

Dynamique d'une Chaîne Granulaire en Flexion – Modèles Discrets et Continus

S. MASSOUMI^a, N. CHALLAMEL^b and J. LERBET^c

a. Laboratoire de Mathématique et Modélisation d'Evry (CNRS), Univ Evry, Université de Paris Saclay - sina.massoumi@etude.univ-evry.fr

b. Institut de Recherche Dupuy de Lôme (CNRS), Université de Bretagne Sud (UBS), France - noel.challamel@univ-ubs.fr

c. Laboratoire de Mathématique et Modélisation d'Evry (CNRS), Univ Evry, Université de Paris Saclay - jean.lerbet@univ-evry.fr

Résumé :

La présente étude examine le problème de vibration libre d'un système granulaire discret de taille finie. Ce système microstructuré est composé de grains uniformes reliés élastiquement par des ressorts de cisaillement et de rotation. Un tel système structural granulaire est confiné par des interactions élastiques discrètes, pour prendre en compte les contributions granulaires latérales. Ce système peut être perçu comme un modèle de chaîne de Cosserat ou un modèle élastique de réseau avec interaction de cisaillement. Les fréquences propres de ce système discret sont calculées exactement pour la poutre granulaire reposant sur deux appuis, à partir de la résolution d'un problème de valeurs propres linéaire aux différences. Une formulation analytique du calcul des fréquences propres de la chaîne granulaire est donnée pour tous les modes discrets. On montre que les équations discrètes de ce système granulaire convergent, pour un nombre infini de grains, vers les équations différentielles du modèle de poutre de Bresse-Timoshenko reposant sur une fondation élastique de Winkler (ou modèle de Cosserat continu).

Abstract :

The present study analyses the free vibration problem of a discrete granular system. This microstructured system consists of a finite number of uniform grains, that are connected elastically by some shearing and rotating springs. The granular system is confined by some discrete lateral elastic interactions to take into account the lateral granular contributions. Such a granular lattice can be considered as a discrete Cosserat chain model or equivalently, an elastic lattice with shear interactions. The natural frequencies of this discrete system are exactly calculated for the simply supported granular beam resting on Winkler foundations. The mathematical problem is equivalent to the resolution of a linear difference eigenvalue problem. An analytical formulation of the natural frequencies of the granular chain is given whatever the considered modes. It is shown that the discrete equations of this granular system for an infinite number of grains converge towards the differential equations of the Bresse-Timoshenko beam model resting on Winkler's elastic foundation (or continuous Cosserat model).

Mots clefs : Milieu granulaire, Cosserat discrète, Analyse de vibration.

1 Introduction

Afin d'adapter une théorie des milieux continus aux matériaux granulaires, il est nécessaire d'introduire des degrés de liberté de rotation indépendants, en plus de ceux en translation conventionnels. En effet, les mouvements relatifs entre la microstructure et les déformations macroscopiques moyennes peuvent être appréhendés par des degrés de liberté supplémentaires. Une telle cinématique enrichie conduit à des milieux continus non classiques (théories de type Cosserat, par exemple Cosserat et Cosserat (1909) ; Nowacki (1974)). Voigt (1887) dès le XIX^{ème} siècle, a été un des pionniers du développement de ces milieux enrichis. Il a montré l'existence de contrainte-couples dans ces matériaux. Les théories continues de milieux de Cosserat appartiennent à la classe plus large des continus généralisés qui introduisent des échelles de longueur intrinsèques via des gradients d'ordre supérieur ou des degrés de liberté supplémentaires (Eringen (1999;2002), Forest (2005)). De manière opposée, la mécanique classique des milieux continus n'incorpore pas d'interaction rotationnelle entre les particules, et ne permet pas d'appréhender les effets de taille dans ces milieux.

Par ailleurs, le modèle de poutre de Bresse-Timoshenko, tient compte de la rigidité finie au cisaillement et de l'inertie rotatoire de la section (Bresse, 1859 ; Timoshenko, 1921 ; Timoshenko, 1922). L'effet du cisaillement et de l'inertie rotatoire peuvent être significatifs dans le cas du calcul de fréquences propres pour des poutres courtes ou pour lesquelles les modules de cisaillement sont suffisamment faibles. Le modèle de poutre de Bresse-Timoshenko est aussi une généralisation du modèle d'Euler-Bernoulli, et admet une cinématique à deux champs indépendants, un champ de déplacement transversal et un champ de rotation. Timoshenko (1921) ou Timoshenko (1922) a calculé les fréquences propres exactes pour une telle poutre à deux degrés de liberté reposant sur deux appuis simples. Le calcul de fréquences propres pour une poutre de Bresse-Timoshenko avec des conditions aux limites quelconques et en interaction élastique avec un milieu rigide est obtenu par Wang and Stephens (1977), Manevich (2015) ou Elishakoff et al (2018) (voir plus récemment Elishakoff, 2019)

Un autre point essentiel est l'équivalence des théories des poutres continues d'un milieu de Cosserat unidimensionnel et d'un milieu classique de Bresse-Timoshenko. En fait, une poutre de Timoshenko est un exemple de continuum unidimensionnel de Cosserat en considérant la double cinématique indépendante rotation-déplacement (voir par exemple Rubin, 2003 et Exadaktylos, 2017)). Il existe donc un lien tenu entre les milieux unidimensionnels granulaires de Cosserat et les milieux de Bresse-Timoshenko. La présente étude se concentre sur la vibration du modèle de poutre granulaire reposant sur une fondation linéaire de Winkler (Winkler, 1867). Notons que les équations aux différences de cette chaîne granulaire coïncident avec les équations aux différences du modèle granulaire de Pasternak et Mühlhaus (2005) en l'absence de fondation élastique, mais différent des équations aux différences du modèle discret avec cisaillement étudié par Duan et al (2013) ou du modèle formulé plus récemment par Bacigalupo et Gambarotta (2019).

L'article est organisé de la manière suivante. Tout d'abord, un modèle granulaire discret est introduit à partir d'une interaction granulaire en rotation et en cisaillement. Puis, à partir de l'analyse dynamique de poutre, les équations de flèche de la poutre continue et discrète sont obtenues. La solution exacte pour l'équation de flèche granulaire conduit à une équation aux différences linéaires du quatrième ordre. Pour le modèle continu obtenu asymptotiquement pour un nombre infini de grains, l'équation de flèche est une équation différentielle linéaire du quatrième ordre. Les fréquences propres sont obtenues pour le modèle granulaire discret et pour le modèle continu et sont comparées ensemble.

2 Modèle granulaire

Une poutre granulaire de longueur L reposant sur deux appuis est modélisée par un nombre fini de grains interagissant ensemble. Un tel modèle représente une chaîne granulaire microstructurée comprenant $n+1$ grains rigides de diamètre a ($a=L/n$) qui sont reliés par n ressorts de cisaillement et de rotation, comme le montre la Figure 1; les ressorts de confinement (interaction extérieure de Winkler)

sont situés au centre des éléments granulaires. Chaque grain a deux degrés de liberté qui sont représentés par w_i et θ_i pour le nombre de grains i . L'objectif est de trouver l'équation de vibration régissant le modèle, puis d'obtenir les fréquences propres du système granulaire.

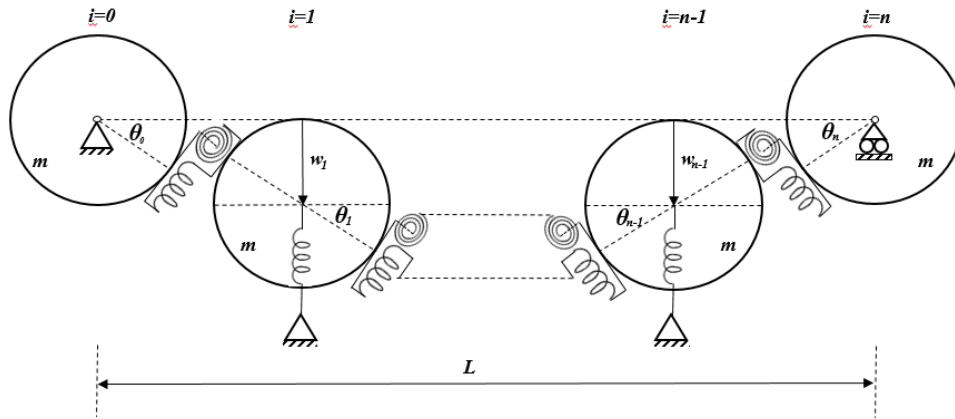


Figure 1- Chaîne granulaire discrète à cisaillement composée de $n + 1$ grains de diamètre a et de masse m

L'équation Lagrangienne du système granulaire est définie comme suit: $L = T - (U_s + U_b + U_{Winkler})$, où T est l'énergie cinétique totale, U_s et U_b sont des fonctions d'énergie de déformation dues à des ressorts de cisaillement et de rotation déformés et $U_{Winkler}$ est l'énergie élastique du support élastique. Le Lagrangien peut s'exprimer comme suit :

$$L = \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m \dot{W}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_m \dot{\theta}_i^2 \right] - \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S \left(W_{i+1} - W_i - a \frac{\theta_{i+1} + \theta_i}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C (\theta_{i+1} - \theta_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n K W^2 \right] \quad (1)$$

où $I_m = \frac{\rho I L}{n} = \rho I a$ est l'inertie rotationnelle; S est la rigidité au cisaillement ($S = \frac{K_s G A}{a} = \frac{n K_s G A}{L}$), G est le module de cisaillement, A est la surface de la section transversale de poutre équivalente, K_s le coefficient de correction de cisaillement; C est la rigidité de rotation ($C = \frac{E I}{a} = \frac{n E I}{L}$), E est le module de Young et I est le moment quadratique; K est la rigidité discrète de l'élastique ($K = k a$). Introduisons les opérateurs aux différences :

$$\delta_0 W = \frac{W_{i+1} + 2W_i + W_{i-1}}{4} \quad , \quad \delta_1 W = \frac{W_{i+1} - W_{i-1}}{2a} \quad , \quad \delta_2 W = \frac{W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1}}{a^2} \quad (2)$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont obtenues à partir du Lagrangien formulé en Eq. (1), et peuvent être présentées de manière compacte sous la forme:

$$\begin{aligned} K_s G A (\delta_2 W) - K_s G A (\delta_1 \theta) - k W_i - \rho A \ddot{W}_i &= 0 \\ E I (\delta_2 \theta) + K_s G A (\delta_1 W) - K_s G A (\delta_0 \theta) - \rho I \ddot{\theta}_i &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

En supposant un mouvement harmonique $W_i = w_i e^{i\omega t}$, Eq. (3) peut être écrit sous forme de matrice:

$$\begin{pmatrix} E I \delta_2 - K_s G A \delta_0 + \rho I \omega^2 & K_s G A \delta_1 \\ K_s G A \delta_1 & k - K_s G A \delta_2 - \rho A \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Ce système d'équations aux différences Eq. (4) a été obtenu par Pasternak et Mühlhaus (2005) en négligeant la contribution de la fondation élastique de Winkler. Pour le poutre continu en considérant $n \rightarrow \infty$, Eq. (4) converge vers le système couplé d'équations différentielles Eq. (5) obtenu par Bresse (1859) en l'absence de fondations de Winkler ($k=0$) et en supposant que le facteur de correction du

cisaillement est unitaire ($K_s=I$). Eq. (5) a également été obtenu par Timoshenko (1921;1922) en l'absence de fondations élastiques ($k=0$). Le système d'équations différentielles du Eq. (5) a été obtenu par Wang and Stephens (1977) et Manevich (2015) pour une poutre de Bresse-Timoshenko sur fondation élastique.

$$\begin{pmatrix} EI\partial_x^2 - K_sGA + \rho I\omega^2 & K_sGA\partial_x \\ K_sGA\partial_x & k - K_sGA\partial_x^2 - \rho A\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Il peut être opportun, dans une démarche de continualisation, d'introduire les opérateurs pseudodifférentiels associés aux opérateurs aux différences Eq. (2):

$$\begin{aligned} \delta_0 &= \frac{e^{a\partial_x} + 2 + e^{-a\partial_x}}{4} = \cosh^2\left(\frac{a\partial_x}{2}\right) \\ \delta_1 &= \frac{e^{a\partial_x} - e^{-a\partial_x}}{2a} = \frac{\sinh(a\partial_x)}{a} \\ \delta_2 &= \frac{e^{a\partial_x} - 2 + e^{-a\partial_x}}{a^2} = \frac{4}{a^2} \sinh^2\left(\frac{a\partial_x}{2}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

En revenant à la chaîne granulaire discrète et en considérant le déterminant de la matrice dans le Eq. (4) égal à zéro, on obtient une équation linéaire aux différences du quatrième ordre, qui pourrait être simplifiée comme suit:

$$\left[EI\delta_2^2 + \left(\rho I\omega^2 - \frac{kEI}{K_sGA} + \frac{EI\rho A\omega^2}{K_sGA} \right) \delta_2 + (k - \rho A\omega^2)\delta_0 - \frac{k\rho I\omega^2}{K_sGA} + \frac{\rho^2 IA\omega^4}{K_sGA} \right] w = 0 \quad (7)$$

Pour le modèle continu de poutre, c'est-à-dire lorsque $n \rightarrow \infty$, l'équation différentielle du quatrième ordre valable pour une poutre de Bresse-Timoshenko sur une fondation élastique de Winkler est donnée par Eq. (8) qui correspond également aux équations obtenues par Wang and Stephens (1977), Cheng and Pantelides (1988) et Manevich (2015).

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\frac{\rho\omega^2}{E} \left(1 + \frac{E}{k_s G} \right) - \frac{k}{k_s GA} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} - \left(\frac{\rho\omega^2}{E} \left(\frac{A}{I} + \frac{k}{k_s GA} - \frac{\rho\omega^2}{k_s G} \right) - \frac{k}{EI} \right) w = 0 \quad (8)$$

3 Résolution de l'équation de Déviation de la Poutre

3.1 Solution Exacte de l'équation de Différence

Dans cette section, la solution exacte du problème de valeur propre aux différences linéaires du quatrième ordre Eq. (7) est calculée. Cette approche est expliquée en détail par Elishakoff and Santoro (2006;2005) qui l'ont utilisé pour analyser l'erreur dans les problèmes dynamiques probabilistes basés sur des différences finies. À partir de Eq. (7) limitée aux termes vibratoires, on pourrait écrire:

$$\begin{aligned} &(w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}) + a^2 \left(\frac{\rho I}{EI} \omega^2 - \frac{k}{K_s GA} + \frac{\rho A\omega^2}{K_s GA} \right) (w_{i+1} - 2w_i + \\ &w_{i-1}) + a^4 \left(\frac{k}{4EI} - \frac{\rho A\omega^2}{4EI} \right) (w_{i+1} + 2w_i + w_{i-1}) + a^4 \left(-\frac{k\rho I\omega^2}{EIK_s GA} + \frac{\rho^2 IA\omega^4}{EIK_s GA} \right) w_i = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Eq. (7) est une équation aux différences linéaire du quatrième ordre, qui nécessite quatre conditions aux limites aux différences. Les conditions aux limites associées pour la chaîne granulaire simplement supportée peuvent être supposées sous la forme suivante (Hunt *et al.* (2010)):

$$\begin{aligned} \text{At } i = 0: & \quad w_0 = 0; \quad \theta_1 = -\theta_{-1} \\ \text{At } i = n: & \quad w_n = 0; \quad \theta_{n+1} = -\theta_{n-1} \end{aligned} \quad (10)$$

En écrivant des termes de quantités non dimensionnelles :

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 \rho A L^4}{EI}, \quad \mu_s = \frac{E}{k_s G}, \quad r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad r^* = \frac{r}{L}, \quad k^* = \frac{kL^4}{EI} \quad (11)$$

Ω est un nombre proportionnel à la fréquence de vibration; μ_s est inversement proportionnelle à la rigidité au cisaillement, c'est-à-dire qu'elle disparaît avec la flexibilité au cisaillement; et r^* est proportionnelle à l'inertie rotatoire. Les modes propres pour la poutre granulaire reposant sur deux appuis peuvent être obtenus à partir de la fonction de forme trigonométrique $w_i = B \sin(i\varphi)$ et conduisant à les fréquences de vibrations naturelles fondamentales, qui sont associées à la condition non triviale (Elishakoff and Santoro (2006)):

$$\text{For } i = n, w_i = 0 \Rightarrow \sin(n\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{p\pi}{n} \quad (12)$$

L'équation de flèche pour chaque grain est obtenue à partir de la forme modale trigonométrique :

$$w_i = B \sin\left(\frac{ip\pi}{n}\right) \quad (13)$$

où B est une constante et p est le numéro de mode qui dépend du module de confinement sans dimension k^* et i est le numéro de grain. Par conséquent, l'équation suivante peut être obtenue pour les fréquences non dimensionnelles.

$$\Omega^4 - B\Omega^2 + C = 0 \quad (14)$$

avec B et C qui sont définis comme :

$$B = \frac{2n^2}{\mu_s r^{*2}} \left(1 + \mu_s - \frac{1}{4r^{*2}n^2}\right) \cos\left(\frac{p\pi}{n}\right) - k^* - \frac{1}{2\mu_s r^{*4}} - \frac{2n^2}{\mu_s r^{*2}} (1 + \mu_s),$$

$$C = \frac{2n^4}{\mu_s r^{*4}} \left(-\frac{r^{*2}k^*\mu_s}{n^2} + \frac{k^*}{4n^4} - 4\right) \cos\left(\frac{p\pi}{n}\right) + \frac{k^*}{2\mu_s r^{*4}} + \frac{2n^2k^*}{r^{*2}} + \frac{4n^4}{\mu_s r^{*4}} + \frac{4n^4}{\mu_s r^{*4}} \left(\cos\left(\frac{p\pi}{n}\right)\right)^2 \quad (15)$$

Eq. (14) a deux racines positives:

$$\Omega = \sqrt{\frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4C}}{2}} \quad (16)$$

En considérant un nombre de mode faible ($p \ll n$) et en envisageant un nombre de grains infini $n \rightarrow \infty$, l'hypothèse d'un développement asymptotique basé sur $\cos\left(\frac{p\pi}{n}\right) \sim 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{p\pi}{n}\right)^2$ peut être appliquée à Eq. (15) et mène à :

$$B = \frac{p^2\pi^2}{\mu_s r^{*2}} (1 + \mu_s) + \frac{1}{\mu_s r^{*2}} \left(\mu_s r^{*2} k^* + \frac{1}{r^{*2}}\right), \quad C = \frac{p^4\pi^4}{\mu_s r^{*4}} + \frac{k^* p^2 \pi^2}{r^{*2}} + \frac{k^*}{\mu_s r^{*4}} \quad (17)$$

Les fréquences propres sont obtenues en substituant Eq. (17) à Eq. (16). Le résultat de fréquences propres dans le cas continu peut être comparé aux résultats obtenus par Wang and Stephens (1977), Cheng and Pantelides (1988) et Manevich (2015). En ignorant le fondation élastique de Winkler ($k^* = 0$), on obtiendrait les mêmes résultats que ceux établis par Timoshenko (1921;1922).

3.2 Solution du Milieu Continu Asymptotique

L'équation différentielle du quatrième ordre, en présence de fondation élastique de Winkler, a été obtenue par Wang and Stephens (1977), et pourrait être réécrite sous la forme sans dimension suivante:

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\bar{x}^4} + \left[r^{*2} \Omega^2 (1 + \mu_s) - r^{*2} k^* \mu_s \right] \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} - \left[r^{*2} \Omega^2 \left(\mu_s r^{*2} k^* + \frac{1}{r^{*2}} - \mu_s r^{*2} \Omega^2 \right) - k^* \right] \bar{w} = 0 \quad (18)$$

Il est possible d'introduire les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{w} = \frac{w}{L}, \quad \frac{d^2 \bar{w}}{d\bar{x}^2} = L \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \frac{d^4 \bar{w}}{d\bar{x}^4} = L^3 \frac{d^4 w}{dx^4} \quad (19)$$

Pour la poutre simplement appuyée, la solution de Eq. (18) peut être proposé comme suit:

$$\bar{w}(\bar{x}) = \sin(p\pi\bar{x}) \quad (20)$$

Les pulsations propres sont donc solutions d'une quartique :

$$\Omega^4 - B\Omega^2 + C = 0 \quad (21)$$

où les paramètres B et C sont définis comme :

$$B = \frac{p^2 \pi^2}{\mu_s r^{*2}} (1 + \mu_s) + \frac{1}{\mu_s r^{*2}} \left(\mu_s r^{*2} k^* + \frac{1}{r^{*2}} \right), \quad C = \frac{p^4 \pi^4}{\mu_s r^{*4}} + \frac{k^* p^2 \pi^2}{r^{*2}} + \frac{k^*}{\mu_s r^{*4}}, \quad (22)$$

On obtient ainsi les fréquences propres issues d'une formule identique à celle utilisée en Eq. (16) et par substitution de Eq. (22), qui pourrait être comparée aussi avec Wang and Stephens (1977), Cheng and Pantelides (1988) et Manevich (2015). En l'absence de fondation élastique de Winkler ($k^*=0$), les fréquences propres sont identiques à celles obtenues par Timoshenko (1921;1922).

L'analyse de sensibilité s'effectue pour le jeu de paramètres adimensionnels suivants :

$$\mu_s = 4.28, \quad r^* = 0.029, \quad k^* = 15 \quad (23)$$

A partir de la *Figure 2*, les résultats des fréquences propres du milieu continu de Bresse-Timoshenko et du milieu de Cosserat discret font apparaître deux branches en fonction du numéro de mode pour quatre valeurs de nombre de grains. On peut en conclure que le taux d'augmentation des fréquences de la deuxième branche est supérieur à celui de la première branche et que la solution exacte pour le modèle discret prévoit toujours des fréquences plus basses que celles associées au milieu continu local. Par contre, pour les fréquences de la deuxième branche, les résultats discrets et continus sont très proches, lorsque le rapport de n/p est plus élevé que 5, tandis que pour la première branche cette valeur est de 3. Sur la *Figure 3*, l'effet du rayon de giration adimensionnel (qui affecte l'inertie rotatoire) ainsi que la sensibilité au nombre de grains ont été étudiés pour les numéros de mode de 1 et 10. Le nombre minimum de grains requis pour lequel les résultats discrets convergent vers ceux du continuum a été déterminé et illustré sur cette figure. En diminuant le rapport de longueur ou en augmentant le numéro de mode, le nombre de grains doit être augmenté pour obtenir des résultats proches de ceux du modèle continu local de Bresse-Timoshenko.

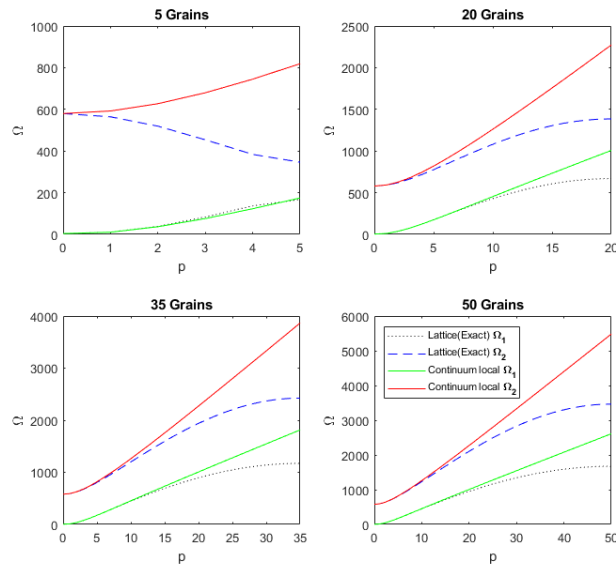


Figure 2- Comparaison de l'évolution des fréquences propres en fonction du mode pour le milieu granulaire discret (milieu de Cosserat discret) et son analogue continu local (poutre de Bresse-Timoshenko)

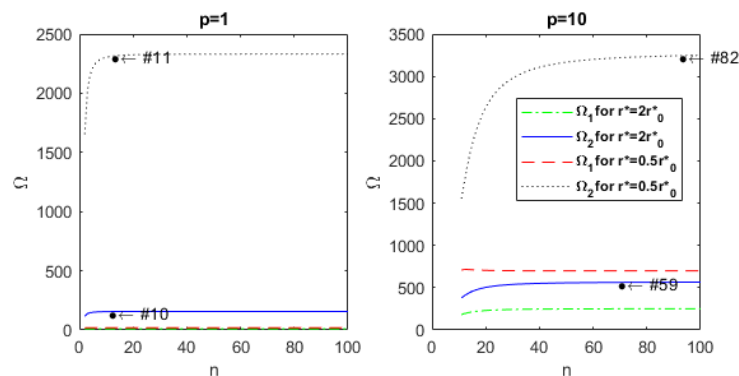


Figure 3- Analyse de l'effet du nombre de grains sur les fréquences propres (solution exacte du modèle discret)

3 Conclusion

Cet article étudie le comportement en vibration libre d'un système granulaire discret reposant sur une fondation de Winkler discrète. Ce système micro structuré est constitué de grains uniformes reliés élastiquement par des ressorts de cisaillement et de rotation. Il a été montré que l'équation de déformée discrète de ce système granulaire (chaîne de Cosserat), est une formulation en différences finies d'un modèle de poutre de Bresse-Timoshenko qui prend en compte les phénomènes de flexion et de cisaillement. Pour un nombre infini de grains, le système aux différences converge vers les équations différentielles d'une poutre de Bresse-Timoshenko reposant sur une fondation de Winkler. Les fréquences propres de la poutre granulaire reposant sur deux appuis simples à ses extrémités ont été étudiées analytiquement, quels que soient les modes considérés, par la résolution d'une équation aux différences linéaire du quatrième ordre.

Les résultats de l'approche exacte du modèle discret de Cosserat sont comparés au modèle continu de Bresse-Timoshenko. Il a été constaté que la rigidité au cisaillement (représentée par les ressorts de cisaillement qui modélise l'interaction granulaire de cisaillement) a un effet significatif sur les fréquences de vibration.

Références

- [1] Bacigalupo A. and Gambarotta L., Generalized micropolar continualization of 1D beam lattices, *Int. J. Mech. Sc.*, 155, 554-570, 2019.
- [2] Bresse J. A. C., Cours de mécanique appliquée – Résistance des matériaux et stabilité des constructions 1859.
- [3] Cheng F. Y. and Pantelides C. P., Dynamic Timoshenko beam-columns on elastic media, *J. Structure Engineering*, 114, 1524-1550, 1988.
- [4] Cosserat E. and Cosserat F., Théorie des corps déformables, *A. Herrmann et Fils*, 226, 1909.
- [5] Dolph C. L., On the Timoshenko theory of transverse beam vibrations, *Quarterly of applied Mathematics*, 12, 175-187, 1954.
- [6] Duan W., Challamel N., Wang C.M. and Ding Z., Development of analytical vibration solutions for microstructured beam model to calibrate length scale coefficient in nonlocal Timoshenko beams, *J. Applied Physics*, 114, 104312, 1-11, 2013.
- [7] Elishakoff I. and Santoro R., Error in the finite difference based probabilistic dynamic analysis: analytical evaluation, *J. Sound and Vibration*, 281, 1195-1206, 2005.
- [8] Elishakoff I. and Santoro R., Accuracy of the finite difference method in stochastic setting, *J. Sound and Vibration*, 2911, 275-284, 2006.
- [9] Elishakoff I., Tonzani G.M. and Marzani A., Three alternative versions of Bresse-Timoshenko theory for beam on pure Pasternak foundation, *Int. J. Mech. Sc.*, 149, 402-412, 2018.
- [10] Elishakoff I., *Handbook on Timoshenko-Ehrenfest and Uflyand-Mindlin plate theories*, World Scientific Publishing Company, 2019.
- [11] Eringen A., Microcontinuum field theories, *Springer*, New York, 1999.
- [12] Eringen A., Nonlocal continuum field theories, *Springer*, New York, 2002.
- [13] Exadaktylos G., Overview of Micro-Elasticity theories with emphasis on strain gradient elasticity: Part I – Theoretical considerations, *CTU*, Prague, 2017.
- [14] Forest S., Generalized continua, *Elsevier*, Oxford, 1-7, 2005.
- [15] Huang T. C., The effect of rotatory inertia and of shear deformation on the frequency and normal mode equations of uniform beams with simple end conditions, *J. Applied Mechanics*, 28, 579-584, 1961.
- [16] Hunt G. W., Tordesillas A., Green S. C. and Shi J., Force-chain buckling in granular media: a structural mechanics perspective, *Phil. Trans. R. Soc. A*, 368, 1910, 249-262, 2010.
- [17] Manevich A. I., Dynamics of Timoshenko beam on linear and nonlinear foundation: phase relations, significance of the second spectrum, stability, *J. Sound and Vibration*, 344, 209-220, 2015.
- [18] Nowacki W., The linear theory of micropolar elasticity, W. Nowacki and W. Olszak (eds.), *Micropolar Elasticity*. Wien, New York, Springer-Verlag, 1-43, 1974.
- [19] Pasternak E. and Mühlhaus H. B., Generalized homogenization procedures for granular materials, *J. Engineering Mathematics*, 51, 1, 199-229, 2005.
- [20] Rubin M. B., On the quest for the best Timoshenko shear coefficient, *J. Applied Mechanics*, 70, 154-158, 2003.
- [21] Timoshenko S. P., On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Philosophical Magazine*, 41, 744-746, 1921.
- [22] Timoshenko S. P., On the transverse vibration of bars with uniform cross-section, *Philosophical Magazine*, 43, 125-131, 1922.

- [23] Traill-Nash R. W. and Collar A. R., The effects of shear flexibility and rotary inertia of the bending vibrations of beams, *J. Mechanics and Applied Math*, 6, 2, 186-222, 1953.
- [24] Wang T. M. and Stephens J. E., Natural frequencies of Timoshenko beams on Pasternak foundation, *J. Sound and Vibration*, 51, 2, 149-155, 1977.
- [25] Winkler E., Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit, *Prague, Dominicus*, 1867.
- [26] Voigt W., Theoretical studies on the elasticity relationships of crystals, *Abh. Gesch. Wissenschaften*, 34, 1887.