

Simulation du transfert thermique par conduction en milieu continu et hétérogène par la méthode des éléments discrets

G. A. HASSAN ^a, H. HADDAD ^a, D. MOUKADIRI ^a, W. LECLERC ^a
et M. GUESSASMA ^a

a. Université de Picardie Jules Verne, LTI, EA 3899, 02100 Saint-Quentin, France
ghassan.alhaji-hassan@u-picardie.fr, hamza.haddad@u-picardie.fr, dounia.moukadiri@u-picardie.fr,
willy.leclerc@u-picardie.fr, mohamed.guessasma@u-picardie.fr

Résumé :

La présente contribution est dédiée à la simulation par la Méthode des Éléments Discrets (MED) du transfert thermique par conduction dans les milieux composites. Pour ce faire, nous considérons un modèle équivalent au milieu continu constitué par un empilement de sphères en contact. Dans cette approche, chaque contact interparticulaire est un lien dont la section et les propriétés thermiques régissent la conduction de la chaleur. Un processus de calibration doit donc être mis en place afin de relier les surfaces de transmission de chaleur de chaque lien au comportement thermique effectif. Deux configurations sont considérées. La première correspond à un problème thermique dans un cadre transitoire dans un milieu continu et homogène. Le modèle est alors validé en terme de température par comparaison avec une solution analytique. La deuxième configuration correspond à un problème thermique en régime stationnaire en milieu hétérogène: inclusion solitaire noyée dans une matrice. Dans ce contexte, le modèle est validé en termes de Conductivité Thermique Effective (CTE) et de flux thermique.

Mots clés :MED, matériau composite, CTE, flux thermique

1 Introduction

Le nombre d'applications des matériaux composites dans l'industrie a considérablement augmenté ces dernières années, en raison de faible coût de fabrication ainsi que la personnalisation de leurs propriétés mécaniques et thermiques. En raison de leurs microstructures complexes, l'étude détaillée du transfert thermique est une tâche ardue. Par conséquent, les analyses techniques se concentrent potentiellement sur le comportement macroscopique de tels matériaux, dicté par les propriétés dites effectives, telles que la CTE. La détermination de cette dernière en termes de microstructure, de propriétés individuelles des phases et d'autres paramètres physiques pertinents est d'une importance scientifique et pratique. En outre, la plupart des procédés de fabrication des matériaux composites n'assurent pas un contact thermique parfait entre les phases constitutives Ceci peut être dû à une mauvaise adhérence chimique et/ou mécanique, provoquée par la présence de rugosités et d'impuretés à l'interface. Les procédés de fabrication des matériaux composites peuvent également entraîner d'autres défauts, tels

que des vides à l'intérieur de la matrice, qui contribuent également à réduire leur CTE. Il existe une variété de phénomènes de transport dans les matériaux composites tels que la conduction thermique, la convection forcée et naturelle et le rayonnement, pour ne citer que quelques exemples. Dans le cadre de ce travail, nous nous intéresserons uniquement qu'à la conduction thermique.

Les modèles analytiques [1, 2] fournissent plusieurs expressions de CTE à partir desquelles les effets de la fraction volumique, de la forme et de la distribution spatiale de la phase dispersée sont facilement quantifiables. Néanmoins, ils se limitent dans la plupart des cas à des microstructures simples. Les approches phénoménologiques se présentent comme un outil d'aide pour l'étude de la physique complexe et des géométries micro-structurales. Néanmoins, elles adoptent des hypothèses heuristiques qui ne sont pas faciles à vérifier en pratique. La simulation numérique semble être le moyen le plus approprié pour traiter le transfert thermique dans les composites. En plus de sa flexibilité inhérente, la simulation numérique permet une amélioration progressive de la modélisation physique et géométrique de ces matériaux.

La performance des méthodes numériques a été démontrée par plusieurs auteurs [3, 4, 5]. Ramani et al. [3] ont utilisé la Méthode des Éléments Finis (MEF) pour prédire la CTE d'un composite chargé de particules sphériques et de parallélépipèdes. L'effet des caractéristiques microstructurales telles que la résistance thermique de l'interface, la fraction volumique et la dispersion des inclusions a été étudié. Dans [4], les auteurs ont montré que la conductivité thermique du composite était fortement influencée par la concentration et la disposition des inclusions. Arambakam et al. [5] ont développé un modèle de simulation 3D pour étudier l'effet des paramètres de la microstructure sur les propriétés thermiques des matériaux fibreux soumis à un flux de chaleur.

La description précise du comportement mécanique d'un matériau granulaire [6] et l'augmentation de la puissance des machines et les progrès en calcul parallèle ont permis d'étendre la MED à l'étude des phénomènes multi-physiques au-delà du comportement mécanique. Plusieurs contributions le phénomène de transfert thermique dans les milieux granulaires afin de décrire la conduction thermique [7] et étudier leur CTE [8]. Les travaux [9, 10] portent en particulier sur la modélisation du transfert de chaleur dans des domaines continus utilisant la MED. Dans [11], les dommages induits par la chaleur dans un domaine hétérogène continu sont étudiés à l'aide de la MED. Enfin, dans [12], une méthode de couplage MEF-MED a été proposée et discutée pour étudier le transfert de chaleur par conduction en milieu continu et homogène.

L'objectif de cette contribution est d'étudier la capacité de la MED à simuler le transfert thermique dans un milieu continu et hétérogène en 3D. Contrairement à ce qui a été présenté dans [13], l'estimation de la surface de transmission de chaleur entre deux particules n'est pas basée sur un pavage de Voronoï du domaine mais plutôt sur une calibration numérique. Ce choix a permis de simplifier le modèle numérique et de réduire considérablement le coût de calcul. Dans un premier temps, le modèle a été validé dans le cas d'un milieu homogène. Les résultats numériques ont été comparés aux solutions analytiques. Dans un second temps, le modèle a été validé dans le cas d'un milieu hétérogène. Les propriétés effectives du milieu ont été évaluées puis comparées à celles données par le modèle analytique de Maxwell et les résultats de simulations numériques par la MEF. Le champ de flux thermique a également été évalué puis comparé avec celui obtenu par la MEF.

2 Transfert thermique dans un milieu continu par la MED

2.1 Milieu Continu Équivalent (MCE)

Dans cette partie, on va présenter une approche numérique basée sur la MED pour examiner la conduction thermique dans un domaine 3D continu et homogène. Ce dernier est constitué d'un empilement granulaire polydisperse considéré comme un MCE (Figure 1). Un soin particulier doit être pris lors de la génération de l'empilement granulaire. Le nombre de particules doit être suffisamment important afin d'être représentatif d'un domaine continu. Le nombre de coordination, la fraction volumique, la polydispersité et l'orientation des angles de contact doivent être contrôlés afin de vérifier un domaine aléatoire et un matériau isotrope. Ces hypothèses garantissent que les propriétés thermiques effectives soient indépendantes de la direction [14]. À titre d'information, une fraction volumique ϕ proche de 0,64 et un nombre de coordination minimum Z de 6 sont typiques d'un domaine 3D [15]. Dans le cadre de ce travail, nous avons choisi un nombre de coordination $Z = 7,5$. Ceci correspond à la génération d'environ 10% de nouveaux contacts et permet d'obtenir un réseau de contacts plus dense. Une légère polydispersité basée sur un modèle gaussien avec un coefficient de variation de 0,3 est choisi afin d'éviter d'éventuels effets directionnels.

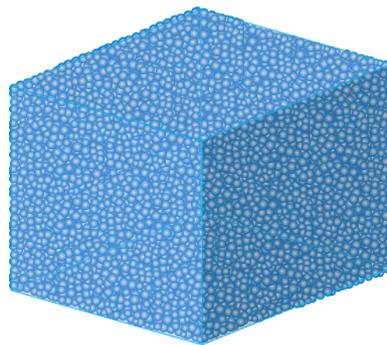


Figure 1: Illustration d'un MCE cubique

2.2 Approche de résolution par la MED

L'approche proposée consiste à associer à chaque particule du domaine un élément représentatif. On ne s'intéresse pas à la forme de cet élément mais on s'intéresse plutôt à ses caractéristiques (volume et surfaces de transmission de chaleur). Le volume de chaque élément représentatif est choisi dans un souci de satisfaire l'hypothèse de conservation de la masse. Par ailleurs, la somme des volumes des éléments représentatifs doit être égale au volume du domaine étudié. Pour ce faire, la masse de chaque particule est ajustée à la masse de l'élément représentatif correspondant au moyen de la fraction volumique ϕ . Considérons ρ_c la densité du matériau continu. La densité de l'empilement granulaire ρ_d est alors reliée à ρ_c via la relation suivante:

$$\rho_d = \frac{\rho_c}{\phi} \quad (1)$$

Le flux thermique $W_{p,q}$ transmis par la surface de transmission $S_{p,q}^t$ entre deux éléments représentatifs (Figure 3) associés respectivement à deux particules p et q en contact est défini comme suit:

$$W_{p,q} = H_c^{p,q}(T_q - T_p) \quad (2)$$

où T_p, T_q sont les températures des particules p, q et $H_c^{p,q}$ est le coefficient de conductance thermique donné par:

$$H_c^{p,q} = \frac{\lambda S_{p,q}^t}{d_{p,q}} \quad (3)$$

λ est la conductivité thermique du matériau et $d_{p,q}$ est la distance entre les centres des particules p et q .

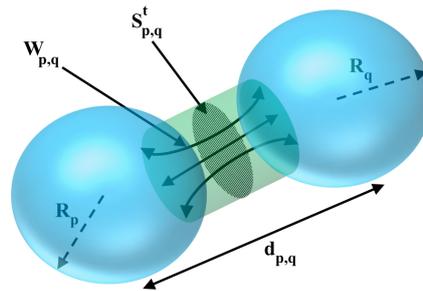


Figure 2: Transfert thermique par conduction à l'échelle d'un contact

L'équation du transfert thermique associée à chaque particule est:

$$C_p^d \frac{dT_p}{dt} + \sum_{q=1}^{n_p} W_{p,q} = Q_p \quad (4)$$

où Q_p représente le flux de chaleur externe associé à la particule p et n_p est le nombre de particules voisines. La résolution temporelle de l'équation 4 peut être réalisée par deux types de schémas numériques (implicite ou explicite). Les schémas numériques implicites sont stables pour des grands pas de temps. Cependant, compte tenu du grand nombre de contacts entre particules, les schémas numériques implicites sont trop coûteux et leurs gains en temps sont limités. Par conséquent, on a fait le choix d'utiliser un schéma numérique explicite qui ne préconise pas une procédure itérative. La discrétisation en temps de l'équation (4) conduit à:

$$T_p^{t+\Delta t} = T_p^t + \frac{\phi \Delta t}{C \rho_c V_p} \underbrace{\left[Q_p + \sum_{q=1}^{n_p} \frac{\lambda S_{p,q}^t}{d_{p,q}} (T_q^t - T_p^t) \right]}_{Q_p^{tot}} \quad (5)$$

V_p est le volume de la particule et C est la chaleur spécifique du matériau constitutif.

2.3 Calibration des paramètres du modèle

Contrairement à la MEF, pour laquelle les propriétés locales à l'échelle de l'élément sont identiques aux propriétés macroscopiques pour un milieu homogène, les propriétés et paramètres locaux à l'échelle du contact doivent être corrélés aux propriétés macroscopiques. Dans notre cas, la conductivité thermique du milieu équivalent dépend intrinsèquement des surfaces de transmission $S_{p,q}^t$ entre les éléments représentatifs. Nous avons fait le choix de corréler $S_{p,q}^t$ à un paramètre C_t et une surface $S_{p,q} = \pi \cdot R_{moy}^2$ déduite à partir du rayon moyen R_{moy} des particules en contact. L'expression de $S_{p,q}^t$ est donc:

$$S_{p,q}^t = C_t \cdot S_{p,q} \quad (6)$$

Par conséquent, la conductivité thermique du matériau est reliée au paramètre adimensionnel C_t . Ce dernier sera calibré afin d'obtenir une égalité entre la conductivité thermique du matériau et celle considérée à l'échelle des contacts. Pour ce faire, on va procéder comme suit. Une densité de flux thermique φ est appliquée à la surface supérieure de l'échantillon, de longueur L , dans la direction z tandis que une température constante T_0 est appliquée à la surface inférieure. Les conditions dans lesquelles est réalisé l'essai sont décrites dans la figure ci-dessous.

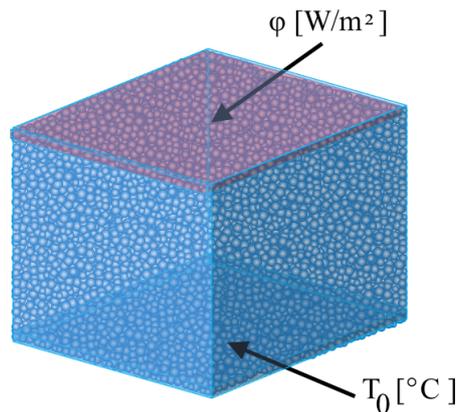


Figure 3: Essai numérique: identification de la CTE

Le paramètre C_t est choisi de façon arbitraire et est noté C_t^{arb} . Typiquement, on considère $C_t^{arb} = 1$. À l'état stationnaire, une différence de température ΔT est évaluée à la surface supérieure et la CTE du matériau λ^e est déduite à partir de l'équation suivante:

$$\lambda^e = \frac{\varphi L}{\Delta T} \quad (7)$$

Le paramètre C_t est déduit à partir de l'égalité suivante:

$$\frac{C_t}{C_t^{arb}} = \frac{\lambda}{\lambda^e} \quad (8)$$

Cet essai de calibration est réalisé pour plusieurs échantillons dont le nombre de particules varie entre 150000 et 6000000. La Figure 4 présente la variation du paramètre C_t en fonction du nombre de particules. La coefficient de C_t est situé entre 0.81 et 0.85. Sa variation est proportionnelle au nombre de particules sans tendre vers une valeur constante. Néanmoins, pour différents empilements à nombre de particules constant, les valeurs diffèrent très légèrement. Ceci prouve que ce paramètre est inhérent aux propriétés intrinsèques de l'empilement granulaire considéré. De plus, des études préliminaires ont montré que le produit $Z \times C_t$ est constant pour un empilement donné. Ceci offre la possibilité de varier le nombre de coordination Z sans être contraint à calibrer de nouveau le paramètre C_t .

2.4 Évaluation du flux thermique

Dans un régime stationnaire, l'expression de la densité u flux thermique φ_p^i appliquée à une particule p est définie comme suit:

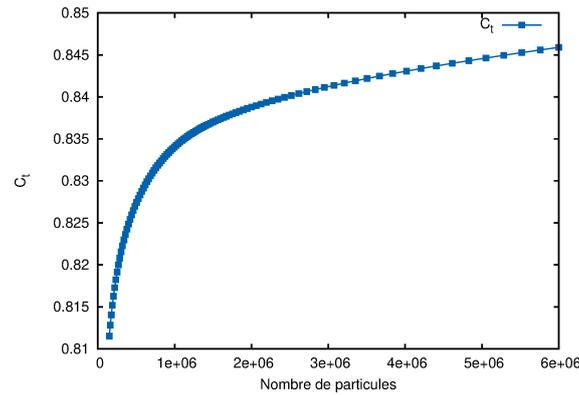


Figure 4: Variation du paramètre C_t en fonction du nombre de particules

$$\varphi_p^i = \frac{1}{2V_p} \sum_{q \in Z_p} \underbrace{[\lambda S_{p,q}^t (T_q - T_p)]}_{\phi_{p,q}} e_{p,q}^i \quad (9)$$

V_p est le volume de la particule, Z_p désigne l'ensemble de ses voisins et i correspond à la direction visée. $e_{p,q}^i$ est la projection du vecteur inter-centres normalisé sur la direction i . Par conséquent, des fluctuations typiques à l'échelle des particules peuvent apparaître. Pour atténuer l'effet de dispersion, il est judicieux de prendre en compte la contribution des particules situées au voisinage de la particule concernée. L'une des questions importantes concerne le choix du nombre de particules et la taille du volume ou spécimen qui les contient. La taille de ce dernier doit, d'une part, être suffisamment grande pour éliminer les fluctuations. D'autre part, le spécimen ne doit pas être trop grand si nous voulons traiter les quantités moyennées comme des valeurs locales. Par conséquent, la densité de flux thermique est évaluée à l'échelle d'un spécimen de volume Ω_p qui contient un des particules situées au voisinage de la particule concernée [16]. L'expression moyennée de la densité de flux thermique appliquée sur une particule p est égale à:

$$\varphi_p^i = \frac{1}{2\Omega_p} \sum_{r \in \Omega_p} \sum_{q \in Z_r} \phi_{r,q} e_{r,q}^i \quad (10)$$

3 Validation du modèle

Les essais numériques effectués dans cette section visent à valider l'approche discrète proposée. Deux cas sont considérés. Le premier cas correspond à un matériau homogène tandis que le deuxième cas correspond à un matériau hétérogène constitué d'une inclusion unitaire noyée dans une matrice.

3.1 Cas homogène:

Nous proposons dans cette partie de valider le modèle dans le cadre d'un milieu homogène par le biais d'une comparaison avec une solution analytique. Pour ce faire, on considère un échantillon de forme cubique et de longueur $L = 10$ cm. Il est constitué de 150000 particules sphériques et polydisperses dont la distribution granulométrique suit une loi de Gauss avec un écart-type égal à 0,3 fois leur rayon

moyen. Le paramètre C_t correspondant à cette configuration est égale à 0,817. Cette plaque est soumise aux conditions aux limites et initiales suivantes:

$$\begin{cases} T_1 : T(y=0) = 25^\circ C \\ T_2 : T(y=L) = 100^\circ C \\ t=0 : T(y) = T_0 = 25^\circ C : 0 < y < L \end{cases} \quad (11)$$

Les facettes latérales sont sous conditions adiabatiques. Les propriétés du matériau sont listées dans Tab. 1:

Densité	ρ_c	7800	kg/m ³
Conductivité thermique	λ	33	W/mK
Chaleur spécifique	C	0.9	J/kgK

Table 1: Propriétés du matériau

Le développement complet de la résolution analytique est détaillé dans [17]. Le champ de température en tout point est donné par l'équation suivante:

$$T(y) = T_1 + \frac{y\Delta T}{L} + \Delta T \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \frac{\lambda t}{\rho C}} \quad (12)$$

où:

$$C_n = 2 \times \frac{(-1)^n \times (1 - \theta_0) + \theta_0}{n\pi} \quad (13)$$

et θ_0 est définie comme quantité adimensionnelle: $\theta_0 = \frac{T_0 - T_1}{T_2 - T_1}$.

La variation de la température obtenue par la solution analytique et la MED au bout de 0.05 s, 0.1s et 0.2 s est représentée graphiquement sur la Figure 5. Les résultats fournis par la MED sont en bon accord avec la solution analytique permettant ainsi de valider la formulation proposée dans le cadre d'un milieu homogène.

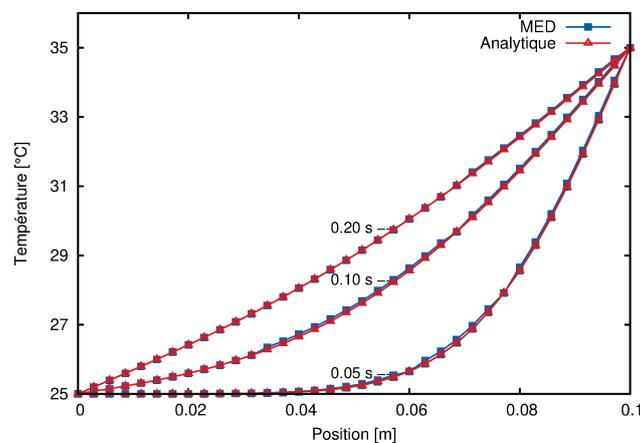


Figure 5: Comparaison entre la MED et la solution analytique pour différents temps de calcul

3.2 Cas hétérogène:

On s'intéresse maintenant à la validation de l'approche proposée dans le cas d'un matériau continu et hétérogène. Nous considérons l'exemple d'un matériau biphasique modélisé par un VER de forme cubique constitué d'une inclusion de forme sphérique noyée dans une matrice (Figure 6).

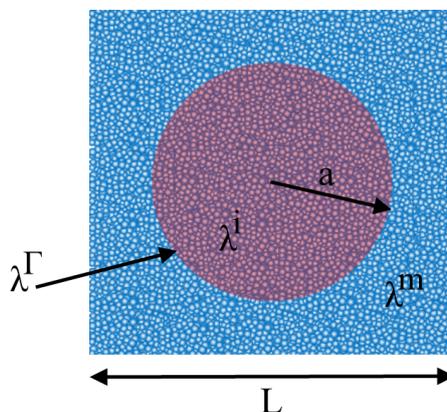


Figure 6: Composite à une inclusion sphérique (plan $y = L/2$)

L est le côté du cube et $a = \frac{L}{3}$ est le rayon de l'inclusion. Ainsi, la fraction volumique de l'inclusion est égale à 15.51%. L'essai numérique a été réalisé sur le même empilement granulaire de 15000 particules considéré dans la sous-section précédente. λ^i et λ^m sont respectivement les conductivités thermiques des phases inclusion et matrice. Il peut exister un cas où deux particules en contact ne soient pas situées dans la même phase. Ce cas est typique aux contacts situés à l'interface matrice-inclusion Γ . Cette interface est supposée parfaite et sans barrière thermique. Dans ce contexte, la conductivité thermique associée à la zone de contact entre les deux particules est moyennée. Dans le présent travail, nous considérons la moyenne inverse suivante:

$$\lambda^\Gamma = \frac{2\lambda^i\lambda^m}{\lambda^i + \lambda^m} \quad (14)$$

Ce choix a été justifié par le biais d'études préliminaires qui ont montré que la moyenne arithmétique surestime la CTE. La chaleur spécifique est supposée égale à 0.9 J/(K.kg) pour les deux phases mais cela a peu d'importance du moment que l'on s'intéresse dans cette section aux résultats à l'état stationnaire. On désigne par $c_\lambda = \frac{\lambda^i}{\lambda^m}$ le contraste de propriétés thermiques entre la matrice et l'inclusion. Plusieurs essais numériques ont été réalisés pour des contrastes de propriétés variant de 0.01 à 100. Des comparaisons, en terme de CTE, avec la MEF et le modèle analytique de Maxwell ont été effectuées et présentées dans la Figure 7. Quelque soit le contraste, inférieur ou supérieur à 1, les résultats obtenus par la MED sont proches de ceux obtenus par la MEF et le modèle de Maxwell. L'erreur relative maximale est de l'ordre de 0.65%. Ceci met en évidence la capacité de la MED à estimer la CTE dans le présent contexte.

Les conductivités thermiques de la matrice et de l'inclusion sont respectivement fixées à 33 et 165 W/mK, de sorte que le contraste de propriétés $c_\lambda = 5$. Pour la même configuration et les mêmes conditions thermiques, nous avons estimé en régime stationnaire les champs de température et de densité de flux thermique à l'aide de l'équation 10. Des comparaisons avec la MEF en termes de température et de densité de flux thermique ont été effectuées. À titre d'information, le maillage éléments finis est

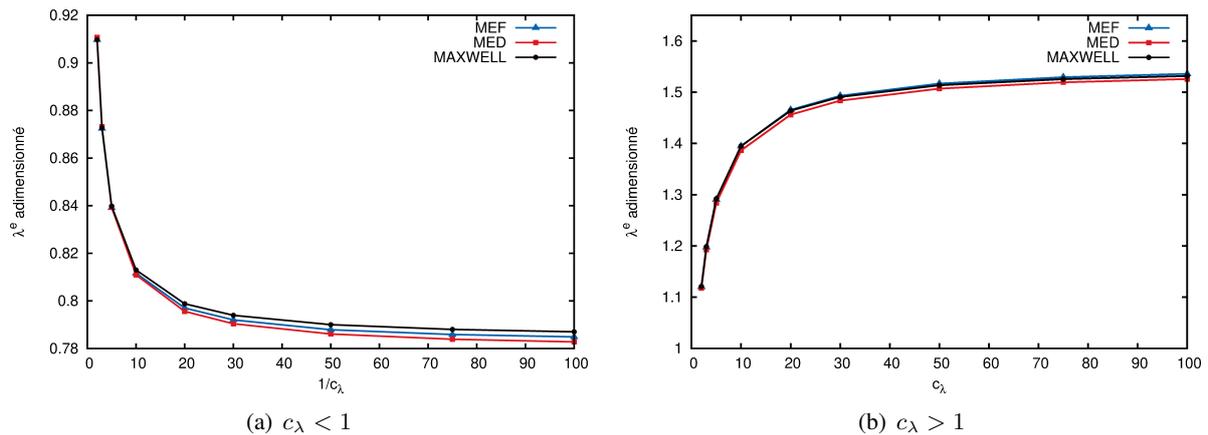


Figure 7: Influence du contraste de propriétés normalisé sur la CTE: comparaison entre modèles numériques et théorique

constitué d'environ 8 000 000 éléments tétraédriques. La Figure 8 illustre le champ de température obtenu par (a) la MED et (b) la MEF. Les valeurs des températures extraites aux positions A, B et C (situées dans le plan $y = L/2$) sont très proches. On peut supposer que les deux méthodes représentent un champ de température identique.

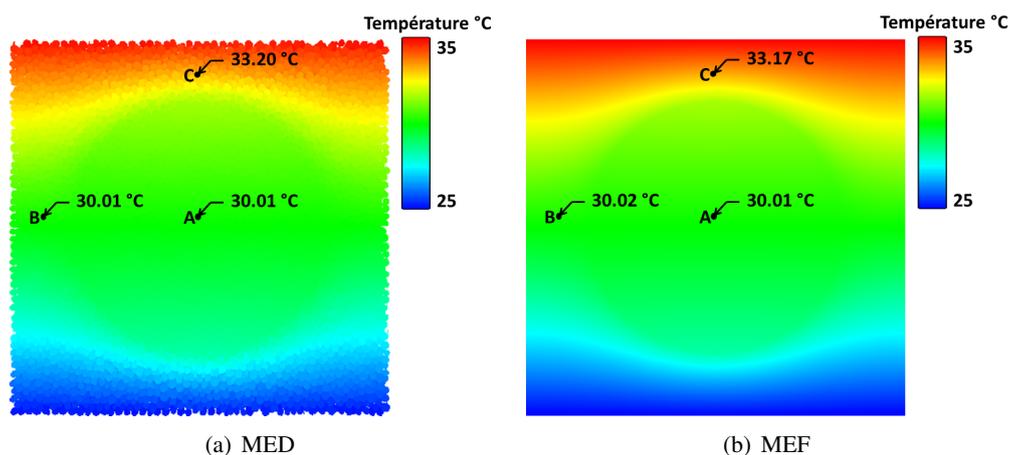


Figure 8: Problème à une seule inclusion: température

La densité de flux thermique a également été étudiée. La Figure 9 illustre les champs de densité de flux obtenus par la MED et la MEF. Ils montrent que les résultats obtenus par la MED sont en bon accord avec la MEF. Une différence relative maximale de 7.5% a été évaluée. Cette différence est due à l'approximation de la densité de flux thermique au niveau de l'inclusion/matrice et aux conditions adiabatiques de bord. Les résultats obtenus montrent que la MED offre la possibilité d'estimer le champ de densité de flux thermique dans un milieu continu hétérogène.

4 Conclusion

L'approche numérique présentée dans le cadre de ce travail montre le potentiel de la MED à modéliser le transfert thermique dans un milieu continu hétérogène. L'estimation de la surface de transmission de chaleur entre deux particules en contact est obtenue par calibration. Ce choix est moins coûteux par

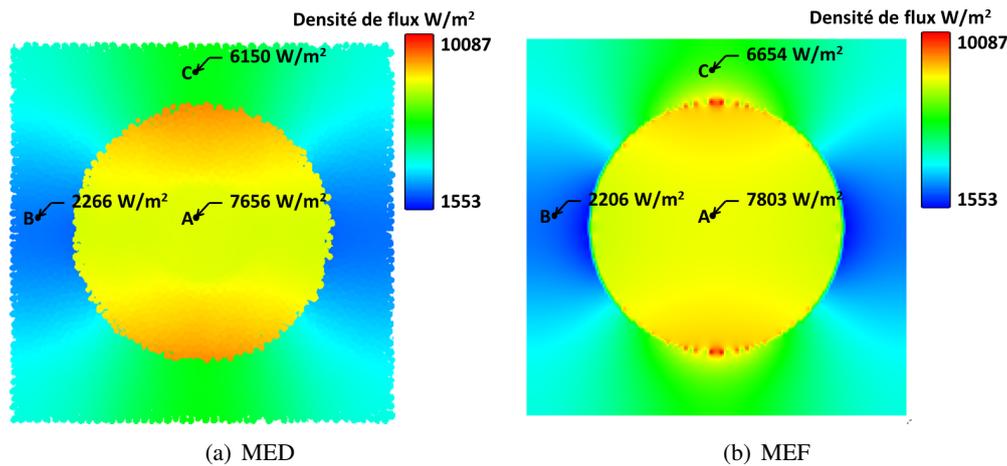


Figure 9: Problème à une seule inclusion: densité de flux thermique

rapport aux approches qui sont basées sur la création des éléments représentatifs à partir d'une décomposition de Voronoï du domaine [13]. Il permet aussi d'assurer la conservation de la masse contrairement à l'approche développée dans [10]. Nous envisageons de réaliser une étude paramétrique afin d'identifier l'influence des défauts d'interface entre les inclusions et la matrice sur les propriétés thermiques. Le modèle développé sera mise en œuvre pour étudier les propriétés effectives d'un cermet céramique-métal. Les résultats numériques seront aussi validés à partir d'un ensemble d'essais expérimentaux.

References

- [1] J-C. MAXWELL : Electricity and magnetism. *Oxford: Clarendon Press Oxford*, 1873.
- [2] A. BOUDENNE : Etude expérimentale et théorique des propriétés thermophysiques de matériaux composites à matrice polymère. Mémoire de D.E.A., Université de Paris Est, 2003.
- [3] K. RAMANI et A. VAIDYANATHAN : Finite element analysis of effective thermal conductivity of filled polymeric composites. *Journal of Composite Materials*, 29:1527–1740, 1995.
- [4] A. OCHSNER et T. FIEDLER : Geometrical properties of hollow sphere structures. *Engineering Materials*, pages 31–46, 2009.
- [5] R. ARAMBAKAM, V. TAFRESHI et B. POURDEYHIMI : Simple simulation method for designing fibrous insulation materials. *Materials and design*, 44:99–106, 2013.
- [6] P. A. CUNDALL : A computer model for simulating progressive large-scale movements in block rock mechanics. *Proceedings of the symposium of the international society of rock mechanics*, 1:132–150, 1971.
- [7] Y. FENG, K. HAN, C. LI et D. OWEN : Discrete thermal element modeling of heat conduction in particle systems: Basic formulations. *Journal of Computational Physics*, 2227:5072–5089, 2008.
- [8] H-W. ZHANG, Q. ZHOU and H-L. XING et H. MUHLHAUS : A DEM study of the effective thermal conductivity of granular assemblies. *Powder Technology*, 205:172–183, 2011.

- [9] M. HAHN, T. WALLMERSPERGER et B. KROPLIN : Discrete element representation for the thermal field: Proof of concept and determination of the material parameters. *Computational Materials Science*, 50 (10):2771–2784, 2010.
- [10] I. TERREROS, I. IORDANOFF et J-L. CHARLES : Simulation of continuum heat conduction using dem domains. *Computational Materials Science*, 69:46–52, 2013.
- [11] W. LECLERC, H. HADDAD et M. GUESSASMA : On a discrete element method to simulate thermal-induced damage in 2d composite materials. *Computers & Structures*, 196:277 – 291, 2018.
- [12] H. HADDAD, M. GUESSASMA et J. FORTIN : Heat transfer by conduction using DEM-FEM coupling method. *Computational Materials Science*, 81:339–347, 2014.
- [13] H. HADDAD, W. LECLERC et M. GUESSASMA : Application of the discrete element method to study heat transfer by conduction in particulate composite materials. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 26-085010, 2018.
- [14] W. LECLERC, N. FERGUEN, C. PÉLEGRIS, E. BELLENGER, M. GUESSASMA et H. HADDAD : An efficient numerical model for investigating the effects of anisotropy on the effective thermal conductivity of alumina/al composites. *Advances in Engineering software*, 77:1–12, 2014.
- [15] A. DONEV, I. CISSÉ, D. SACHS, E-A. VARIANO, F-H. STILLINGER, R. CONNELLY, S. TORQUATO et P-M. CHAIKIN : Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids. *Science*, 303:990–993, 2004.
- [16] D. MOUKADIRI, W. LECLERC, M. GUESSASMA, E. BELLENGER et F. DRUESNE : Contrôle de la dispersion du champ de contrainte par une approche basée sur le halo pour la modélisation 3D par Éléments Discrets d’un composite biosourcé. In *14^{ème} Colloque National en Calcul des Structures (CSMA), 13-17 Mai 2019, Presqu’île de Giens (Var)*, 2019.
- [17] B. WEIGAND : *Analytical Methods for Heat Transfer and Fluid Flow Problems*. 2004.