

La saturation de l'instabilité elliptique dans les noyaux planétaires : turbulence d'ondes et instabilités secondaires des vortex géostrophiques

T. Le Reun ^a, B. Favier^b, M. Le Bars ^c

a. Aix-Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE UMR 7342, Marseille, France.

lereun@irphe.univ-mrs.fr

b. Aix-Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE UMR 7342, Marseille, France.

favier@irphe.univ-mrs.fr

c. Aix-Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE UMR 7342, Marseille, France.

lebars@irphe.univ-mrs.fr

Résumé : (16 gras)

Nous présentons dans cet article une étude expérimentale de la saturation turbulente de l'instabilité elliptique, une résonance paramétrique d'ondes inertielles dans les fluides en rotation. Notre dispositif consiste en un ellipsoïde dont la plus grande dimension atteint 50 cm subissant un mouvement de rotation dont la vitesse varie périodiquement et faiblement autour d'une moyenne. Ceci provoque la croissance exponentielle d'ondes à la moitié de la fréquence d'excitation, celles-ci s'effondrant finalement en turbulence. Nous montrons que suivant l'amplitude du forçage, i.e. suivant la variation relative du taux de rotation, deux régimes émergent dans la saturation de l'instabilité. À bas forçage, nous observons une turbulence d'ondes inertielles, i.e. une superposition d'ondes en interaction non-linéaire résonante entre elles. Lorsque l'amplitude du forçage est augmentée, une transition secondaire se produit et donne lieu à l'émergence d'un écoulement moyen géostrophique fort. Notre expérience nous permet par ailleurs de déterminer la frontière entre ces deux régimes de saturation.

Abstract :

In this communication, we present an experimental study of the turbulent saturation of the elliptical instability, an inertial wave parametric resonance in rotating fluids. Our experiment comprises an ellipsoid whose largest dimension reaches 50 cm and which undergoes small, periodic variations of its rotation rate. This triggers the exponential growth of inertial waves whose frequency is half the frequency of the rotation rate modulation, and which eventually break-down into turbulence. We show that depending on the forcing amplitude, i.e. depending on the amplitude of the rotation rate modulation, two regimes emerge out of the saturation. At low forcing amplitude, we reveal an inertial wave turbulence, i.e. a superposition of waves in non-linear resonant interactions. Increasing the forcing amplitude leads to a secondary transition and to the emergence of a strong geostrophic mean flow. Our experimental set-up allows to determine the boundary between the two saturation regimes.

Mots clefs : instabilités, résonance paramétrique, ondes inertielles, turbulence

Introduction

L'interaction gravitationnelle exercée par un objet astrophysique sur une planète produit une déformation de marée et, entre autres, conduit à des oscillations de son taux de rotation appelées "librations" [12]. La combinaison de ces deux effets provoque l'excitation d'ondes inertielles dans le noyau de la planète [4, 3, 5], ondes qui existent du fait de la force de Coriolis [10]. Ces ondes, dont la fréquence est la moitié de celle des librations, croissent exponentiellement via un mécanisme de résonance paramétrique subharmonique, appelé « instabilité elliptique », pour finalement saturer non-linéairement en donnant naissance à un écoulement turbulent. Cette saturation est particulièrement importante puisqu'elle peut conduire à un effet dynamo et à la création d'un champ magnétique protégeant la planète et participant ainsi à la rendre habitable. L'instabilité elliptique est donc une alternative intéressante aux dynamos convectives qui n'expliquent pas les champs magnétiques des petits astres comme Ganymède (voir par exemple la discussion en introduction à [12]).

Si les conditions de résonance des ondes inertielles sous l'excitation de marées sont bien caractérisées, la saturation turbulente reste cependant mal connue. Les expériences et simulations réalisées jusqu'ici [9, 8, 6] n'ont pu accéder qu'à des régimes d'amplitude de forçage et de dissipation modérés, tandis que la limite pertinente pour la géophysique relève des faibles forçage et dissipation. Des simulations numériques idéalisées de l'instabilité elliptique en utilisant un modèle local cartésien [1, 13] ont permis de s'approcher de tels régimes, et ont révélé deux types possibles de saturation turbulente. Selon ces simulations, les ondes résonantes peuvent transférer leur énergie à des tourbillons géostrophiques (*i.e.* invariants suivant l'axe de rotation) dont l'évolution est lente devant la période de rotation, un régime qui est classiquement observé dans les études de turbulences réalisées avec un forçage stochastique au lieu d'une instabilité (voir l'article de synthèse [7]). Dans un autre régime de saturation, les ondes instables transfèrent leur énergie à une cascade d'ondes filles par interactions résonantes [10, 17, 2], un régime appelé « turbulence d'ondes inertielles ». Le passage d'un régime à l'autre a été observé en appliquant une friction visqueuse artificielle spécifique aux tourbillons géostrophiques. L'objectif du travail présenté dans cette communication est de vérifier l'existence de ces deux types de saturations turbulentes dans une expérience semblable à [9] mais dans des régimes de faible forçage et faible dissipation.

Cette communication est organisée comme suit. Une première partie présente les écoulements excités par la libration des planètes et satellites, et rappelle notamment quelques propriétés des ondes inertielles et écoulements géostrophiques. Nous présentons ensuite le dispositif expérimental et ses principaux résultats. Nous retrouvons les deux régimes trouvés dans [13] qui apparaissent suivant l'amplitude de la modulation du taux de rotation par la libration.

Les écoulements forcés par la libration

L'écoulement de base

Comme indiqué dans l'introduction, la libration est une modulation périodique du taux de rotation d'un corps astrophysique. Nous considérons dans nos expériences la forme la plus simple que l'on puisse alors considérer pour l'écoulement de base :

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_0 (1 + \varepsilon \sin(f\Omega_0 t)) \mathbf{e}_z \quad (1)$$

où \mathbf{e}_z est un vecteur unitaire et Ω_0 est le taux de rotation moyen. ε et f sont des paramètres sans dimension contrôlant respectivement l'amplitude et la fréquence de la modulation. On considère dans ce qui suit une planète déformée par un champ de marée, si bien qu'elle a la forme d'un ellipsoïde dont les axes principaux sont de longueurs a , b et c différentes. Dans le référentiel en libration, qui est par exemple le référentiel du manteau solide d'une planète, la libration crée un écoulement \mathbf{U}_b^ℓ prenant la forme suivante [11, 9] :

$$\mathbf{U}_b^\ell = [U, V, 0] = \frac{2ab}{a^2 + b^2} \Omega_0 \varepsilon \sin(f\Omega_0 t) \left[-\frac{a}{b} Y, \frac{b}{a} X, 0 \right] \quad (2)$$

où l'on a considéré un système d'axes (X, Y, Z) dirigés suivant les directions principales de l'ellipsoïde, Z étant aligné avec l'axe de rotation. Le référentiel tournant à la rotation moyenne est cependant plus intéressant pour notre étude, puisque c'est dans ce référentiel que sont définies les ondes inertielles ainsi que les écoulements géostrophiques. L'écoulement de libration mesuré dans le référentiel en rotation \mathbf{U}_b^Ω peut être déduit de \mathbf{U}_b^ℓ par un simple changement de référentiel (incluant en particulier une composition de vitesse). On trouve à l'ordre le plus bas en ε [9] :

$$\mathbf{U}_b^\Omega = -\Omega_0 \varepsilon \beta \sin(f\Omega_0 t) [y, x, 0] . \quad (3)$$

où β est l'ellipticité de la déformation horizontale $\beta = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$ (on a choisi $a > b$ sans perte de généralité), et (x, y, z) est un système de coordonnées lié au référentiel tournant à Ω_0 . Cette dernière forme nous conduit notamment à introduire un nombre sans dimension décrivant l'amplitude de cet écoulement de forçage par rapport à la rotation solide, c'est à dire un nombre de Rossby de forçage Ro_i :

$$Ro_i = \beta \varepsilon \sim \frac{|\mathbf{U}_b^\ell|}{\Omega_0 a} . \quad (4)$$

Instabilité elliptique forcée par la libration

Des études expérimentales [15, 9], numériques [4, 6] et théoriques [5] ont permis de montrer que l'écoulement de base créé par la libration est instable. L'écoulement \mathbf{U}_b^Ω qui est homogène en espace et harmonique en temps excite en effets des modes inertiels dont l'amplitude croît exponentiellement via un mécanisme de résonance paramétrique sub-harmonique. Les oscillations inertielles sont dues à la force de Coriolis et peuvent être retrouvées à partir de l'équation d'Euler linéarisée alliée à la condition d'incompressibilité régissant la dynamique des champs de vitesse \mathbf{u} et pression p :

$$\partial_t \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{u} = -\nabla p \quad \text{and} \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (5)$$

On déduit de ces deux équations la suivante due à Poincaré [16] :

$$\partial_{tt} \nabla^2 \mathbf{u} - 4\Omega_0^2 \partial_{zz} \mathbf{u} = 0 \quad (6)$$

qui admet des solutions en modes propres de la forme $e^{i\omega t} \Phi_\omega(\mathbf{r})$ — \mathbf{r} étant la position—, appelées modes inertiels, dont la fréquence est comprise entre $-2\Omega_0$ et $2\Omega_0$ [10].

Le mécanisme de résonance sur lequel se base l'instabilité elliptique correspond à l'interaction simultanée de deux modes inertiels Φ_j et Φ_k avec l'écoulement de base \mathbf{U}_b^Ω . Les fréquences propres $\omega_{j,k}$ des

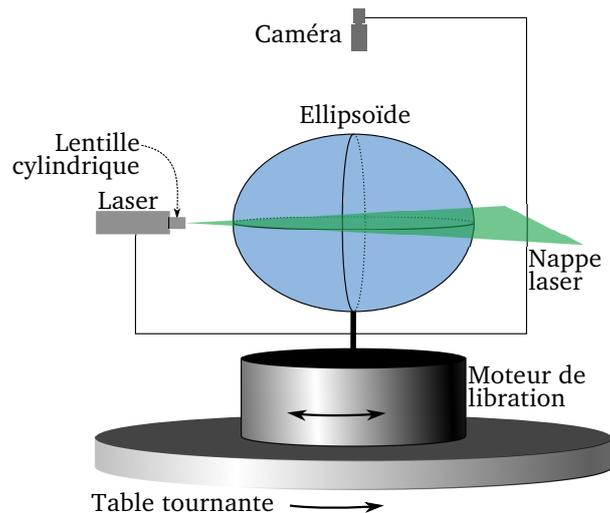


FIGURE 1 – Représentation schématique du dispositif expérimental permettant d’observer l’instabilité elliptique de modes inertiels forcée par la libration.

deux modes inertiels doivent par ailleurs satisfaire la règle de sélection suivante :

$$|\omega_j - \omega_k| = f\Omega_0 . \quad (7)$$

Le taux de croissance des ondes est alors proportionnel à $Ro_i = \varepsilon\beta$ [5]. L’objectif de notre étude est d’étudier expérimentalement la saturation de cette instabilité, lorsque les ondes résonantes s’effondrent en turbulence. Dans tout ce qui suit, nous nous intéressons au cas où $f = 4$, de telle sorte que $\omega_j = -\omega_k = 2\Omega_0$.

Dispositif expérimental

Dans les expériences réalisées au laboratoire, l’ellipsoïde est placé sur une table tournante créant une rotation moyenne variant de 10 à 40 RPM. Les demi-axes principaux de l’ellipsoïde sont $a = 254$ mm, $b = 178$ mm et $c = 215$ mm, de telle sorte que l’ellipticité horizontale soit $\beta = 0.34$. Les oscillations de libration sont imposées par un moteur pas-à-pas Yaskawa SGMCS-2ZN3A11 dont le mouvement de rotation sinusoïdale est contrôlé par une carte Servopack SGDS7S et codé sur 2000 points décrivant les positions angulaires successives du moteur. Les amplitudes typiques de libration, ainsi que la variation relative de vitesse de rotation ε et le nombre de Rossby associé $Ro_i = \beta\varepsilon$ sont indiquées dans le tableau 1. Dans toute notre étude, nous ne nous intéressons qu’à la fréquence de libration $f = 4$. Par ailleurs, la table tournante principale est dotée d’une mesure en direct du taux de rotation qui nous a permis de vérifier que les oscillations du moteur secondaire n’ont pas créé de variation de la vitesse moyenne de rotation excédant 0.4 %.

Nous utilisons la technique de mesure de vitesse par images de particules (PIV) pour déterminer le champ de vitesse horizontale du fluide dans le plan horizontal équatorial de l’ellipsoïde. Un faisceau Laser est transformé en une nappe homogène d’une épaisseur de 2 mm —voir figure 1— éclairant des particules dont la densité est proche de celle de l’eau et d’un diamètre avoisinant $50 \mu\text{m}$ dispersées à l’intérieur de l’ellipsoïde.

Des images à haute résolution (2560×1600 pixels) du plan éclairé par la nappe Laser sont prises par une caméra Dantec SpeedSense 341 placée au-dessus de l’ellipsoïde —voir figure 1—, le capteur CCD étant

Vitesse de rotation	Nombre d'Ekman	$Ro_i \times 10^2$
10 RPM	1.5×10^{-5}	6.31–11.2
20 RPM	7.4×10^{-6}	4.02–10.0
30 RPM	5.0×10^{-6}	2.54–10.1
40 RPM	3.7×10^{-6}	3.36–4.16

TABLE 1 – Table des valeurs typiques des paramètres pour lesquels l'étude de l'instabilité elliptique est réalisée. Le taux de rotation est indiqué en rotation par minutes (RPM). Le nombre d'Ekman $E = \nu/(a^2\Omega_0)$ compare les effets de la viscosité par rapport à ceux de la force de Coriolis, il quantifie la dissipation dans le système. Ro_i représente quant à lui l'amplitude du forçage de libration. Pour toutes les expériences, la fréquence adimensionnée de libration vaut $f = 4$.

situé à 38.7 cm du plan. Un objectif Zeiss 28 mm est placé à l'entrée de la caméra. Afin de réaliser les mesures de vitesse, des images sont prises en continu à une cadence variant de 20 Hz pour la plus basse fréquence de rotation à 50 Hz pour la plus haute. L'acquisition des images est contrôlée par le logiciel DynamicStudio de Dantec. Ce même logiciel est utilisé pour traiter les images de particules pour en tirer des champs de vecteurs via un algorithme de PIV adaptatif. Ce dernier est appliqué à 78×50 carrés de 64×64 pixels. La fréquence d'acquisition est choisie afin qu'une particule ne se déplace pas de plus d'un cinquième à un tiers de la taille de ce carré. L'ensemencement en particules est tel qu'un carré contienne environ 3 à 5 particules en permanence. Ce nombre permet de mesurer des corrélations significatives entre deux images successives dans la détermination du champ de vitesse.

Déroulement d'une expérience

Pour réaliser l'étude de la saturation non-linéaire de la résonance d'ondes, nous procédons comme suit. Une fois la rotation de la table mise en route, nous attendons que la rotation solide soit atteinte à l'intérieur de l'ellipsoïde. Nous démarrons ensuite l'oscillation de libration du moteur secondaire. La mesure de l'écoulement ainsi créé avant que l'instabilité soit développée permet de déterminer précisément l'amplitude de l'oscillation de libration, et donc Ro_i .

Dans ce qui suit, pour un taux de rotation donné, nous reproduisons ce protocole à différentes valeurs de Ro_i , à commencer par certaines sous le seuil de l'instabilité elliptique. Ceci a permis de déterminer qu'au seuil : $Ro_i \simeq 10\sqrt{E}$, ce qui est en accord avec l'étude numérique [6].

Régime des faibles amplitudes de forçage : une saturation dominée par des modes en interactions non-linéaires

Nous nous intéressons ici aux faibles amplitudes de forçage, toutefois situées au-dessus du seuil de l'instabilité paramétrique primaire. Nous précisons ultérieurement au-delà de quelle amplitude un forçage sera considéré comme fort.

Pour caractériser l'écoulement obtenu dans la saturation de l'instabilité elliptique, nous nous intéressons à son contenu fréquentiel. Celui-ci est déterminé en sélectionnant 300 positions aléatoires dans le champ PIV auxquelles on enregistre les séries temporelles des deux composantes de la vitesse. Le contenu spectral de ces séries temporelles est déterminé par transformation de Fourier et moyenne d'ensemble des spectres de puissance ainsi obtenus (notée $\hat{\mathcal{E}}(\omega)$).

Le résultat de cette mesure est présenté en figure 2. En plus de deux fréquences principales associées

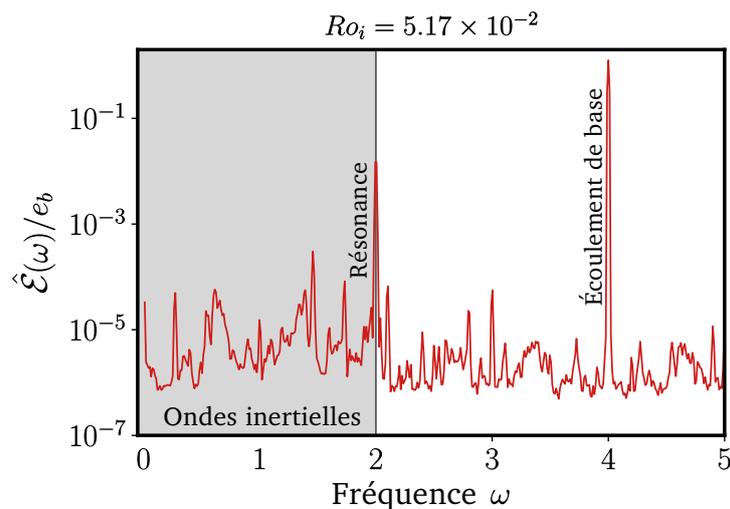


FIGURE 2 – Moyenne d'ensemble des spectres temporels issus de mesures locales de vitesse pour une amplitude de forçage $Ro_i = 5.17 \times 10^{-2}$ et un nombre d'Ekman $E = 5 \times 10^{-6}$. L'énergie est normalisée par celle de l'écoulement de base de libration, et la fréquence est normalisée par le taux de rotation moyen Ω_0 . Les deux pics les plus importants sont ceux associés à l'écoulement de base $\omega = f = 4$ ainsi qu'aux modes résonants à $\omega = f/2 = 2$.

à l'écoulement de libration et aux modes résonnant, un nombre important de pics secondaires apparaît clairement, notamment dans l'intervalle de fréquence associé aux ondes inertielles $|\omega| \in [0, 2]$. Comme nous le montrons sur la figure 3, ces fréquences secondaires peuvent être associées par paires dont les fréquences ω_1 et ω_2 vérifient la relation suivante :

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_{\text{res}} = 2 \quad (8)$$

ce qui indique que ces paires sont associées à des résonances triadiques [2], *i.e.* des transferts non-linéaires résonants entre trois modes, l'un d'entre eux étant le premier mode résonant. On révèle par ailleurs en filtrant le champ aux fréquences secondaires des structures de modes qui corroborent l'existence de résonances triadiques entre modes.

L'écoulement à saturation que nous reportons ici dans ce régime de paramètres est donc un état pré-curseur de la turbulence d'ondes inertielles qui consiste en un spectre continu d'ondes à une multitude d'échelles différentes interagissant entre elles de manière résonante [14]. Il est concevable que dans les noyaux planétaires, où l'amplitude de forçage et la dissipation sont faibles, le nombre de modes interagissant entre eux soit augmenté au point que l'instabilité elliptique y crée à saturation une turbulence d'ondes inertielles.

Un écoulement géostrophique fort aux grands forçages

Nous nous intéressons maintenant aux grandes amplitudes de forçage, typiquement au-dessus de $Ro_i \sim 6 \times 10^{-2}$ à $E = 5.0 \times 10^{-6}$. Cette limite est fixée par une transition secondaire qui se produit dans la saturation non-linéaire de l'instabilité et qui voit l'émergence d'un écoulement moyen géostrophique (invariant suivant l'axe z) fort. Un exemple de champ moyen, noté \bar{U} , est représenté en figure 4-gauche. Cet écoulement est anticyclonique indépendamment de l'amplitude de forçage Ro_i . Son amplitude, caractérisée par exemple par les profils de vitesse de la figure 4-droite, augmente cependant brutalement

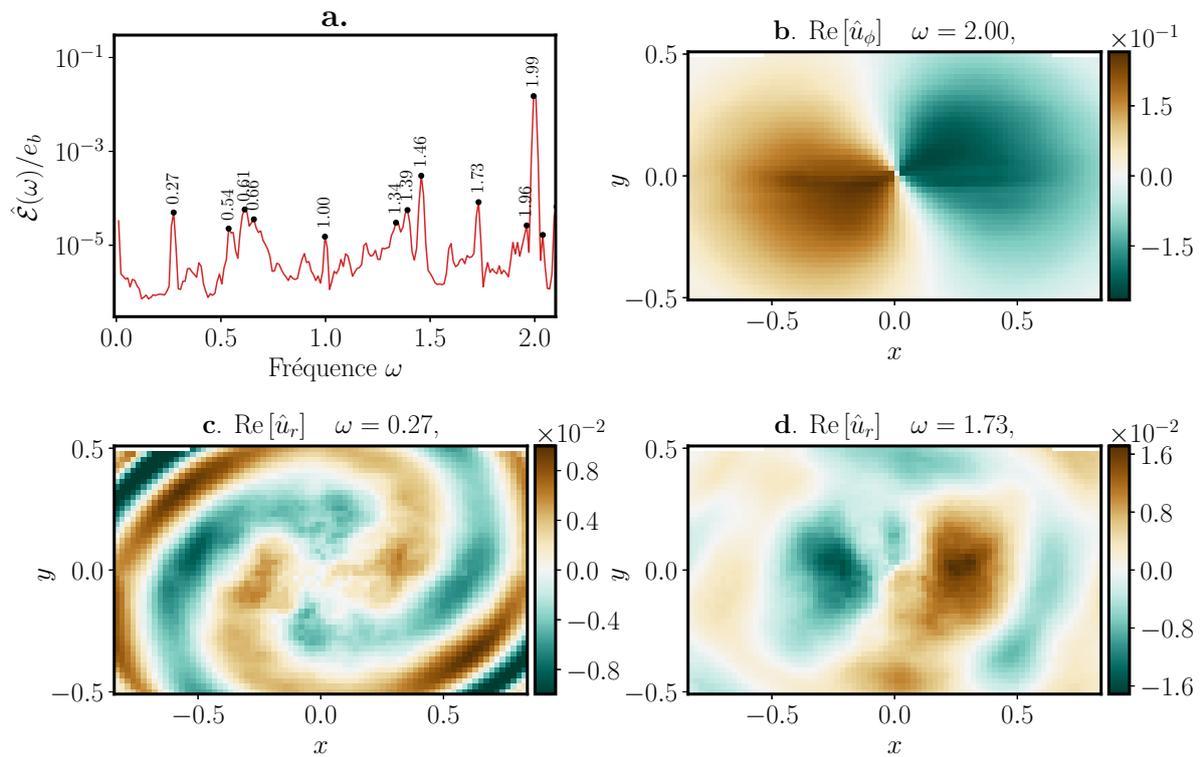


FIGURE 3 – **a** : Spectre temporel de la figure 2 avec mise en évidence des fréquences excitées. On observe que les fréquences s’associent par paires ($0.27 + 1.73 = 2.00$, $0.54 + 1.46 = 2.00$, $0.61 + 1.39 = 2.00$ et $0.66 + 1.34 = 2.00$). **b à d** : champ de vitesse filtré à certaines des fréquences principales et secondaires du spectre temporel.

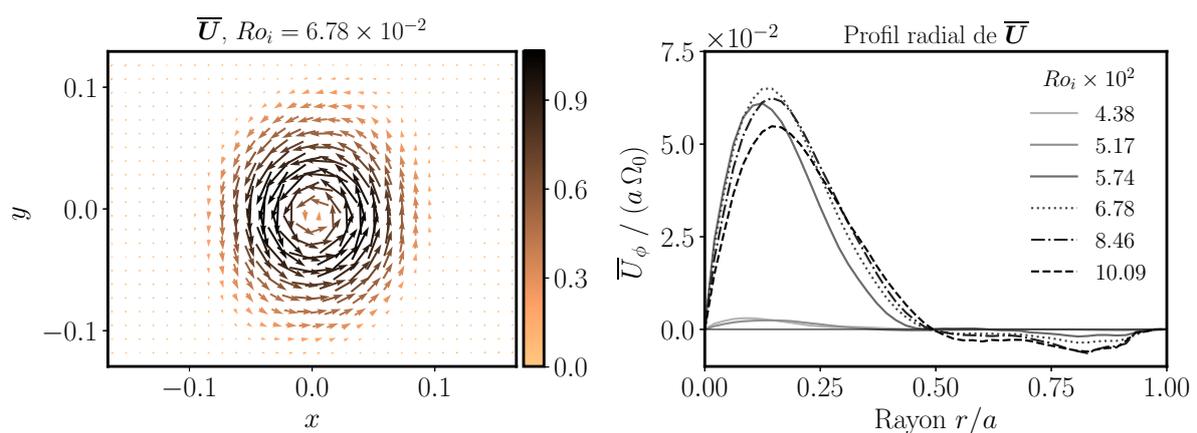


FIGURE 4 – **Gauche** : exemple de champ de vitesse d’écoulement moyen extrait pour une amplitude de forçage $Ro_i = 6.78 \times 10^{-2}$ et un nombre d’Ekman $E = 5.0 \times 10^{-6}$. L’échelle de couleur des vecteurs représente la norme de la vitesse normalisée par une vitesse typique $Ro_i a \Omega_0$. **Droite** : profils radiaux de la composante azimutale de l’écoulement moyen en fonction de l’amplitude du forçage Ro_i et pour un nombre d’Ekman $E = 5.0 \times 10^{-6}$. La vitesse est comparée ici à une vitesse de rotation typique $a\Omega_0$.

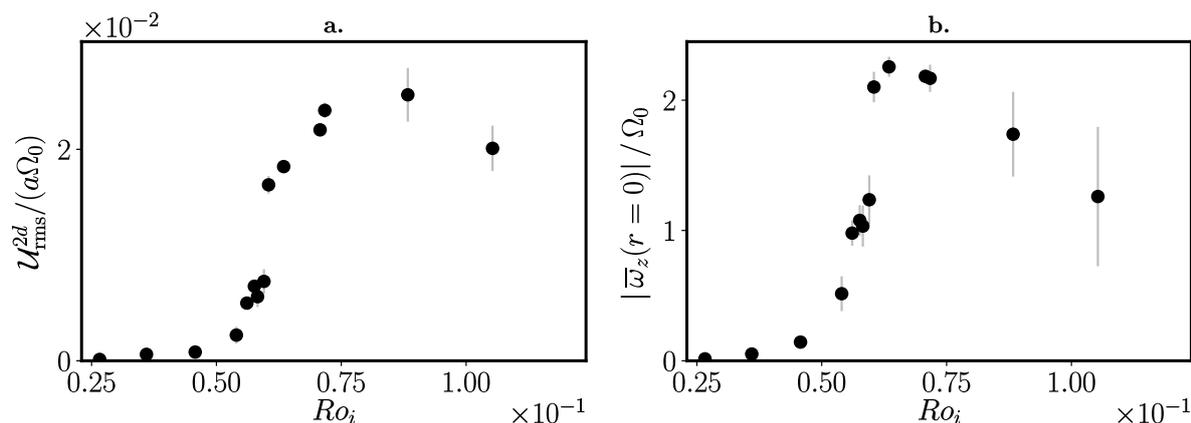


FIGURE 5 – Évolution des quantités diagnostiques U_{rms}^{2d} (a) et $\bar{\omega}_{z0}$ (b) en fonction de l’amplitude du forçage en fonction de Ro_i pour un nombre d’Ekman $E = 5.0 \times 10^{-6}$. La quantité U_{rms}^{2d} , homogène à une vitesse, est normalisée par une vitesse de rotation $a\Omega_0$ et la vorticité est normalisée par le taux de rotation Ω_0 . $Ro_i \simeq 0.20$ correspond au seuil de l’instabilité elliptique.

lorsque Ro_i est augmenté au-delà d’un certain seuil.

Pour mieux caractériser cette transition secondaire, nous introduisons deux quantités diagnostiques, U_{rms}^{2d} la déviation standard spatiale du champ $|\bar{U}|$ ainsi que la vorticité moyenne au centre $\bar{\omega}_{z0}$ définie comme la limite en $r \rightarrow 0$ de $\bar{\omega}_z$ avec :

$$\bar{\omega}_z = \frac{d\bar{U}_\phi}{dr} + \frac{\bar{U}_\phi}{r}. \quad (9)$$

L’évolution de ces deux quantités diagnostiques est représentée en figure 5 où la transition secondaire évoquée précédemment apparaît clairement.

Lorsque l’écoulement géostrophique prend le pas sur l’écoulement à saturation, le contenu spectral de ce dernier est grandement modifié, comme on peut l’observer sur la figure 6. Plutôt qu’un grand nombre de pics dans l’intervalle des ondes inertielles comme c’était le cas plus haut, nous relevons au mieux deux pics élargis. Par ailleurs, l’écart entre l’amplitude du forçage et le niveau de fond est réduit à mesure que Ro_i est augmenté. L’écoulement à saturation devient donc plus turbulent, et les modes inertiels tendent à s’effacer.

Un diagramme d’existence pour la turbulence d’ondes inertielles

Les résultats expérimentaux détaillés dans le cas $E = 5.0 \times 10^{-6}$ ont pu être éprouvés à différents nombres d’Ekman en changeant le taux de rotation de la table tournante —voir le tableau 1. Nous reportons les mêmes observations : au-dessus du seuil de l’instabilité elliptique, aux faibles forçages, l’écoulement de saturation est constitué d’ondes en interactions non-linéaires, tandis qu’en augmentant Ro_i , une transition secondaire se produit et donne naissance à un écoulement géostrophique dominant.

En repérant à quelles valeurs de l’amplitude du forçage Ro_i nous observons la transition secondaire, nous pouvons donc tracer un diagramme des régimes pour l’instabilité elliptique et, en particulier, borner le domaine d’existence de la turbulence d’ondes inertielles. Un tel diagramme réalisé à partir de nos données expérimentales est présenté en figure 7 où nous faisons apparaître le seuil de l’instabilité elliptique et la ligne départageant le domaine d’existence de la turbulence d’ondes inertielles et celui de

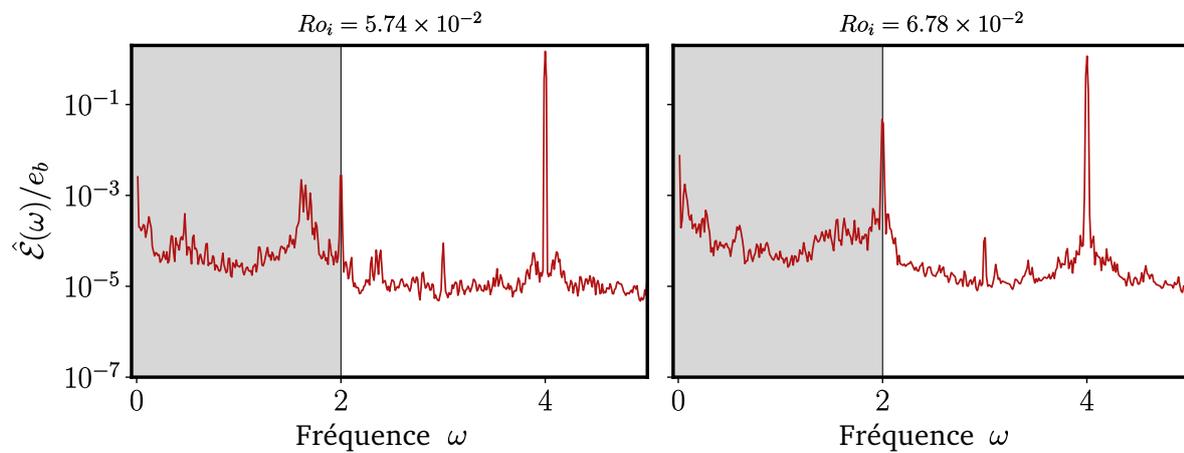


FIGURE 6 – Spectres temporels pris dans la phase de saturation de l’instabilité elliptique pour deux amplitudes de forçage Ro_i au-dessus du seuil de la transition secondaire donnant naissance à un écoulement géostrophique fort. La zone grisée ainsi que les bornes des axes sont identiques à la figure 2.

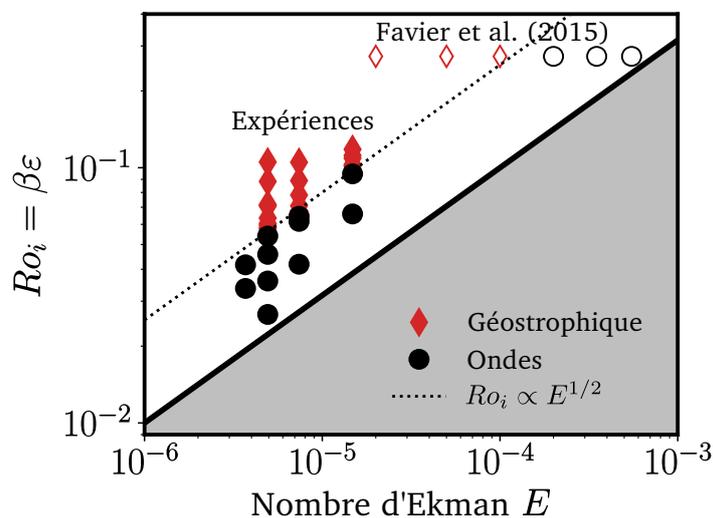


FIGURE 7 – Diagramme des régimes de saturation de l’instabilité elliptique. La zone grisée correspond aux paramètres pour lesquels l’instabilité elliptique ne croît pas, elle suit également une loi en $Ro_i \propto E^{1/2}$. Nous avons également reporté les points de l’étude numérique [6] pour laquelle une transition entre un écoulement géostrophique de faible vorticité centrale (cercles noirs vides) et un anticyclone fort (losanges rouges vides) a été observée.

la saturation géostrophique. Nous reportons également les résultats de l'étude numérique [6] où l'émergence d'un écoulement moyen de vorticité centrale forte est également observée. La frontière entre les deux domaines suit une loi $Ro_i \propto E^{-1/2}$ à l'instar du seuil de l'instabilité elliptique. Ceci suggère que le mécanisme produisant l'écoulement géostrophique fort est une instabilité dont le taux de croissance va comme Ro_i , bien qu'un modèle théorique reste à trouver.

Conclusion

Notre dispositif expérimental conçu pour étudier la saturation non-linéaire de l'instabilité elliptique due aux forçages de libration nous a permis de mettre en évidence un régime dominé par des ondes inertielles en interactions non-linéaires. Il est borné par une transition secondaire lorsque le forçage est augmenté donnant lieu à l'émergence d'un écoulement géostrophique fort. L'existence de ces deux régimes avait été envisagée par [13] à travers un modèle numérique idéalisé qui avait montré la possibilité que l'injection d'énergie via des ondes inertielles pouvait donner naissance à ces deux régimes.

Ce résultat contraste par rapport aux études plus classiques de turbulence en rotation où les écoulements sont excités de manière stochastique. Ces forçages conduisent en effet toujours à une bi-dimensionalisation des structures turbulentes et à l'émergence d'écoulements majoritairement géostrophiques.

Finalement, le domaine d'existence de la turbulence d'ondes que nous observons dans nos expériences est situé juste au-dessus du seuil de l'instabilité elliptique. La plupart des corps astrophysiques instables par l'instabilité elliptique étant situés proches du seuil [3], le régime de turbulence d'ondes inertielles est donc pertinent pour l'étude des noyaux planétaires. Cependant, la génération d'une dynamo et les propriétés d'un champ magnétique généré par un tel écoulement restent peu explorées.

Références

- [1] Barker, Lithwick. Non-linear evolution of the tidal elliptical instability in gaseous planets and stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 435(4) :3614–3626, 2013.
- [2] Bordes, Moisy, Dauxois, Cortet. Experimental evidence of a triadic resonance of plane inertial waves in a rotating fluid. *Physics of Fluids*, 24(1) :014105, January 2012.
- [3] Cébron, Le Bars, Moutou, Le Gal. Elliptical instability in terrestrial planets and moons. *Astronomy & Astrophysics*, 539 :A78, March 2012.
- [4] Cébron, Le Bars, Noir, Aurnou. Libration driven elliptical instability. *Physics of Fluids*, 24(6) :061703, June 2012.
- [5] Cébron, Vantieghem, Herreman. Libration-driven multipolar instabilities. *Journal of Fluid Mechanics*, 739 :502–543, January 2014.
- [6] Favier, Grannan, Le Bars, Aurnou. Generation and maintenance of bulk turbulence by libration-driven elliptical instability. *Physics of Fluids*, 27(6) :066601, June 2015.
- [7] Godeferd, Moisy. Structure and Dynamics of Rotating Turbulence : A Review of Recent Experimental and Numerical Results. *Applied Mechanics Reviews*, 67(3) :030802–030802, May 2015.
- [8] Grannan, Favier, Le Bars, Aurnou. Tidally forced turbulence in planetary interiors. *Geophysical Journal International*, 208(3) :1690–1703, March 2017.
- [9] Grannan, Le Bars, Cébron, Aurnou. Experimental study of global-scale turbulence in a librating ellipsoid. *Physics of Fluids*, 26(12) :126601, December 2014.

-
- [10] Greenspan. *The Theory of Rotating Fluids*. CUP Archive, July 1968.
- [11] Hough. XII. The oscillations of a rotating ellipsoidal shell containing fluid. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 186 :469–506, January 1895.
- [12] Le Bars, Cébron, Le Gal. Flows Driven by Libration, Precession, and Tides. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 47(1) :163–193, January 2015.
- [13] Le Reun, Favier, Barker, Le Bars. Inertial Wave Turbulence Driven by Elliptical Instability. *Physical Review Letters*, 119(3) :034502, July 2017.
- [14] Nazarenko. *Wave Turbulence*, volume 825 of *Lecture Notes in Physics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [15] Noir, Cébron, Le Bars, Sauret, Aurnou. Experimental study of libration-driven zonal flows in non-axisymmetric containers. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 204-205 :1–10, September 2012.
- [16] Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Mathematica*, 7(1) :259–380, December 1885.
- [17] Smith, Waleffe. Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence. *Physics of Fluids*, 11(6) :1608–1622, June 1999.