

# Effet de la porosité des obstacles sur la propagation à basse fréquence à travers des assemblages polydispersés aléatoires

D. GNADJRO<sup>a, b</sup>, H. FRANKLIN<sup>a</sup>, A. d'ALMEIDA<sup>b</sup>

a. Laboratoire des Ondes et Milieux Complexes, UMR CNRS 6294  
Université du Havre

b. Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université de Lomé

...

## Résumé :

*Les nombres d'ondes, modules et densités de masse effectifs sont recherchés pour des assemblages polydispersés de cylindres et de sphères poroélastiques. Pour y parvenir, les formules du nombre d'onde effectif données de Linton et Martin dans le cas dilué monodisperse (obstacles de taille identique dans une matrice fluide) sont modifiées en tenant compte d'un moyennage sur le rayon des obstacles. Étant donné l'incertitude liée à la prédiction de la distribution en taille des obstacles, trois fonctions de densité de probabilité suffisamment différentes sont étudiées et comparées : uniforme, Schulz et lognormal. On examine l'approximation de Rayleigh (régime de basse fréquence) où les longueurs d'onde peuvent être supposées très grandes par rapport à la taille des obstacles. Des formules simplifiées des concentrations sont fournies en fonction du paramètre caractérisant la dispersion en taille.*

## Abstract :

*Effective wave numbers, moduli, and mass densities are sought for polydisperse assemblies of cylinders and poroelastic spheres. To achieve this, the formulas of the effective wavenumber given by Linton and Martin in the dilute monodisperse case (obstacles of identical size in a fluid matrix) are modified taking into account an averaging on the radius of the obstacles. Given the uncertainty in predicting the size distribution of obstacles, three sufficiently different probability density functions are studied and compared: uniform, Schulz and lognormal. We consider the Rayleigh approximation (low frequency regime) where the wavelengths can be assumed to be very large compared to the size of the obstacles. Simplified formulas of the concentrations are provided according to the parameter characterizing the dispersion in size.*

**Mots clefs : Milieu aléatoire ; nombres d'ondes effectifs ; polydispersivité ; approximation de Rayleigh ; porosité**

## 1 Introduction

Les propriétés de l'onde cohérente se propageant dans un fluide contenant des sphères poroélastiques aléatoirement distribuées sont étudiées. La polydispersivité - variation en taille des obstacles dans un volume représentatif - est prise en compte. Le point de départ est le modèle de nombre d'onde effectif de Linton et Martin (LM) [1] dans le cas monodisperse (tailles identiques). Ce modèle basé sur une hypothèse de fermeture souvent appelée l'approximation quasi-cristalline (QCA) de Lax est une amélioration des modèles de Foldy [2] et de Waterman et Truell [3] initialement construits dans le cas des faibles concentrations. On en déduira les quantités effectives suivantes : nombre d'onde, module et masse volumique d'une suspension polydisperse dans le régime basse fréquence où la longueur d'onde peut être supposée suffisamment grande par rapport à la taille des obstacles (ou grande par rapport au volume représentatif). Le cas monodisperse (tous les obstacles ont le même rayon) peut alors être considéré comme un cas particulier de polydispersivité. Le phénomène de la polydispersivité se rencontre dans les dispersions [4] et les colloïdes [5-6], dans le flux et le transport de particules solides [7] et dans la répartition des bulles d'air dans les fluides [8-10]. La bonne compréhension des effets induits par la répartition en taille des obstacles sur les propriétés acoustiques effectives des dispersions peut présenter un grand intérêt, en particulier pour les ordres de concentration élevés - il convient de noter que les formules les plus utilisées à ce jour sont celles de (i) Foldy qui ne rend compte que des termes de premier ordre en concentration et (ii) Waterman et Truell qui contient un terme de second ordre incorrect. De plus, en tenant compte de la porosité des obstacles, nous étendons les résultats de la littérature sur les sphères élastiques.

## 2 Rappels

Le fluide entourant les obstacles poreux a une masse volumique  $\rho_0$  et une vitesse du son  $c_0$ . Celui saturant l'espace poreux est visqueux, et possède une masse volumique  $\rho_f$  et une vitesse du son  $c_f$ . Par souci de simplicité, on supposera que  $\rho_f = \rho_0$  et  $c_f = c_0$ . On désigne par  $\rho_s$  la masse volumique du matériau constituant les grains solides et par  $\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_0$  la masse volumique du milieu poreux saturé en fluide, de porosité  $\phi$ . Le milieu poreux obéit à la théorie de Biot et se caractérise également par une tortuosité  $\tilde{\alpha}$  appelée facteur de structure [11] (voir en Réf. [12] la liste complète des paramètres constituant le milieu poreux saturé).

Soit  $\omega$  la fréquence angulaire et  $k_0 = \omega/c_0$  le nombre d'onde de l'onde incidente longitudinale en l'absence d'obstacles. Quand l'onde incidente plane harmonique en temps rencontre les obstacles, elle est partiellement réfléchiée. La fraction de l'onde pénétrant dans les obstacles  $y$  est convertie en trois ondes dispersives et atténuées conformément à la théorie des milieux poreux de Biot : 2 ondes longitudinales de nombre d'ondes respectif  $k_1 = \omega/c_1$  (rapide) et  $k_2 = \omega/c_2$  (lent) et 1 onde transversale de nombre d'onde  $k_t = \omega/c_t$ . La diffusion d'une onde plane incidente par un obstacle sphérique de rayon  $a$  est décrite par les coefficients de diffusion  $T_n$  ( $T_{-n} = T_n$ ) où  $n$  est un entier relatif. Les  $T_n$  dépendent des fonctions de Bessel et de Hankel sphériques qui à leur tour dépendent de l'un des nombres d'ondes normalisés  $k_\alpha a$  ( $\alpha = 0, 1, 2, t$ ). La fonction de diffusion en champ lointain  $f(\theta)$  est une série modale dépendant de l'angle d'observation  $\theta$  et des coefficients  $T_n$  de la façon suivante :

$$f(\theta) = \frac{1}{ik_0} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) T_n P_n(\cos\theta). \quad (1)$$

Le polynôme de Legendre  $P_n(\cos\theta)$  d'ordre  $n$  est égal à 1 pour  $\theta = 0$  (diffusion vers avant) ou pour  $\theta = \pi$  (rétrodiffusion). Aux basses fréquences (limite de Rayleigh), on a  $|k_\alpha a| \ll 1$  ( $\alpha = 0, 1, 2, t$ ). Les développements en série de Taylor des premiers coefficients  $T_n$  donnent

$$T_0(a) = \frac{i}{3} (k_0 a)^3 (B_0 - 1) + O((k_0 a)^5) \quad (2)$$

$$T_1(a) = \frac{i}{3} (k_0 a)^3 B_1 + O((k_0 a)^5) \quad (3)$$

$$T_n(a) = O((k_0 a)^5) \quad \text{si } n \geq 2 \quad (4)$$

Les coefficients  $B_0$  et  $B_1$  sont donnés dans l'Appendice, dans le cas de la limite statique (fréquence nulle). Lorsque la fréquence n'est pas nulle, leurs expressions restent compliquées et ne seront pas fournies ici. L'étude présentée ici étant restreinte aux basses fréquences, on garde la dénomination "limites de Rayleigh" pour toute assemblée d'obstacles.

### 3 Nombre d'onde effectif de Linton et Martin

Nous ne considérerons ici que la formule initiale de LM pour des obstacles sphériques qui s'arrête au second ordre en  $n_0$ . Partons d'un milieu fluide contenant  $n_0$  obstacles par unité de volume. La distribution du rayon  $a$  est supposée être continue et va de  $a_1 = 0$  à  $a_2 = +\infty$ . Elle est caractérisée par une fonction de densité de probabilité  $\eta$  telle que  $\int_0^{+\infty} \eta(a) da = 1$ . Le nombre d'onde effectif de LM est donné par [1]

$$\xi_{LM}^2 = k_0^2 + n_0 \delta_1 + n_0^2 \delta_2 + O(n_0^3) \quad (5)$$

où

$$\delta_1 = \frac{4\pi}{ik_0} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1) T_n(a) \eta(a) da \quad (6)$$

et

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{4\pi}{k_0} \right)^4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n,m=0}^{+\infty} K_{nm} T_n(a) T_m(b) \eta(a) \eta(b) da db \quad (7)$$

Les valeurs utiles de  $K_{nm}$  sont précisées plus bas. Lorsque le domaine fréquentiel de l'étude est arbitraire, il convient d'évaluer numériquement les intégrales simples et doubles apparaissant dans les Eqs. (6-7). Aux basses fréquences, les approximations des coefficients  $T_n$  données ci-dessus simplifient les calculs des intégrales. Considérant les Eqs. (2-4) et (5-7) on obtient

$$\xi_{LM}^2 \approx k_0^2 (1 + I_1 + I_2), \quad (8)$$

où

$$I_1 = (B_0 - 1 + 3B_1) n_0 \frac{4\pi}{3} \langle a^3 \rangle, \quad (9)$$

et

$$I_2 = 3 \left[ (B_0 - 1) B_1 + 2B_1^2 \right] \left( n_0 \frac{4\pi}{3} \langle a^3 \rangle \right)^2. \quad (10)$$

Ci-dessus, nous avons introduit la notation  $\langle a^n \rangle = \int_0^{+\infty} a^n \eta(a) da$  qui représente le moment d'ordre  $n$  de la fonction de densité de probabilité (si  $n=1$  il s'agit du rayon moyen  $\langle a \rangle$  des obstacles). Il convient de noter que les égalités  $K_{01} = K_{10} = 3/(16\pi^2)$  et  $K_{11} = 3/(4\pi^2)$  ont été utilisées. Dans ce qui suit,  $C_V = n_0 (4\pi/3) \langle a^3 \rangle$  désignera la concentration moyenne, quantité indépendante des paramètres physiques du support.

### 3 Formules de la concentration

Leroy et al. [9] ont considéré la distribution log-normale, Mascaro et al. [10] la distribution gaussienne. Nous allons déduire les formules de la concentration dans le cas de trois distributions : uniforme, Schulz et lognormale (la distribution gaussienne pouvant être considérée comme un cas particulier de la distribution de Schulz).

#### 3.1 Distribution uniforme

La distribution uniforme consiste à attribuer la même vraisemblance à chaque valeur possible du rayon dans un intervalle donné. On montre que, si  $p = \sigma/\langle a \rangle$  où  $\sigma$  désigne la racine carrée de la variance ou la polydispersivité, la concentration moyenne est donnée par

$$C_{U,V} = n_0 \langle \mathcal{V} \rangle (1 + 3p^2). \quad (11)$$

où  $\langle \mathcal{V} \rangle = 4\pi \langle a \rangle^3 / 3$  (volume moyen).

#### 3.2 Distribution de Schulz

La distribution de Schulz [13-16] est un cas particulier de la distribution Gamma La fonction de densité de probabilité est donnée par

$$\eta(a) = \frac{(j+1)^{j+1}}{\langle a \rangle \Gamma(j+1)} \left( \frac{a}{\langle a \rangle} \right)^j \exp \left[ -(j+1) \frac{a}{\langle a \rangle} \right], \quad (12)$$

où  $\Gamma(\cdot)$  est la fonction gamma d'Euler. Le nombre  $j$  mesure la largeur de la distribution et est lié à la polydispersité par la relation  $p = \sigma/\langle a \rangle = 1/\sqrt{j+1}$ . Le cas  $j=0$  donne  $p=1$  et correspond à la distribution exponentielle (où le nombre de diffuseurs de petit rayon est prépondérant). Quand  $j$  est grand,  $p$  est petit; la dispersion est faible et la distribution est proche de celle d'une gaussienne. Ici, suppose que  $j$  est un entier positif et on utilise la relation  $\Gamma(j+1) = j!$ . La concentration moyenne pour une distribution d'obstacles sphériques est donnée par

$$C_{Sch,V} = n_0 \langle \mathcal{V} \rangle (1 + 3p^2 + 2p^4). \quad (13)$$

### 3.3 Distribution lognormale

Cette fonction de densité de probabilité est donnée par

$$\eta(a) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln a - \theta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (14)$$

où  $\sigma$  est la polydispersité (ou racine carrée de la variance) et où  $\theta = \ln a_{med}$  ( $a_{med}$  est le rayon médian). En prenant  $a_{med} \equiv \langle a \rangle$  et  $p = e^{\sigma^2} - 1$ , on obtient la formule suivante pour la concentration moyenne exprimée elle-aussi en fonction du paramètre  $p$  :

$$C_{ln,V} = n_0 \langle \nu \rangle (p+1)^{9/2}. \quad (15)$$

## 4 Nombres d'onde et modules effectifs

En procédant aux substitutions appropriées dans les Eqs. (8), on arrive aux formules pour le nombre d'onde effectif valables jusqu'au deuxième ordre en concentration de la forme ( $X = U, Sch$ , ou bien  $ln$ )

$$\left(\frac{\xi_{LM,X}}{k_0}\right)^2 \approx [1 + C_{X,V}(B_0 - 1)] [1 + 3C_{X,V}B_1 + 6C_{X,V}^2B_1^2]. \quad (16)$$

En l'absence d'obstacles, le carré du nombre d'onde dans le milieu fluide est donné par  $k_0^2 = \omega^2/c_0^2$ , où  $c_0^2 = K_0/\rho_0$  ( $K_0$  module d'incompressibilité).

On définit, par analogie avec la formule  $k_0^2 = \omega^2\rho_0/K_0$ , le carré du nombre d'onde effectif  $\xi_{LM,X}^2 = \omega^2(\rho_{LM,X}/M_{LM,X})$  du milieu contenant les obstacles, où  $\rho_{LM,X}$  représente la masse volumique effective et  $M_{LM,X}$  le module effectif. Le rapport des carrés des nombres d'onde donne [17].

$$\left(\frac{\xi_{LM,X}}{k_0}\right)^2 = \left(\frac{\rho_{LM,X}}{\rho_0}\right) \left(\frac{K_0}{M_{LM,X}}\right) \quad (17)$$

En comparant avec Eq. (16), on en déduit que

$$\frac{\rho_{LM,X}}{\rho_0} = 1 + 3C_{X,V}B_1 + 6C_{X,V}^2B_1^2, \quad (18)$$

et que

$$\frac{1}{M_{LM,X}} = \frac{1 - C_{X,V}}{K_0} + \frac{C_{X,V}B_0}{K_0}. \quad (19)$$

On constate que  $\rho_{LM,X}/\rho_0$  ( $M_{LM,X}$  respectivement) ne prend en compte que le coefficient  $B_1$  ( $B_0$  respectivement). La figure 4 montre le tracé de l'inverse de la racine carrée de l'Eq. (16) qui représente alors la vitesse de phase effective normalisée dans deux cas de polydispersité  $p = 0.4$  et  $p = 0.7$ . Le matériau choisi est le QF20 dont les valeurs des paramètres physiques peuvent être trouvées dans la Réf. 11.

L'insertion dans les Eqs. (18-19) de  $B_0$  et  $B_1$  donnés dans l'Appendice conduit aux expressions statiques suivantes :

$$\frac{\rho_{LM,X}}{\rho_0} = 1 + 3C_{X,V} \frac{\rho - \rho_0}{2\rho + \rho_0} + \dots = 1 + 3C_{X,V} \frac{(1-\phi)(\rho_s - \rho_0)}{2(1-\phi)\rho_s + (1+2\phi)\rho_0} + \dots \quad (20)$$

$$\frac{1}{M_{LM,X}} = \frac{1 - C_{X,V}}{K_0} + \frac{C_{X,V}}{K_0} \frac{4 - \left(1 - \frac{H}{C}\right) \left[4 - 3 \frac{H}{\mu} \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\right] - 3 \frac{HM - C^2}{C\mu}}{\left(4 - 3 \frac{H}{\mu}\right) \frac{HM - C^2}{CK_0} + 4 \frac{\rho_0 H}{\rho K_0}}. \quad (21)$$

On remarque que la masse volumique effective ne dépend que de la porosité  $\phi$  et des masses volumiques  $\rho_0$  et  $\rho_s$ . Le module effectif prend quant à lui une forme légèrement plus compliquée, dépendant non seulement de  $\phi$ ,  $\rho_0$  et  $\rho_s$  mais aussi des modules  $H$ ,  $M$ ,  $C$  et  $\mu$  caractéristiques du squelette poreux.

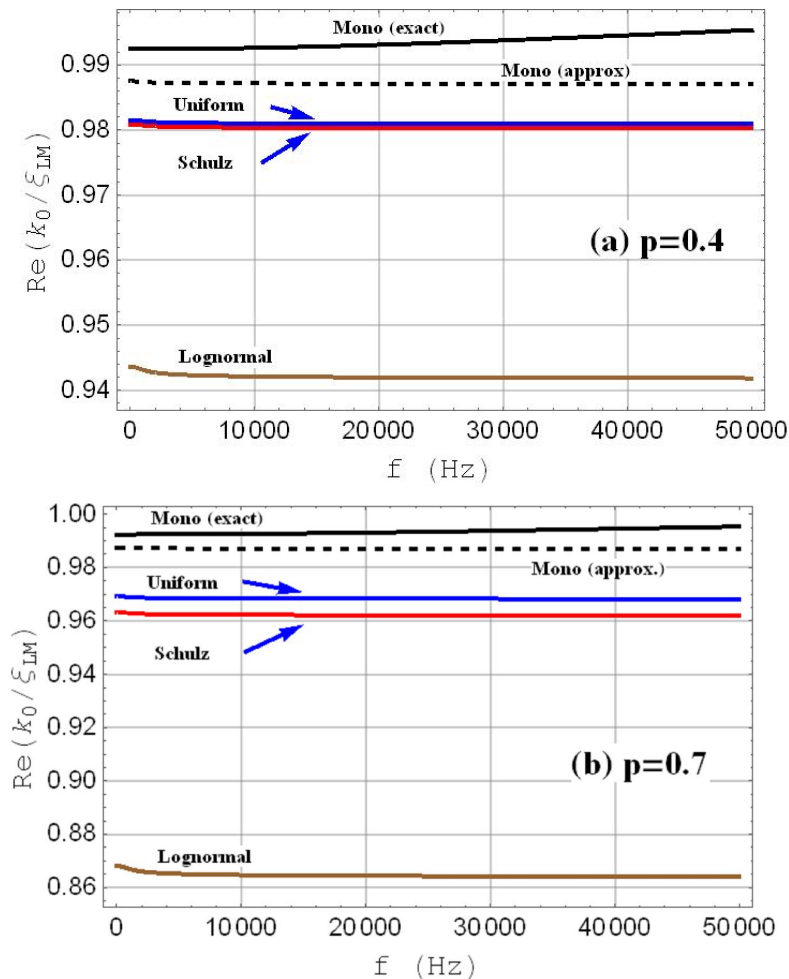


Figure 4 Vitesse de phase en fonction de la fréquence pour des sphères poreuses en QF20 saturées en eau dans l'eau. Le rayon moyen  $a=4 \times 10^{-3} m$ , le nombre de sphères par unité de volume  $n_0=10^5$  (concentration  $c=22.22\%$ ). Pour les distributions uniformes, de Schulz et log-normales:  $p=0.4$  en (a) et  $p=0.7$  en (b).

## 5 Conclusion

Nous avons utilisé la formule du nombre d'onde effectif fournie par Linton et Martin pour le cas monodisperse afin de déterminer les propriétés - densités de masse et modules efficaces - de milieux polydisperses constitués d'obstacles sphériques poreux immergés dans un fluide. Premièrement, trois distributions statistiques ont été examinées pour la taille des obstacles: uniforme, Schulz et Log-normale. Ensuite, des approximations basse fréquence ont été obtenues pour les nombres d'ondes effectifs, les modules et les masses volumiques. À partir de là, nous déduisons des formules pour les modules et les masses volumiques des obstacles poreux dans le cas statique. Toutes les quantités effectives dépendent du paramètre fondamental qu'est la concentration, lequel dépend étroitement de la distribution statistique considérée pour la taille des obstacles. Pour façonner dans une deuxième phase des produits ou des matériaux aux propriétés très spécifiques, il devient ainsi clair que l'on doit agir à la fois sur la porosité des obstacles et sur la distribution statistique en taille.

## Appendice

On donne aux basses fréquences les approximations suivantes des coefficients  $B_0$  and  $B_1$  :

$$B_0 \approx \frac{-3(HM - C^2)/(C\mu) - [3\rho_0 H/(\rho\mu) + (4 - 3H/\mu)](1 - H/C) + 4}{(4 - 3H/\mu)(HM - C^2)/CK_0 + 4\rho_0 H/(\rho K_0)} \quad (\text{B1})$$

et

$$B_1 \approx \frac{\rho - \rho_0}{2\rho + \rho_0}. \quad (\text{B2})$$

Ils ne dépendent alors plus de la fréquence. C'est la limite statique où les seuls paramètres physiques jouant un rôle sont ceux du liquide saturant ( $\rho_0, K_0 = \rho_0 c_0^2$ ) et du milieu poreux ( $H, M, C, \mu$ ). On a [18] :

$$H = \frac{(K_s - K_b)^2}{D_b - K_b} + K_b + \frac{4\mu}{3} \quad (\text{B3})$$

$$C = \frac{K_s(K_s - K_b)}{D_b - K_b} \quad (\text{B4})$$

$$M = \frac{K_s^2}{D_b - K_b} \quad (\text{B5})$$

$$D_b = K_s \left[ 1 + \phi \left( \frac{K_s}{K_0} - 1 \right) \right] \quad (\text{B6})$$

où  $K_s, \mu, K_b$  sont des modules d'élasticité décrivant le milieu poreux.

## Références

- [1] C. M. Linton, P. A. Martin, Multiple Scattering by Multiple Spheres: A New Proof of the Lloyd-Berry Formula for the Effective Wavenumber, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 66 (5) (2006) 1649–1668.
- [2] L. L. Foldy, The multiple scattering of waves. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Phys. Rev.* 67 (1945) 107–119.
- [3] P. C. Waterman, R. Truell, Multiple scattering of waves, *J. Math. Phys.* 2 (4) (1961) 512–537.
- [4] V. J. Pinfield, D. M. Forrester, Multiple scattering in random dispersions of spherical scatterers : Effects of shear-acoustic interactions, *J. Acoust. Soc. Am.* 141 (1) (2017) 649-660.
- [5] W. B. Russell, D. A. Saville, W. R. Schowalter, *Colloidal dispersions*, Cambridge University Press, Cambridge, England (1989)
- [6] R. E. Challis, M. J. W. Povey, M. L. Mather, A. K. Holmes, Ultrasound techniques for characterizing colloidal dispersions, *Rep. Prog. Phys.* 68 (2005) 1541–1637.
- [7] A. E. Scheidegger, *The Physics of Flow Through Porous Media*, University of Toronto Press, Toronto, Canada (1974)
- [8] G. C. Gaunaurd, H. Uberall, Resonance theory of bubbly liquids, *J. Acoust. Soc. Am.* 69 (2) (1981) 362-370
- [9] V. Leroy, A. Strybulevych, J. H. Page, M. G. Scanlon, Sound velocity and attenuation in bubbly gels measured by transmission experiments, *J. Acoust. Soc. Am.* 123 (4) (2008) 1931-1940
- [10] B. Mascaró, T. Brunet, O. Poncelet, C. Aristégui, S. Raffy, O. Mondain-Monval, J. Leng, Impact of polydispersity on multipolar resonant scattering in emulsions, *J. Acoust. Soc. Am.* 133 (4) (2013) 1996–2003
- [11] D. L. Johnson, J. Koplik, R. Dashen, Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media, *J. Fluid Mech.* 176 (1987) 379
- [12] H. Franklin, Rayleigh limits for effective wavenumbers of randomly distributed porous cylinders. Comparison of explicit and implicit methods, *Wave Motion* 66 (2016) 106–117.
- [13] S. Torquato, *Random heterogeneous materials*, Springer (2002) pp. 160-161,
- [14] M. Kotlarchyk, S.-H. Chen, *J. Chem. Phys.* 79 (1983), 2461
- [15] R. K. Pandey, D. N. Tripathi, Schulz distribution function and the polydispersity of the binary suspension of charged macroions, *Colloids and Surfaces A : Physicochemical and Engineering Aspects* 190 (2001) 217-227.
- [16] D. Gazzillo, A. Giacometti, R. Guido Della Valle, E. Venuti, F. Carsughi, A scaling approximation for structure factors in the integral equation theory of polydisperse nonionic colloidal fluids, *arXiv:cond-mat/9907359v3* [cond-mat.stat-mech] 15 Oct 1999.
- [17] C. M. Linton, P. A. Martin, Multiple scattering by random configurations of circular cylinders: Second-order corrections for the effective wavenumber, *J. Acoust. Soc. Am.* 117 (6) (2005) 3413–3423
- [18] R. D. Stoll, T. K. Kan, Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface, *J. Acoust. Soc. Am.* 70 (1981) 149-156.