu} = 0 & (10) \\ X_2 p_{2\nu} = -\Phi R_1 \cdot (\Delta K - \hat{\lambda}_\nu \Delta M) \cdot X_1 p_{1\nu} & (11) \end{cases}$$

$$\text{Avec : } \widehat{\Delta K} = \Delta K \Phi ; \widehat{\Delta M} = \Delta M \Phi + (\Delta K - \hat{\lambda}_v \Delta M) \Phi R_1 M \quad (12)$$

$$\Phi = [I + R_1 \Delta K - \hat{\lambda}_v R_1 \widehat{M}]^{-1} \quad (13)$$

$$R_1 = X_2 \Lambda_2^{-1} X_2^T \quad (14)$$

Dans une bande fréquentielle réduite  $[0, f_{\max}]$ , où  $f_{\max}$  doit être inférieure ou égale à la plus grande fréquence identifiée de la S.I, la matrice  $\Phi$  peut être approximée par le développement en série à l'ordre  $n$ . comme suit :

$$\Phi \cong \Psi [I + \hat{\lambda}_v R_1 \widehat{M} + \hat{\lambda}_v (R_1 \widehat{M} \Psi) + \hat{\lambda}_v^2 (R_1 \widehat{M} \Psi)^2 + \dots + \hat{\lambda}_v^n (R_1 \widehat{M} \Psi)^n] \quad (15)$$

$$\text{avec : } \Psi = [I + R_1 \Delta K]^{-1} \quad (16)$$

En introduisant (13) dans (9), cette dernière s'écrit :

$$[\Lambda_1 + X_1^T \widehat{\Delta K} X_1 - \hat{\lambda}_v (I_1 + X_1^T H_1 X_1) - \hat{\lambda}_v^2 (X_1^T H_2 X_1) - \dots - \hat{\lambda}_v^n (X_1^T H_n X_1)] p_{1v} = 0 \quad (17)$$

$$\text{où : } \begin{cases} H_k = H_{(k-1)} \cdot D_1 + H_{(k-2)} \cdot D_2 + \dots + H_1 \cdot D_{(k-1)} - \widehat{\Delta K} \cdot D_k, & \text{pour } k = 2, \dots, n \\ H_1 = \widehat{\Delta K} - \widehat{\Delta M} \cdot D_1 \end{cases} \quad (18)$$

$$\widehat{\Delta K} = \Delta K \Psi ; \widehat{\Delta M} = \Delta M \Psi ; D_k = R_k \widehat{\Delta M} - R_{(k+1)} \widehat{\Delta K} ; R_k = X_2 \Lambda_2^{-k} X_2^T \quad (19)$$

A partir de l'équation (15), on obtient les valeurs propres  $\hat{\lambda}_v$  et les vecteurs  $p_{1v}$ . Les vecteurs propres de la S.M. sont exprimés en fonction de  $p_{1v}$  par l'équation suivante:

$$\hat{x}_v = \Psi [I + \hat{\lambda}_v C_1 + \hat{\lambda}_v^2 C_2 + \dots + \hat{\lambda}_v^n C_n] X_1 p_{1v} \quad (20)$$

$$\text{où : } \begin{cases} C_k = D_1 \cdot C_{(k-1)} + D_2 \cdot C_{(k-2)} + \dots + D_{(k-1)} \cdot C_1 + D_k, & \text{pour } k = 2, \dots, n \\ C_1 = D_1 \end{cases} \quad (21)$$

## 2.2. Modification structurale des structures dissipatives

### 2.2.1. amortissement visqueux proportionnel

Dans l'équation du mouvement de la structure dissipative modifiée [éq. (5)], projetons le vecteur déplacement  $\hat{z}_v$  dans la base modale,  $X$ , de la structure conservative associée à la structure d'origine :

$$\hat{z}_v = X p_v = X_1 p_{1v} + X_2 p_{2v} \quad (22)$$

Après l'introduction de (21) dans (5) et pré multiplication par  $X^T$ , on obtient le système suivant :

$$[\Lambda + X^T \Delta K X + \hat{s}_v (\beta + X^T \Delta B X) + \hat{s}_v^2 (I + X^T \Delta M X)] p_v = 0 \quad (23)$$

Où  $\beta = X^T B X$  est la matrice des amortissements généralisés. Cette matrice symétrique est en générale pleine. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit diagonale est  $B M^{-1} K = K M^{-1} B$  (c'est l'hypothèse de basile qui n'est vérifiée que le cas où les valeurs propres sont distinctes). En pratique  $\beta$  n'est jamais diagonale, cependant l'influence de ses termes extra diagonaux sur le comportement d'une structure mécanique est généralement négligeable [Coupry 4], sauf dans le cas de fréquences propre très voisines.

En utilisant la décomposition (3) et (22) dans (5), on obtient le système suivant :

$$[\Lambda_1 + X_1^T \Delta K X_1 + \hat{s}_v (\beta_1 + X_1^T \Delta B X_1) + \hat{s}_v^2 (I_1 + X_1^T \Delta M X_1)] p_{1v} + X_2^T [\Delta K + s_v \Delta B + \hat{s}_v^2 \Delta M] X_2 p_{2v} = 0 \quad (24)$$

$$X_2^T [\Delta K + \hat{s}_v \Delta B + \hat{s}_v^2 \Delta M] X_1 p_{1v} + [\Lambda_2 + X_2^T \Delta K X_2 + \hat{s}_v (\beta_2 + X_2^T \Delta B X_2) + \hat{s}_v^2 (I_2 + X_2^T \Delta M X_2)] p_{2v} = 0 \quad (25)$$

$$\text{Avec : } \Lambda_1 = X_1^T K X_1 ; \Lambda_2 = X_2^T K X_2 ; I_1 = X_1^T M X_1 ; I_2 = X_2^T M X_2 ; \beta_1 = X_1^T B X_1 ; \beta_2 = X_2^T B X_2$$

La combinaison des équations (22) et (23) conduit à :

$$[\Lambda_1 + \delta K + \hat{s}_v(\beta_1 + \delta B) + \hat{s}_v^2(I_1 + \delta M) - X_1^T \cdot \Delta S \cdot \Phi \cdot R_1 \cdot \Delta S \cdot X_1] p_{1v} = 0 \quad (26)$$

$$X_2 p_{2v} = -[I + R_1 \Delta K + \hat{s}_v R_1 \hat{B} + \hat{s}_v^2 \hat{M}]^{-1} R_1 \cdot \Delta S \cdot X_1 p_{1v} \quad (27)$$

Avec :  $\delta K = X_1^T \Delta K X_1$ ;  $\delta M = X_2^T \Delta M X_2$ ;  $\delta B = X_1^T \Delta B X_1$ ;  $\Delta S = \Delta K + \hat{s}_v \Delta B + \hat{s}_v^2 \Delta M$

$$\Phi = [I + R_1 \Delta K + \hat{s}_v R_1 \hat{B} + \hat{s}_v^2 \hat{M}]^{-1} = \Psi [I - P + P^2 - \dots] \quad (28)$$

$$\Psi = [I + R_1 \Delta K]^{-1}; R_1 = X_2 \Lambda_2^{-1} X_2^T \text{ et } P = \hat{s}_v R_1 (\hat{B} + \hat{s}_v \hat{M}) \Psi$$

Si  $\|P\| \ll 1$  (condition souvent vérifiée à cause de la forme de la matrice  $P$ ) et si on se limite à un développement en  $\hat{s}_v^2$  de, l'équation (25) se réduit à :

$$[A_0 + \hat{s}_v A_1 + \hat{s}_v^2 A_2] p_{1v} = 0 \quad (29)$$

$$A_0 = [\Lambda_1 + X_1^T \Delta \hat{K} X_1]; A_1 = [\beta_1 + X_1^T (\Delta \hat{K} R_1 \hat{B} \Psi - \Delta \hat{K} R_1 B - \Delta \hat{B}) X_1] \quad (30)$$

$$A_2 = [I_1 + X_1^T \{ \Delta \hat{K} R_1 (\hat{M} \Psi - \hat{B} \Psi R_1 \hat{B} \Psi + \hat{B} \Psi R_1 B - M) + \Delta \hat{B} R_1 (\hat{B} \Psi - B) - \Delta \hat{M} \} X_1] \quad (31)$$

Avec :  $\Delta \hat{M} = \Delta M \Psi$ ;  $\Delta \hat{K} = \Delta K \Psi$  et  $\Delta \hat{B} = \Delta B \Psi$

Dans les cas où l'amortissement proportionnel est de type Rayleigh la matrice  $B$  s'écrit comme une somme pondérée des matrices de masse et de raideur (hypothèse de Basile), soit :

$$B = \alpha M + \chi K \quad , \quad \text{les coefficients } \alpha \text{ et } \chi \text{ sont arbitraires.} \quad (32)$$

Avec cet amortissement les matrices  $A_1$  et  $A_2$  ne dépendent plus explicitement de  $K$ ,  $M$  et  $B$ .

### 2.2.2. amortissement visqueux non proportionnel

La base modale de la structure conservatrice associée ne permet plus la diagonalisation de la matrice d'amortissement  $B$ . Il est donc préférable de transformer le problème aux valeurs propre du seconde ordre de dimension  $n$  en une forme classique linéaire de taille  $2n$ . Cette modification est réalisée grâce a la transformation de Duncan en adjoignant a la relation (33) les quantités de mouvements généralisées  $M\dot{q}$  du système, considérées comme variables auxiliaires [11], ou en y ajoutant une équation matricielle triviale, basé sur les vitesses généralisées  $\dot{q}$  [GAMBOLATI 12]. L'adjonction selon la seconde démarche, de l'identité auxiliaire

$$M\dot{q}(t) = M\dot{q}(t) \quad (33)$$

$$(A - s_v U) y_v = 0 \quad (34)$$

Avec :  $A = \begin{bmatrix} -K & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$  et  $U = \begin{bmatrix} B & M \\ M & 0 \end{bmatrix}$  ( $0$  étant la matrice zéro d'ordre  $n$ )

Les matrices modales et spectrales sont regroupées sous les formes suivantes :

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} Y & \bar{Y} \\ YS & \bar{Y}S \end{bmatrix} \quad , \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & \bar{S} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Les matrices  $\tilde{Y}$ ,  $\tilde{S}$ ,  $U$  et  $A$  vérifient les relations d'orthogonalités :

$$\tilde{Y}^T U \tilde{Y} = \tilde{N} \text{ et } \tilde{Y}^T A \tilde{Y} = \tilde{N} \tilde{S} \text{ avec } \tilde{N} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & \bar{N} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$N = \text{diag}\{n_v\}$ ;  $n_v$  est un scalaire réel ou complexe, dans la suite on prendra  $n_v = 1$ .

Décomposant  $Y$  et  $S$  en une partie connue  $Y_1$ ,  $S_1$  et une partie inconnue  $Y_2$ ,  $S_2$  tel que :

$$Y = [Y_1 Y_2]; \quad S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Où :  $Y_1 \in \mathbb{R}^{n,m}; S_1 = \text{Diag} \{ S_\nu = -a_\nu \omega_\nu + j\omega_\nu, \nu = 1, 2, \dots, m \}$  ;

$Y_2 \in \mathbb{R}^{n,n-m}; S_2 = \text{Diag} \{ S_\nu = -a_\nu \omega_\nu + j\omega_\nu, \nu = m + 1, \dots, n \}$ .

Réarrangeons  $\tilde{Y}$  et  $\tilde{S}$  sous la forme suivante:

$$\tilde{Y} = [\tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2]; \quad \tilde{S} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\text{Avec : } \tilde{Y}_1 = \begin{bmatrix} Y_1 & \bar{Y}_1 \\ Y_1 S_1 & \bar{Y}_1 \tilde{S}_1 \end{bmatrix}; \tilde{Y}_2 = \begin{bmatrix} Y_2 & \bar{Y}_2 \\ Y_2 S_2 & \bar{Y}_2 \tilde{S}_2 \end{bmatrix}; \tilde{S}_1 = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & \tilde{s}_1 \end{bmatrix}; \tilde{S}_2 = \begin{bmatrix} S_2 & 0 \\ 0 & \tilde{s}_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Le système modifié est caractérisé par l'équation :

$$[A + \Delta A - \hat{s}_\nu(U + \Delta U)]\hat{y}_\nu = 0 \quad (40)$$

Projetons le vecteur  $\hat{y}_\nu$  dans la base modale de la structure dissipative initiale

$$\hat{y}_\nu = \tilde{Y} c_\nu = \tilde{Y}_1 c_{1\nu} + \tilde{Y}_2 c_{2\nu} \quad (41)$$

Et pré multiplions l'équation (23) par  $\tilde{Y}^T$  cette dernière s'écrit :

$$[L + \hat{s}_\nu M + \hat{s}_\nu^2 N] \hat{c}_{1\nu} = 0 \quad (42)$$

Avec :  $L = [\tilde{S}_1 + \tilde{Y}_1^T \Delta A \tilde{Y}_1]$  ;  $M = [I_{2m} - \tilde{Y}_1^T (\Delta U + \Delta A (R_2 \Delta A - R_1 \Delta U)) \tilde{Y}_1]$

$$N1 = [\tilde{Y}_1^T \Delta A \{ R_1 (\Delta U R_1 \Delta U - \Delta U R_2 \Delta A) - R_3 \Delta A + R_2 (\Delta U - \Delta A R_1 \Delta U + \Delta A R_2 \Delta A) \} \tilde{Y}_1]$$

$N2 = [\tilde{Y}_1^T (R_2 \Delta A - R_1 \Delta U) \tilde{Y}_1]$  ;  $N = N1 + N2$  ;

$R_1 = \tilde{Y}_2 \tilde{S}_2^{-1} \tilde{Y}_2^T$  ;  $R_2 = \tilde{Y}_2 \tilde{S}_2^{-2} \tilde{Y}_2^T$  ;  $R_3 = \tilde{Y}_2 \tilde{S}_2^{-3} \tilde{Y}_2^T$

On constate que dans l'équation (38) les matrices  $A$  et  $U$  n'apparaissent pas explicitement.

### 3. Applications

Deux tests numériques sont présentés pour illustrer la technique proposée. Le critère ci-dessous est utilisé pour évaluer l'écart entre les fréquences propres de deux prototypes du modèle :

$$\delta f_\nu (\text{in}\%) = \frac{|f_\nu^{\text{ex}} - \hat{f}_\nu|}{f_\nu^{\text{ex}}} \times 100$$

où "ex" représente la valeur exacte et "^" représente la valeur approchée.

#### 3.1. Exemple 1 : Barre encadrée-libre "sans amortissement"

Le premier exemple concerne le fit de faisceau qui ont 43 nœuds, chaque nœuds ont 3DDL. Les éléments qui sont modifiés sont indiqués sur la figure 1, leurs modifications est donner dans le tableau 2. Les caractéristiques du faisceau sont :

$$S^i = 0.001 \text{m}^2 ; L^i = 1,5 \text{m} ; E^i = 0,499 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

$$\rho^i = 7800 \text{ kg/m}^3 ; I^i = 0,279 \cdot 10^{-4} \text{m}^4$$

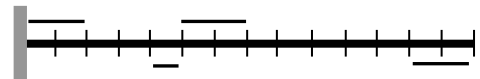


Figure 1 : Poutre encadrée libre

Modes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_{v0}^{ex}$	10.5	42.15	65.84	126.53	184.37	211.08	295.93	361.3	381.19	466.98
$f_v^{ex}$	3.9	22.5	41.83	121.65	122.87	211.45	216.48	299.04	314.5	378.21
$\delta f_v (in\%)$	168.86	87.36	57.4	4.00	50.05	0.17	36.69	20.82	21.20	23.46

Tableau 1: Ecart entre les fréquences propres "exactes" des structures initiale et modifiée

Éléments n°	$E^m$	$I^m$	$\rho^m$	Éléments n°	$E^m$	$I^m$	$\rho^m$
1	$E^i$	$01*I^i$	$\rho^i$	18	$E^i$	$0.05*I^i$	$\rho^i$
2	$E^i$	$0.1*I^i$	$\rho^i$	19	$E^i$	$0.05*I^i$	$\rho^i$
3	$E^i$	$0.1*I^i$	$\rho^i$	20	$E^i$	$0.05*I^i$	$\rho^i$
4	$E^i$	$0.1*I^i$	$\rho^i$	21	$E^i$	$0.05*I^i$	$\rho^i$
5	$E^i$	$0.1*I^i$	$\rho^i$	37	$1.5*E^i$	$I^i$	$\rho^i$
6	$E^i$	$0.1*I^i$	$\rho^i$	38	$1.5*E^i$	$I^i$	$\rho^i$
13	$E^i$	$I^i$	$1.5*\rho^i$	39	$1.5*E^i$	$I^i$	$\rho^i$
14	$E^i$	$I^i$	$1.5*\rho^i$	40	$E^i$	$2.1*I^i$	$\rho^i$
15	$E^i$	$I^i$	$1.5*\rho^i$	41	$E^i$	$2.1*I^i$	$\rho^i$
16	$E^i$	$0.05*I^i$	$\rho^i$	42	$E^i$	$2.1*I^i$	$\rho^i$
17	$E^i$	$0.05*I^i$	$\rho^i$				

Tableau 2: Modifications paramétrique introduite



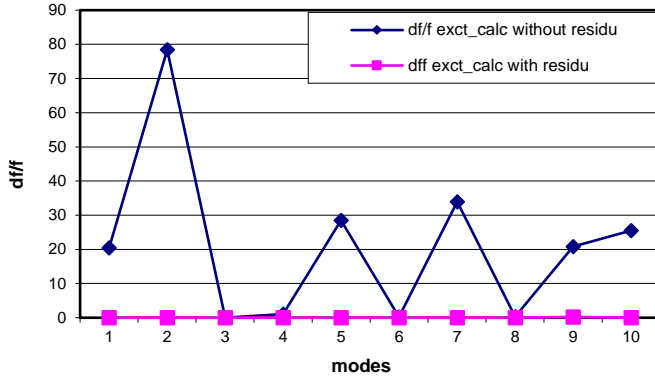


Figure 2 : Ecart entre les fréquences propres exactes et calculée avec résidu et sans résidu

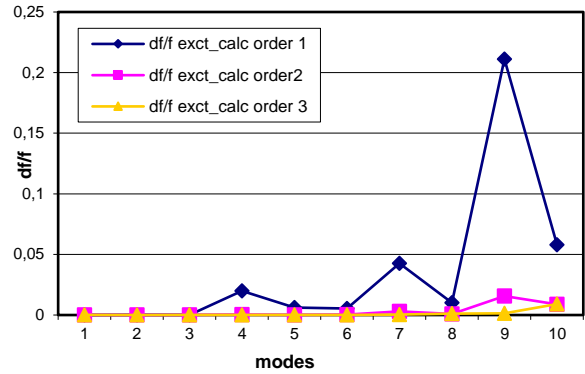


Figure 3: Pourcentage d'erreur sur les fréquences exactes et calculées pour différent ordre de lambda

Nous notons qu'on a une bonne approximation des résultats lorsqu'on augmente l'ordre de lambda. Nous notons également que l'utilisation d'approximation pour l'ordre 1 de lambda est suffisante.

### 3.2. Exemple 2 : Portique "avec amortissement"

La méthode proposée est testée sur un portique bidimensionnelle en 22 éléments finis poutres ayant chacun 3 ddl (fig.1). On introduit les deux types d'amortissement suivants :

Amortissement proportionnel de type Rayleigh sur tous les éléments du portique avec un coefficient d'amortissement  $a_v=2\%$ .

Amortissement non proportionnel : les valeurs initiales sont données dans le tableau 1 et les positions et les directions de placement sont indiquées sur la figure 1.

Dans les tableaux 2, 3 et la figure 2 sont présentés les modifications paramétriques ainsi que les rapports des valeurs initiales et finales des amortisseurs perturbés.

Les caractéristiques physiques initiales de la structure conservatrice sont :

Module de Young :  $E = 2.1 \cdot 10^{11} N/m^2$  ; Section droite :  $S = 0.5 \cdot 10^{-3} m^2$   
 Masse volumique :  $\rho = 7800 kg/m^3$  ; Moment d'inertie :  $I = 0.417 \cdot 10^{-08} m^4$

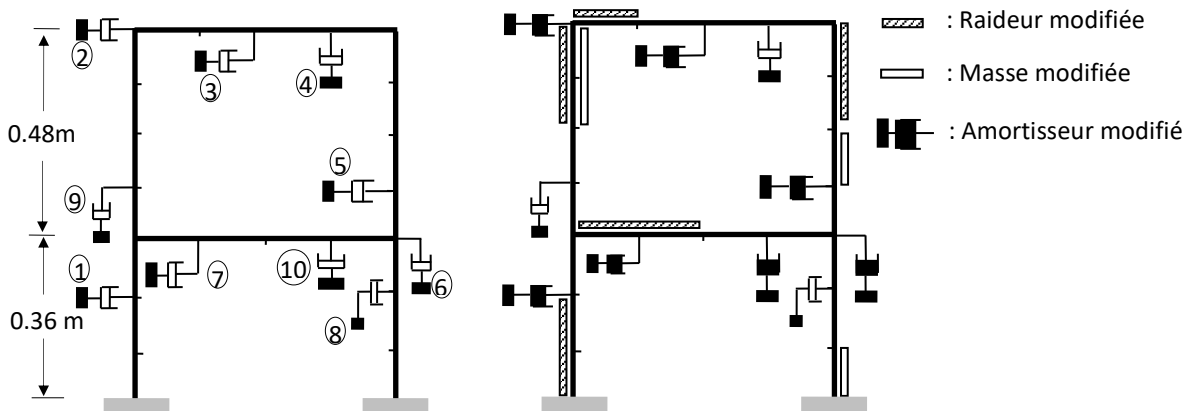


Figure 1 : structure initial

Figure 2 : structure modifiée

Amortisseur n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
valeur kg/s	50	70	100	80	150	150	50	100	80	80

Tableau1 : Caractéristiques du modèle initial

Amortisseur n°	1	3	4	6	7	8	9
$\frac{\text{valeur initiale}}{\text{valeur finale}}$	4	3	2	2	2	2.5	2

Tableau 2 : Perturbations sur les Amortisseurs

Elément n°	1	2	6	7	8	12	13	14	18	19	20
$\frac{\rho \text{ finale}}{\rho \text{ initiale}}$	1.	1.	2.	2.	1.	1.	1.	2.	2.	1.	1.
$\frac{E \text{ finale}}{E \text{ initiale}}$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1.	1.	0.5	0.5

Tableau 3 : Perturbations de la masse volumique et du module d'Young

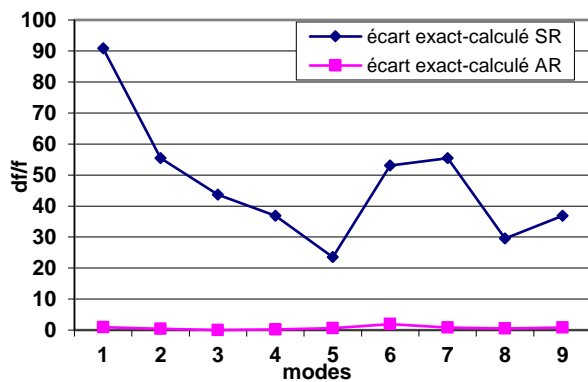


figure 3 :écart entre les fréquences propres exactes-calculées avec et sans résidu

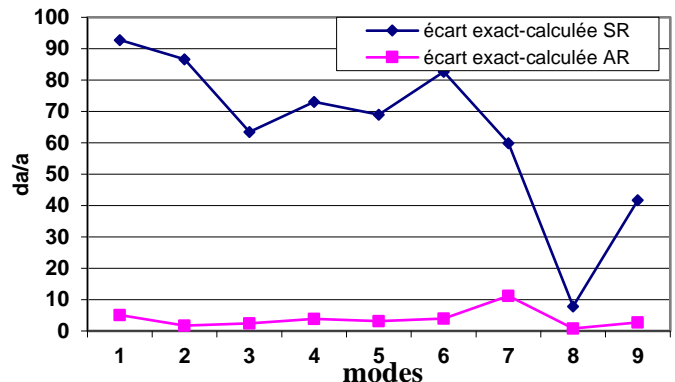


figure 4 :écart entre les amortissements exacts-calculés avec et sans résidu

La figure 3 représente le deux courbes qui traduisent l'écart entre les fréquences de références et les fréquences calculées avec et sans résidus. On constate que l'introduction des termes résiduels  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  a un effet considérable sur la minimisation de l'écart entre les fréquences exactes et calculées. La même constatation peut se faire sur les écarts des amortissements généralisés présentés figure 4.

## Conclusion

Cette étude est basée sur les méthodes utilisant une matrice de projection de type Rayleigh-Ritz car elles sont faciles à mettre en œuvre et sont relativement efficaces en terme de précision et de coût opératoire. L'ajout des termes résiduels à la base modale tronquée permet une amélioration sur les solutions propres calculées ainsi que sur les amortissements généralisés. La connaissance des matrices A et U n'est pas nécessaire si les données sont issues des essais expérimentaux.

Pour la formulation proposée aux structures conservatives, l'introduction des termes résiduels  $R_1$  ou ( $R_1$  et  $R_2$ ) donne des résultats très satisfaisants, par conséquent l'augmentation de l'ordre, en lambda, au-delà de 2 n'a pas d'effet significatif sur la précision obtenue avec l'ordre 2.

## Références

- [1] AITRIMOUCHE H., LALLEMENT G., COGAN S. : « Analyse de structures mécaniques modifiées », Mécanique-Matériaux-Electricité n°445, sep. 1992, 36-39.
- [2] COPPOLINO, R.N., « Structural mode sensitivity to local modification », SAE paper; 1981, n°81-1044.
- [3] G.COUPRY « Prédiction de la variation des modes consécutifs à la modification d'une structure ». La recherche Aérospatiale, Année 1973, n°3, p.173 à 187.
- [4] G. COUPRY « Mesure des amortissements généralisés non diagonaux d'une structure lors d'un essai au sol » La recherche Aérospatiale (1977), n°4 pp239-244.
- [5] SOHANEY R., BONNECASE D., «Residual mobilities and structural dynamic modifications », IMAC7, 1989.
- [6] R. FILLOD, J. PIRANDA, G. LALLEMENT, Identification des structures mécaniques linéaires et non linéaires, Mécanique-Matériaux-Electricité n° 389, 390, 391 (1982) 234-241.
- [7] G. Peters and J. H. Wilkinson,  $Ax = \lambda Bx$  and the Generalized Eigenproblem, SIAM Journal of Numerical Analysis (1970) 479-492.
- [8] G. F. Lang, Demystifying complex modes. J. Sound Vibr. 36-40 (1989).
- [9] A. B. Palazzolo, Vibration of locally modified mechanical and structural systems. Ph.D. thesis, University of Virginia. VA (1981).
- [10] P. Level, SOME CONSIDERATIONS ON MODAL REANALYSIS OF NON-CONSERVATIVE DYNAMICS SYSTEMS BY THE GENERALIZED RECEPTANCE METHOD.
- [11] W.J. DUNCAN.A.R COLLAR , Matrices Applied to the Motions of Damped systems, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of science; series 7, Vol. 19, No. 125, Paper No XV, February 1935 ,pp. 197-219.
- [12] G. GAMBOLATI, M.PUTI, A Comparaison of Laczos and Optimization Methods in The Partial Solution of Sparse Symetric Eigenproplems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, No. 4,28 February 1994, pp. 605-621