

Influence des hétérogénéités des matériaux sur les statistiques de propagation de fissures à l'aide d'un Fiber Bundle Model

**F. VILLETTE^a, J. BAROTH^a, F. DUFOUR^a, J-F. BLOCH^a, S. ROLLAND
DU ROSCOAT^a**

a. Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, 3SR, F-38000 Grenoble, France.
Laboratoire 3SR, Domaine universitaire BP53, 38041 GRENoble CEDEX 9 France,
francois.villette@3sr-grenoble.fr

Résumé :

Ce travail propose d'étudier l'influence de tailles caractéristiques des matériaux hétérogènes sur la statistique du processus de fissuration à l'aide d'un Fiber Bundle Model 1D. Le Fiber Bundle Model permet de modéliser le champ de contraintes à proximité d'une fissure. Le seuil de rupture est modélisé par un processus aléatoire spatialement autocorrélé pour représenter une taille d'hétérogénéité du matériau. Ces travaux montrent que la statistique des ruptures de fibres est sensible au rapport entre la taille de la corrélation spatiale et la taille de la forme du champ de contrainte. La distribution statistique des événements de rupture se trouve également modifiée par l'introduction de la corrélation spatiale.

Abstract :

The influence of characteristic sizes of heterogeneous materials on the statistics of the cracking process is studied using the 1D numerical Fiber Bundle Model. The geometry of the Fiber Bundle Models allows the modeling of the stress field in the closeness of a crack. The breaking threshold of fibers is modelled using a random process spatially autocorrelated to represent a size of material heterogeneities. This work shows that fiber breakage statistics are sensitive to the ratio between the size of the spatial correlation and the characteristic size of the stress field shape. The statistical distribution of breaking events is proved to be also modified with the introduction of spatial correlation.

Mots clefs : Propagation de fissure, Matériaux hétérogènes, Processus aléatoire autocorrélé, Fiber Bundle Model

1 Introduction

La compréhension de l'endommagement et de la rupture des matériaux hétérogènes est importante dans de nombreuses applications comme les détachements de blocs rocheux ou la problématique de la résistance du béton. La fissuration est différente selon l'homogénéité du matériau (Figure 1-d et 1-e). Les hétérogénéités des matériaux sont généralement de différentes tailles et la compréhension de leurs effets sur la propagation de la fissure est un enjeu majeur.

En particulier, la fissuration macroscopique dans les matériaux quasi-fragiles, comme le béton, se fait via une succession d'apparitions, d'arrêts et de nucléations de microfissures [1]. Ces microfissurations apparaissent dans une zone d'endommagement (FPZ : Fracture Process Zone) autour de la macrofissure (Figure 1-e).

Deux grandes classes de modélisation des matériaux existent. D'un côté, l'approche mésoscopique représente de manière géométrique les plus gros agrégats [2]. De l'autre, les modèles continus font intervenir une longueur interne pour répartir l'endommagement dans une zone donnée et éviter la dépendance du maillage [3], [4]. Cette longueur interne n'est jusqu'à présent pas reliée aux longueurs caractéristiques du matériau. La difficulté actuelle est de déterminer quelle longueur caractéristique est la plus pertinente à implémenter dans ces modèles. Dans le cas du béton, est-ce la taille moyenne des agrégats ? Ou la distance entre eux ?

Le Fiber Bundle Model a été développé pour obtenir des résultats sur la statistique de l'endommagement des matériaux [5]. Le matériau est représenté comme un ensemble de fibres en traction ayant la même loi purement élastique avec un seuil de rupture de chaque fibre déterminé aléatoirement (Figure 1-a). La traction est contrôlée en force. Lorsque qu'une fibre atteint son seuil de rupture, elle lâche et les contraintes se répartissent sur les fibres intactes. Une seconde fibre peut casser à son tour uniquement via cette répartition des contraintes. Ce phénomène peut se reproduire un certain nombre de fois. Lorsque N fibres lâchent successivement par répartition des contraintes, on dit qu'il se produit une avalanche de taille N. Il se produit ainsi un certain nombre d'avalanches de différentes tailles lors de la rupture des fibres. Ces avalanches peuvent être ensuite classées par tailles afin d'obtenir une distribution d'avalanches (Figure 1-c).

Si le Fiber Bundle Model initial permet d'obtenir des résultats sur un endommagement non localisé, sa géométrie ne prend pas en compte la propagation de fissure. C'est dans cet esprit qu'a été développé le modèle ZIP [6] (Figure 1-f). Dans ce cas, les fibres sont entre un support rigide et une poutre qui se déforme progressivement. La déformée de la poutre est considérée comme exponentielle et tout se passe comme si un coin venait en butée contre la poutre et glissait, forçant la poutre à se déformer. Les fibres susceptibles de rompre sont ainsi contenues dans une « zone active ». Avec cette géométrie, la distribution d'avalanches fait apparaître deux régimes d'évènements de rupture aux petites et grandes échelles. La taille d'avalanches pour laquelle le changement de régime s'opère est considérée comme un indicateur de taille de la zone d'endommagement.

Tous ces modèles présentés jusqu'ici représentent les défauts du matériau par un seuil aléatoire de rupture des fibres. Ces défauts introduits sont donc de type « bruit blanc » et ne font pas apparaître la microstructure du matériau. On se propose ici d'étudier les effets de l'introduction d'une corrélation spatiale sur les seuils de rupture des fibres du modèle ZIP.

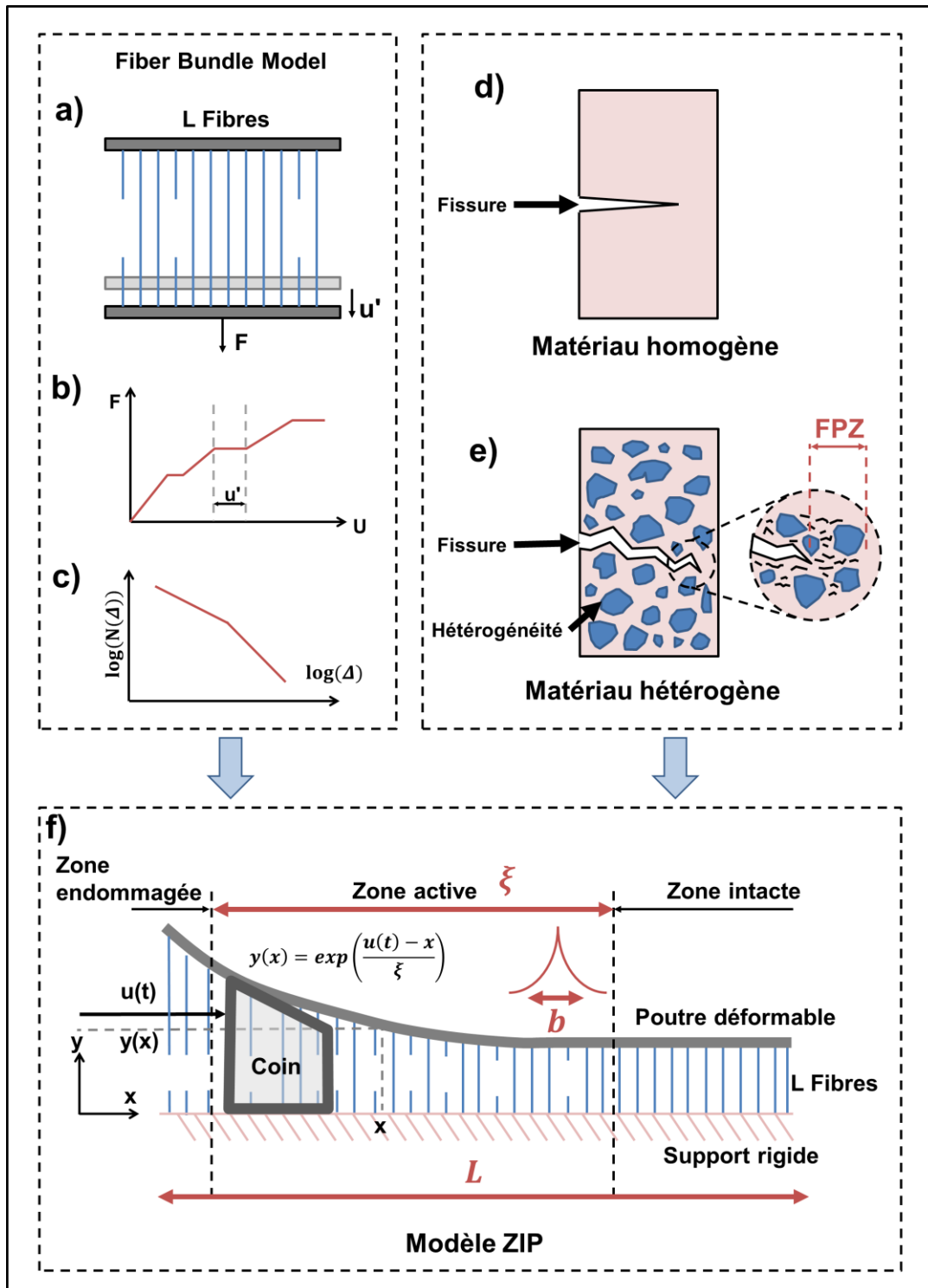


Figure 1 : (a) Schéma représentatif du Fiber Bundle Model. Une traction pilotée en force est exercée sur L fibres. Pour une force imposée F , des fibres cèdent et provoquent un allongement u' des fibres restantes. (b) Courbe de réponse force/déplacement de l'essai de traction. (c) Distribution d'avalanches. $N(\Delta)$ est le nombre d'avalanches de taille Δ . (d) Fissuration d'un matériau homogène. (e) Fissuration d'un matériau hétérogène. La microfissuration se manifeste dans la zone d'endommagement (FPZ : Fracture Process Zone). (f) Schéma représentatif du Modèle ZIP. La déformée de la poutre impose un champ de contraintes de taille caractéristique ξ sur les L fibres de la simulation. Dans ce travail, une corrélation spatiale de taille b est ajoutée aux seuils de rupture des fibres.

2 Modélisation des hétérogénéités du matériau dans le processus de fissuration à l'aide du Modèle ZIP

Pour introduire une corrélation spatiale sur le seuil de rupture des fibres, nous avons modélisé le seuil de rupture des fibres par un processus aléatoire autocorrélé Gaussien. Ses réalisations ont été engendrées en utilisant une méthode de décomposition spectrale (décomposition de Karhunen-Loève [7]).

Soit $G = \{G(x), x \in \Omega\}$ un processus Gaussien indexé sur le support $\Omega = \mathbb{R}$ d'espérance μ_G , d'écart type σ_G et de fonction de covariance C_G . Ce processus peut s'écrire :

$$G(x) = \mu_G + \sigma_G \tilde{G}(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (1)$$

Avec $\tilde{G} = \{\tilde{G}(x), x \in \Omega\}$ un processus gaussien standard d'espérance nulle, d'écart-type 1 et de fonction de covariance $C_{\tilde{G}} = \frac{C_G}{\sigma_G^2}$, égal à sa fonction d'autocorrélation $R_{\tilde{G}}$

La décomposition de Karhunen-Loève repose sur la décomposition spectrale de la fonction de covariance du processus \tilde{G} .

$$\int_{\Omega} C_{\tilde{G}}(x, x') \cdot f_i(x') d\Omega_{x'} = \lambda_i \cdot f_i(x) \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

Avec la suite de fonctions propres $(f_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ associées à la suite de valeurs propres décroissantes $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de la fonction de covariance $C_{\tilde{G}}$.

La décomposition de Karhunen-Loève permet de décomposer le processus G de la manière suivante :

$$\hat{G}(x) = \mu_G + \sigma_G \sum_{i=1}^M \sqrt{\lambda_i} f_i(x) \tilde{X}_i \quad \forall x \in \Omega \quad (3)$$

Avec \hat{G} la décomposition de Karhunen-Loève de G et $(\tilde{X}_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de copies indépendantes de variables aléatoires gaussiennes standards. La somme mathématiquement infinie est tronquée à un nombre de termes M suffisamment grand pour que les calculs d'avalanches soient indépendants du nombre de termes de la décomposition.

La fonction d'autocorrélation spatiale choisie est un modèle exponentiel:

$$R_{\tilde{G}}(z) = \exp\left(-\frac{|z|}{b}\right), \quad |z| \in [0, L] \quad (4)$$

avec b la longueur d'autocorrélation représentant la taille caractéristique de la microstructure. L'avantage de ce modèle de corrélation est que les fonctions et valeurs propres de la fonction de covariance ont une solution analytique [8].

3 Résultats

3.1 Influence de la taille de la corrélation spatiale et du champ de contrainte

Des simulations ont été réalisées en faisant varier de manière indépendante la taille caractéristique ξ de la déformée de la poutre et la taille caractéristique b de la corrélation spatiale. Les résultats sont présentés sous la forme de distributions cumulées. Pour chaque cas, la distribution cumulée dans le cas où il n'y a pas de corrélation spatiale [6] est présentée en comparaison.

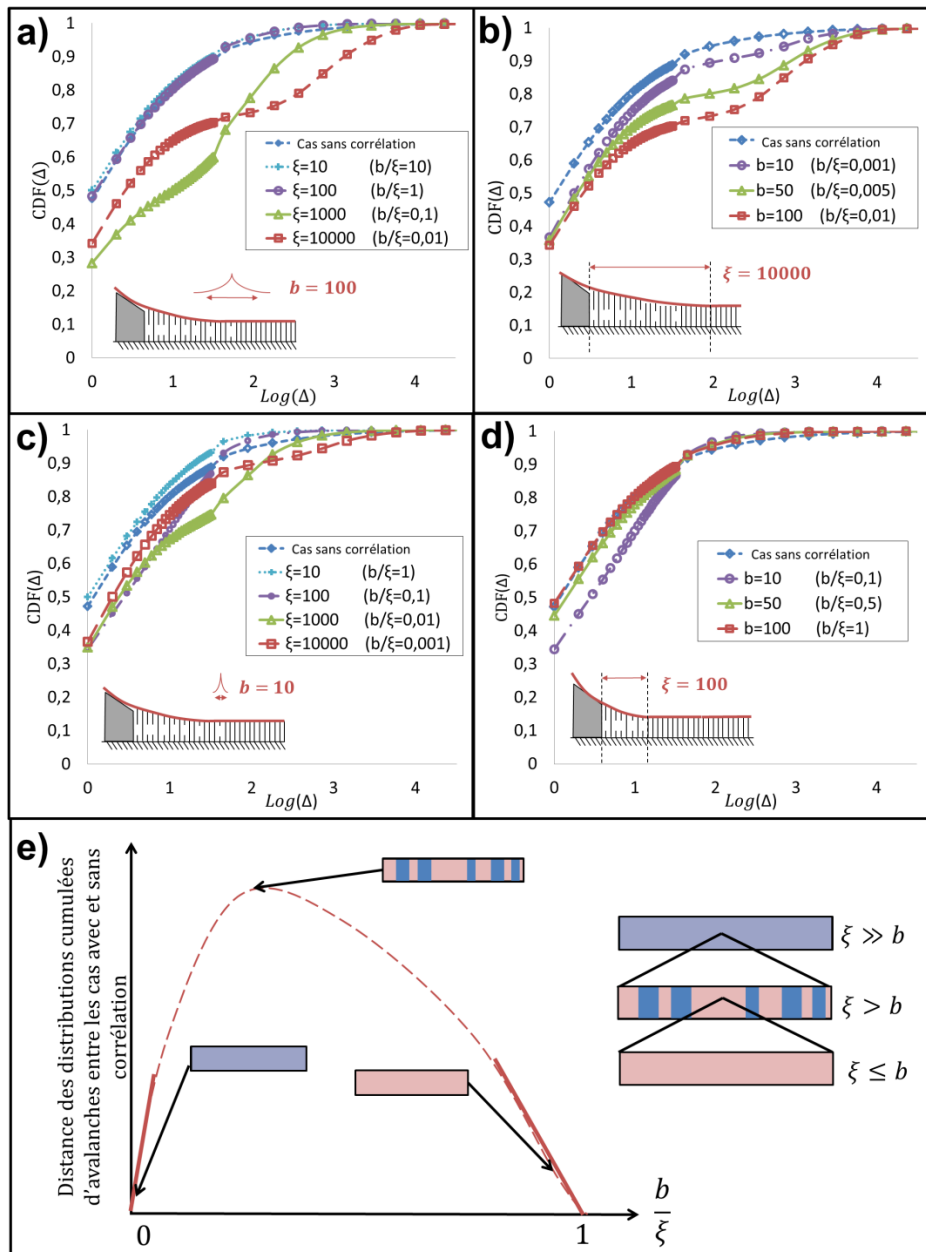


Figure 2 : Fonction de répartition d'avalanches (CDF : Cumulative Distribution Function). Avec $L = 5.10^5$ fibres et $M = 10^6$ termes dans la décomposition de Karhunen-Loève. (a) Pour $b = 10^2$. (b) Pour $\xi = 10^4$. (c) Pour $b = 10$. (d) Pour $\xi = 10^3$. (e) Représentation schématique de l'importance des effets de la corrélation spatiale par rapport à b/ξ . L'apparence du matériau simulé est représentée dans les rectangles.

- Figure 2-a ($b = 100$ et ξ varie) : La CDF est différente du cas sans corrélation uniquement quand $\frac{b}{\xi} < 1$.
- Figure 2-b ($\xi = 10000$ et b varie) : La distribution cumulée se distingue d'autant plus du cas sans corrélation que b est grand.
- Figure 2-c ($b = 10$ et ξ varie) : La distribution cumulée est différente du cas sans corrélation uniquement quand $\frac{b}{\xi} < 1$. Les effets sont moins marqués que dans la Figure 2-a, car b est plus petit.

- Figure 2-d ($\xi = 10000$ et b varie) : La distribution cumulée est différente du cas sans corrélation uniquement quand $\frac{b}{\xi} < 1$.

D'après la représentation en distribution cumulée, on remarque que les effets de la corrélation spatiale dépendent du rapport b/ξ . Les remarques précédentes sont synthétisées sur la Figure 2-e. Pour des soucis de représentation, nous considérons que le matériau est constitué d'une succession d'occurrences de taille moyenne b de deux phases statistiquement distribuées sur le domaine de la zone active de taille caractéristique ξ :

- Quand $b \ll \xi$, chaque phase est représentée avec un grand nombre d'occurrences. Le champ de contrainte est ainsi perçu par chaque occurrence comme quasiment constant, comme dans le cas du Fiber Bundle Model classique où la position relative des fibres n'a pas d'influence. Ainsi, il n'y a pas d'effets de la corrélation spatiale.
- Au fur et à mesure que b augmente, les effets de la corrélation augmentent.
- Quand $b \geq \xi$, les avalanches de fibres se passent dans une zone fortement corrélée où les fibres ont plus ou moins le même seuil de rupture.

3.2 Régime de transition

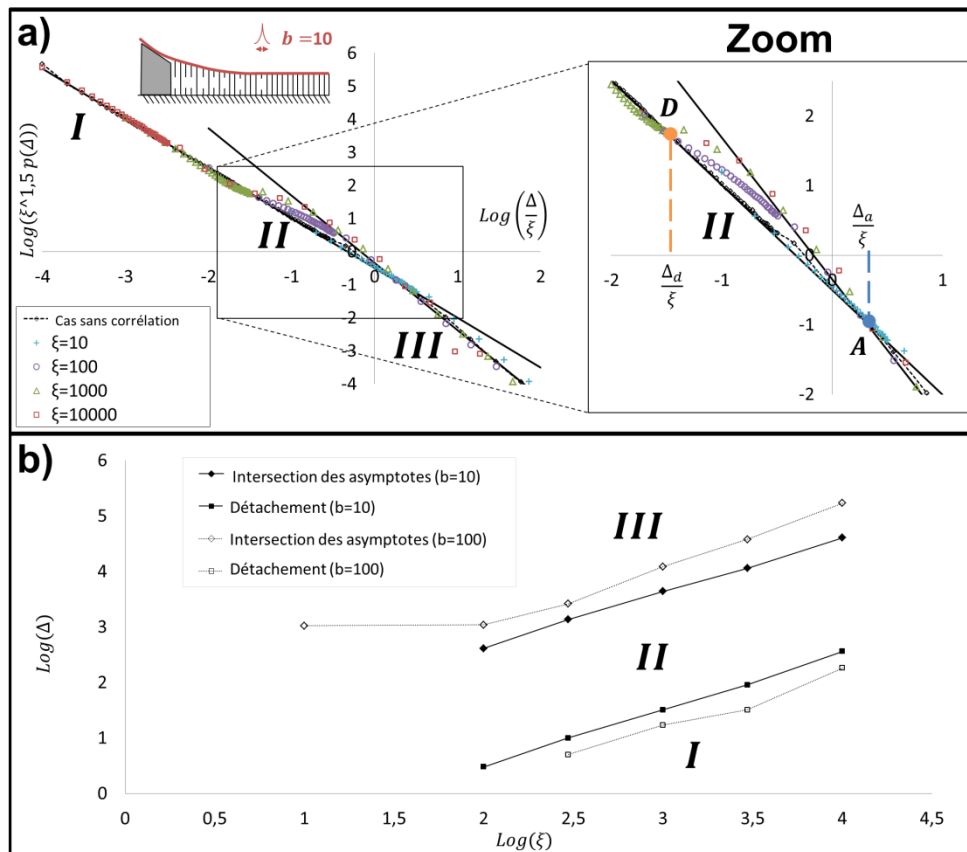


Figure 3: (a) Distributions d'avalanches pour une taille de corrélation spatiale $b = 10$ et à différentes tailles caractéristiques du champ de contraintes ξ . Les asymptotes noires correspondent aux pentes de la distribution d'avalanches dans le cas sans corrélation [6]. Δ_d et Δ_a sont respectivement la taille de décollement des courbes et la taille d'intersection des asymptotes (b) Evolution des points caractéristiques Δ_d et Δ_a en fonction de ξ et b .

Les résultats ont été également tracés (Figure 3-a) sur une distribution non cumulée mais en dimensionnant les axes par rapport à ξ de la même manière que dans les travaux antérieurs de Delaplace et al. [6].

Les courbes suivent les asymptotes aux petites et aux grandes échelles. Cependant, si dans le cas sans corrélation les courbes collent les asymptotes pour des échelles intermédiaires, on observe dans ce cas un décollement des courbes pour ces échelles. Ainsi, lorsqu'il y a corrélation, il n'y a plus uniquement deux régimes d'avalanches aux petites (**I**) et aux grandes échelles (**III**) mais un régime de transition apparaît pour des échelles moyennes (**II**). Ce régime peut être caractérisé par les points de décollement et de recollement des courbes aux asymptotes. En première approximation, le point de recollement sera confondu avec le point d'intersection des asymptotes. En traçant l'évolution de ces points avec ξ et b (Figure 3-b), on observe une translation linéaire du régime de transition vers les grandes échelles avec l'augmentation de ξ . De plus, Le régime de transition s'étend vers les petites et grandes échelles avec l'augmentation de b .

4 Conclusion

L'introduction de la corrélation spatiale dans le modèle ZIP permet de mettre en évidence des effets des hétérogénéités dans la propagation de fissure :

- La distribution d'avalanches de ruptures de fibres est influencée par la corrélation spatiale et par le rapport de tailles caractéristiques corrélation spatiale/champ de contrainte.
- Sous réserve que la taille caractéristique de la forme du champ de contrainte ne soit pas infinie, un régime de transition apparaît dans la distribution d'avalanches lorsque la corrélation spatiale est plus petite que les variations du champ de contraintes.

Ces travaux permettent de définir les échelles qui sont modifiées par l'introduction d'une corrélation spatiale dans les modèles numériques.

Références

- [1] Z. P. Bažant, "Nonlocal damage theory based on micromechanics of crack interactions," *J. Eng. Mech.*, vol. 120, no. 3, pp. 593–617, 1994.
- [2] C. La Borderie, C. Lawrence, and A. Menou, "Approche mésoscopique du comportement du béton," *Rev. Eur. Génie Civ.*, vol. 11, no. 4, pp. 407–421, 2007.
- [3] J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot, and C. Saouridis, "Size effect and continuous damage in cementitious materials," *Int. J. Fract.*, vol. 51, no. 2, pp. 159–173, 1991.
- [4] C. Giry, F. Dufour, and J. Mazars, "Stress-based nonlocal damage model," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 48, no. 25–26, pp. 3431–3443, 2011.
- [5] H. E. Daniels, "The statistical theory of the strength of bundles of threads.," *Proc., R. Soc.*, vol. A183, pp. 405–435, 1945.
- [6] A. Delaplace, S. Roux, and G. Pijaudier-Cabot, "Avalanche Statistics of Interface Crack Propagation in Fiber Bundle Model: Characterization of Cohesive Crack," *J. Eng. Mech.*, vol. 9399, no. July, pp. 646–652, 2001.
- [7] M. Loève, *Probability Theory*, vol. 45. Springer-Verlag, 1977.
- [8] R. G. Ghanem and P. D. Spanos, "Spectral techniques for stochastic finite elements," *Arch. Comput. Methods Eng.*, vol. 4, no. 1, pp. 63–100, 1997.