

Effet des propriétés dissipatives des Alliages à Mémoire de Forme (AMF) de type NiTiInol sur le pouvoir amortissement intrinsèque de poutres AMF

G. HELBERT^a, T. LAPINA^b, M. EVARD^b, A. VOLKOV^b, S. ARBAB CHIRANI^a

a. ENIB, UMR CNRS 6027, IRDL, F-29200, Brest, France

b. Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation

Résumé :

Les Alliages à Mémoire de Forme (AMF) sont connus pour leurs propriétés remarquables (pseudo-élasticité, pseudo-plasticité, effet mémoire...) obtenues grâce à la transformation martensitique réversible depuis la phase austénitique. Par ailleurs, les AMF offrent une capacité d'amortissement de diverses origines : un faible pouvoir amortissement dans la phase austénitique, un pouvoir non négligeable au sein de la phase martensitique (du fait des frictions entre les différentes variantes de martensite) et un pouvoir significatif lors de la transformation de phase. Ainsi, les AMF de la famille des NiTiInol ont démontré une grande capacité à contrôler les vibrations mécaniques au sein de structures de Génie Civil ou Aéronautiques. De plus, ces matériaux sont particulièrement intéressants grâce à leur raideur modérée et à leur tendance à recouvrir leur forme initiale lorsqu'ils possèdent un comportement pseudo-élastique à température ambiante, afin de ne pas engendrer d'efforts supplémentaires sur la structure destinée à être protégée.

De nombreuses études du pouvoir amortissant des AMF ont été inspirées des travaux portant sur les matériaux viscoélastiques. Des bilans énergétiques sur une boucle d'hystérésis pseudo-élastique d'un AMF ont conduit à différentes relations de la littérature donnant le facteur de perte (directement lié au pouvoir amortissant). Toutes mettent en jeu l'énergie dissipée (aire de la boucle) et l'énergie de déformation de transformation (aire sous la boucle). Quoi qu'il en soit, la prédiction du pouvoir amortissant nécessite la prise en compte des effets de vitesse. En effet, la combinaison des caractères exo et endothermiques des transformations martensitiques directes et inverses, respectivement, et de la thermo-dépendance des contraintes seuils de début de transformation rendent le comportement du matériau dépendant du temps à travers les échanges thermiques effectués avec son environnement. Ainsi, une meilleure prédiction du pouvoir amortissant des AMF, qui est nécessaire à l'amélioration et à l'optimisation des dispositifs amortisseurs actuels et futurs, repose sur une meilleure compréhension des mécanismes d'amortissement en jeu ainsi que sur le développement d'outils numériques prédictifs.

Dans ce travail, une étude numérique du pouvoir amortissant des NiTiInol est menée par l'intermédiaire de l'analyse d'une poutre pré-tendue soumise à un régime d'oscillations libres axiales (traction) ou transversales (flexion). Une simulation par éléments finis mettant en jeu des éléments poutres multi-fibres thermo-mécaniques (basés sur la formulation d'Euler-Bernoulli) a été développée. Une loi de comportement thermo-mécanique pseudo-élastique est utilisée pour l'intégration locale. Finalement, l'outil numérique développé permet (i) d'illustrer le grand potentiel de ces matériaux à amortir les vibrations mécaniques, (ii) d'évaluer les contributions respectives de l'énergie de dissipation intrinsèque

et des couplages thermo-mécaniques sur leur pouvoir amortissant, (iii) de mettre en évidence le rôle de la température du matériau et de son hétérogénéité au sein de la structure sur les performances dissipatives et (iv) de lier les énergies mises en jeu à la réponse dynamique de la structure en vibration.

Mots clefs : Alliages à Mémoire de Formes, pseudo-élasticité, vibrations, amortissement, dissipation, Éléments Finis

Abstract :

Shape memory alloys (SMA) are known for their remarkable properties (pseudoelasticity, shape memory effect, pseudoplasticity, etc.) due to a reversible transformation from the parent austenite phase to the martensite phase. Furthermore, SMA offer vast possibilities of vibration damping : a low damping capacity in the austenitic state, a rather high damping capacity in the martensite phase (due to the high density of mobile inter-domain boundaries) and a high damping capacity due to the motion of the inter-phase boundaries during the transformation. Thus, near equiatomic NiTi-based SMA demonstrate their ability to control vibrations of SMA-based Civil Engineering and Aerospace structures. These alloys are even more attractive thanks to their relatively high strength and capacity to recover the initial position. Some investigations on SMA damping capacity were inspired by studies on viscoelastic materials but for SMA one must distinguish between the amplitude independent internal friction and the energy losses due to the mechanical and phase hysteresis. The energy balance formulation for a pseudoelastic SMA under vibrations drives to different relations involving the dissipated energy (hysteresis loop area), the transformation strain energy (area under the forward transformation curve) and the loss factor directly related to damping capacity. Besides, predicting the damping power requires taking into account strain rate effects due to the diffusion of the latent heat released during the transformation, making the material behavior time-dependent. Indeed, the heat release leads to the temperature variation while the phase yield stress is dependent on temperature. Thus, a better prediction of the SMA damping capacity, which is necessary to improve and to optimize present and future damping devices, requires better understanding of the mechanisms of damping in SMA.

In this work a predictive numerical investigation of the SMA damping capacity is proposed by studying the free vibration of a pretensioned SMA beam submitted to axial (tension) and transverse vibrations (bending). A finite element simulation has been developed involving multi-fibers thermo-mechanical beam elements (based on the Euler-Bernoulli formulation). A fully thermo-mechanically coupled pseudoelastic law taking into account dissipation and thermo-mechanical coupling is used for local integration. Thus, the developed of numerical tool enables to (i) illustrate the high potential of SMA for damping applications, (ii) to investigate the contribution of thermal dissipation and thermo-mechanical coupling on damping, (iii) to evaluate the role of testing temperature in damping properties and (iv) to link the dissipated energy to the dynamic response of a SMA structure.

Key-words : Shape Memory Alloys, pseudoelasticity, vibrations, damping, dissipation, Finite Elements.

1 Introduction

Le pouvoir amortissant d'un matériau est sa capacité à dissiper l'énergie mécanique sous forme de chaleur. Les performances de dissipation d'énergie du NiTi sont dues à son comportement hystérétique associé à sa propriété remarquable de pseudo-élasticité (ou superélasticité). Couplé à un système vibrant, un tel matériau s'avère être un candidat idéal dans l'amortissement de vibrations mécaniques ou dans l'absorption d'énergie lors de chocs [1]. Le pouvoir amortissant d'un tel alliage est fonction de sa micro-structure et en particulier de sa phase [2] :

- A l'état austénitique, les frottements internes sont les plus faibles, du fait d'un processus de mise en ordre dynamique des défauts dont la densité est relativement faible.
- Le pouvoir amortissant à l'état martensitique, relativement important, est lié au mouvement réversible des interfaces entre les variantes de martensite permettant les frottements internes.
- Lors de la transformation de phases austéno-martensitique, le pouvoir amortissant repose alors sur le mouvement des interfaces austénite/martensite et est significativement plus grand que les deux effets mentionnés précédemment.

Selon Ungar et Kerwin [3], le facteur de perte η (proportionnel au taux d'amortissement intrinsèque ξ) d'une structure associée à un comportement hystérétique se calcule à partir de l'équation 1.

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{D}{W^*} = 2\xi \quad (1)$$

Où D représente l'énergie dissipée sur un cycle (par unité de volume), généralement assimilée à l'aire de la boucle d'hystérésis ΔW . En revanche, la définition de W^* est ambiguë et peut représenter :

- l'énergie cinétique plus l'énergie de déformation à tout instant,
- l'énergie cinétique calculée à valeur de contrainte nulle,
- l'énergie cinétique calculée à valeur de déformation nulle,
- l'énergie de déformation calculée à valeur de contrainte maximale,
- l'énergie de déformation calculée à valeur de déformation maximale.

Ainsi, Piedbœuf et al. ont proposé une relation reliant l'énergie dissipée ΔW (aire de la boucle d'hystérésis) avec l'énergie de déformation maximale W (aire sous la courbe lors de la transformation directe) et le facteur de perte (cf figure 2) [4] :

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W - \frac{1}{2}\Delta W} \quad (2)$$

En revanche, Atli a préféré la relation suivante dans [5] :

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{W} \quad (3)$$

Par ailleurs, la forme locale de la conservation de l'énergie ($\dot{e} = \dot{\psi} + \dot{T}s + T\dot{s}$) et l'énergie libre retenue nous permettent d'écrire l'équation de la chaleur sous la forme locale suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc}
\rho C\dot{T} & + & \text{div } \vec{g} & = & \Delta & + & r & + & P_{tmc} \\
\text{taux d'absorption} & & \text{diffusion} & & \text{dissipation} & & \text{sources de chaleur} & & \text{termes de couplages} \\
\text{et désorption de chaleur} & & \text{thermique} & & \text{intrinsèque} & & \text{volumique} & & \text{thermo-mécaniques}
\end{array}
\tag{4}$$

Cette relation permet de déduire l'énergie de déformation sur un "cycle" au cours d'un chargement uniaxial :

$$W_{def}^{cycle} = \int_{cycle} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} dt = \int_{cycle} \Delta dt + \int_{cycle} (\rho \dot{e} - \rho C\dot{T} + P_{tmc}) dt
\tag{5}$$

Cette relation permet de montrer que l'énergie de déformation est non seulement fonction de la dissipation d'énergie, mais aussi des termes associés aux couplages thermo-mécaniques et aux variations d'énergie interne.

Ces différentes remarques soulèvent de nombreuses questions. On se propose dans ce qui suit de mettre en œuvre un outil numérique permettant d'évaluer et d'analyser le pouvoir amortissant d'une structure en fonction du comportement thermo-mécanique du matériau. En particulier, on souhaite :

- (i) illustrer le grand potentiel de ces matériaux à amortir les vibrations mécaniques,
- (ii) évaluer les contributions respectives de l'énergie de dissipation intrinsèque et des couplages thermo-mécaniques sur leur pouvoir amortissant,
- (iii) mettre en évidence le rôle de la température du matériau et de son hétérogénéité au sein de la structure sur les performances dissipatives,
- (iv) lier les énergies mises en jeu à la réponse dynamique de la structure en vibration

2 Modèle vibratoire

On se propose donc de mettre en œuvre un modèle de vibration d'une poutre d'AMF dans le plan, afin de prédire numériquement le pouvoir amortissant du matériau. Un modèle thermo-mécanique est nécessaire afin de prendre en compte les effets de vitesse inhérents au matériau utilisé. La résolution du problème mécanique sera réalisée par la méthode des Éléments Finis, tandis que la partie thermique sera traitée en parallèle et de façon couplée par la méthode des Différences Finis.

2.1 Modèle d'Éléments Finis

La structure poutre sera divisée en 20 éléments de type "poutre à 2 nœuds" formulés selon la théorie d'Euler-Bernoulli et possédant chacune 6 degrés de libertés $\{u\}^T = \{u_i, v_i, \theta_{z,i}, u_j, v_j, \theta_{z,j}\}$. Ainsi, le champ de déplacement $\{U_s\}$ sur la fibre neutre de l'élément est donnée à partir de la matrice des fonctions d'interpolation $[N]$:

$$\{U_s\} = \{u_s, v_s, \theta_{z,s}\}^T = [N] \{u\} = [N] \{u_i, v_i, \theta_{z,i}, u_j, v_j, \theta_{z,j}\}^T
\tag{6}$$

Le champ de déformation axiale en chaque point matériel de la poutre est fonction de la distance y de celui-ci par rapport à la "fibre neutre" (relation (7)). L'une des méthodes consiste à discrétiser chaque élément en fibres, afin d'intégrer le comportement matériau "localement" [6].

$$\varepsilon(x, y) = u'_s(x) - y\theta'_{z,s}(x) \quad (7)$$

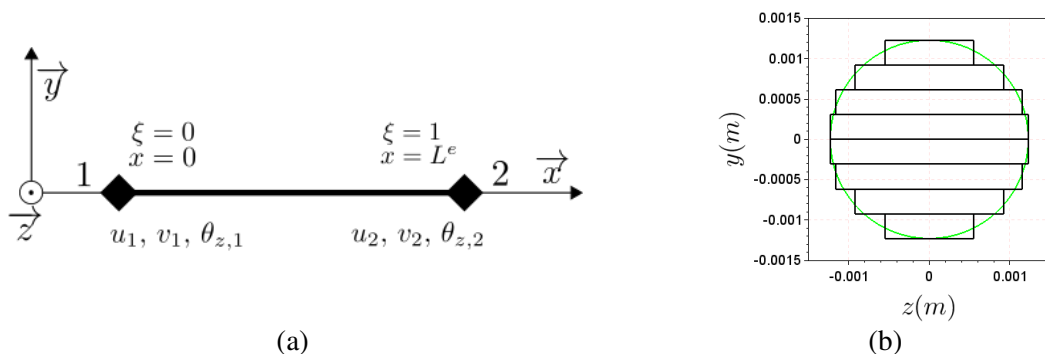


FIGURE 1 – (a) Élément poutre à 2 nœuds (2D); (b) Discrétisation d'une poutre de section circulaire en 8 fibres

L'écriture du Principe des Travaux Virtuels sur un élément conduit à l'équation d'équilibre (8), donnée sous forme incrémentale, afin de tenir compte du comportement non-linéaire de la structure.

$$[M_e] \{\Delta \ddot{u}_e\} + ([K_e(\{u_e\})] + [K_{g,e}(T)]) \{\Delta u_e\} - \{\Delta F_{th,e}\} = \{\Delta F_e\} + \{\Delta F_{n,e}\} \quad (8)$$

Avec $[M_e]$ la matrice de masse, $[K_e]$ la matrice de rigidité et $[K_{g,e}]$ la matrice de rigidité "géométrique" tenant compte du couplage entre la pré-tension du câble T et sa raideur en flexion. Avec $\{\Delta F_e\}$ le vecteur incrémental des efforts linéiques (poids réparti), $\{\Delta F_{n,e}\}$ le vecteur incrémental des efforts exercés aux nœuds et $\{\Delta F_{th,e}\}$ le vecteur incrémental des efforts induits par les couplages thermo-élastiques et thermo-mécaniques du matériau. Pour chaque élément e , la détermination des termes se fera par intégration sur l'ensemble des fibres f contenues dans l'élément.

Deux résultats de simulations sont présentés dans ce qui suit :

1. Vibration axiale libre d'une poutre mono-encastree (solicitations de traction-compression alternées) : la contrainte axiale est homogène dans la section (hors effets thermiques), mais l'amortissement est très important et les fréquences de sollicitation élevées ce qui en fait un cas difficile à traiter par l'expérience.
2. Vibration transversale libre d'une poutre mono-encastree (solicitations de flexion) : cas qui peut être étudié expérimentalement, mais difficile à interpréter du fait d'une contrainte axiale hétérogène dans la section de la poutre.

Les deux simulations consistent en un allongement ou une déviation transversale de la poutre suivie du lâché. La phase précédant le lâché sera considérée isotherme (ie à vitesse très lente) afin de ne pas introduire un biais supplémentaire, soit l'effet de la température initiale. Le déplacement de l'extrémité libre sera présenté dans les deux configurations, ainsi que le comportement thermo-mécanique de l'élément encastree (fibre inférieure).

2.2 Modèle de comportement du matériau

Compte-tenu du modèle de poutre utilisé, l'intégration du comportement sous chargement uniaxial (σ_{xx} seule composante non nulle du tenseur des contraintes) se réduit à 1D. La décomposition de la déformation, pour un élément e donné et une fibre f donnée, s'écrit :

$$\varepsilon_{e,f} = \varepsilon_{e,f}^{el} + \varepsilon_{e,f}^{tr,M} + \varepsilon_{e,f}^{th} = E^{-1}\sigma_{e,f} + \gamma^M z_{e,f}^M + \alpha\theta_{e,f} \quad (9)$$

Avec, E le module d'Young pris constant, $\sigma_{e,f}$ la contrainte axiale, $\varepsilon_{e,f}^{tr,M}$ la déformation de transformation, $\varepsilon_{e,f}^{th}$ la déformation thermique, $z_{e,f}^M$ la fraction volumique de martensite, γ^M un paramètre matériau, α le coefficient de dilatation thermique et $\theta_{e,f}$ la variation de température par rapport à la température ambiante.

Le modèle proposé est basé sur des surfaces de charge, $f_{1,e,f}^M$ et $f_{2,e,f}^M$, décrivant les transformations directe et inverse, respectivement :

$$f_{1,e,f}^M = |\sigma_{e,f}| - (M(z_{e,f}^M) + \sigma_0^M(T_{e,f})) \quad (10)$$

$$f_{2,e,f}^M = |\sigma_{e,f} - X_{e,f}(z_{e,f}^M)| - (M(z_{e,f}^M) + \sigma_0^M(T_{e,f})) \quad (11)$$

Avec $\sigma_0^M(T_{e,f})$ la contrainte limite de transformation fonction de la température $T_{e,f}$, $M(z_{e,f}^M)$ est le pseudo-écrouissage isotrope et $X_{e,f}(z_{e,f}^M)$ est le pseudo-écrouissage cinématique. La forme de ces derniers sera prise la plus simple possible (fonctions linéaires de $z_{e,f}^M$), afin de faciliter autant que possible l'interprétation.

La loi de normalité fournit la cinétique de transformation permettant de maximiser le travail associé à la transformation martensitique. L'incrément de chaleur volumique apporté par le matériau, qui sera utilisé dans la résolution du problème thermique, se déduit de la forme d'énergie libre retenue :

$$\dot{q}_{e,f} = \underbrace{\gamma^M \left(\pi_{e,f}^{tr,M} \dot{z}_{e,f}^M - \dot{H}_{e,f}^{tr,M} \right)}_{\text{dissipation}} + \underbrace{\gamma^M \mu_{e,f}^M T_{e,f} \dot{z}_{e,f}^M}_{\text{couplages thermo-mécaniques}} - \underbrace{E\alpha T_{e,f} \left(\frac{\dot{\sigma}_{e,f}}{E} \right)}_{\text{couplages thermo-élastiques}} \quad (12)$$

Avec $H_{e,f}^{tr,M}$ l'énergie stockée récupérable, $\pi_{e,f}^{tr,M}$ la force thermodynamique dérivée de $\varepsilon_{e,f}^{tr,M}$. La figure 2 décrit les paramètres et variables mises en jeu dans la loi de comportement, sur l'exemple du comportement pseudo-élastique de l'alliage considéré sous chargement isotherme.

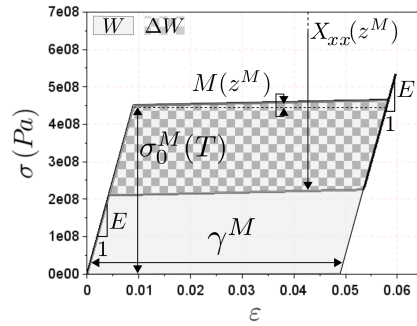


FIGURE 2 – Description des variables et paramètres matériaux de la loi de comportement

Les figures 3-(a)-(b)-(c) présentent l'effet de la vitesse de déformation imposée sur le comportement à l'échelle du VER (approche 0D), tandis que les figures 4-(a)-(b)-(c) présentent l'évolution de la température associée au sein du VER.

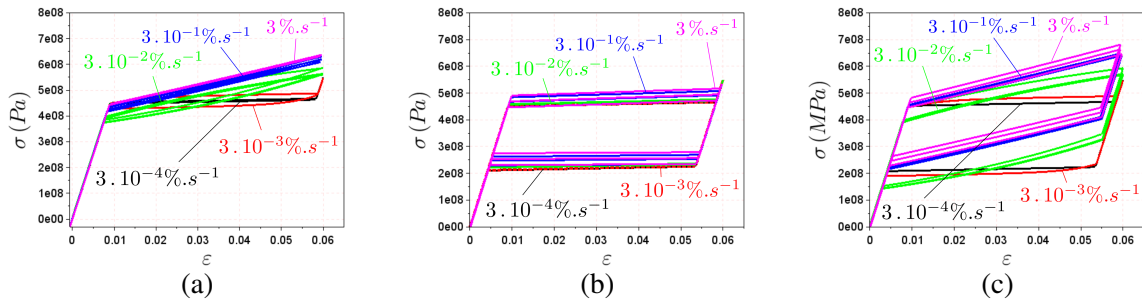


FIGURE 3 – Comportement superélastique (a) Couplages thermo-mécaniques seulement ; (b) Dissipation seulement ; (c) Dissipation et couplages thermo-mécaniques

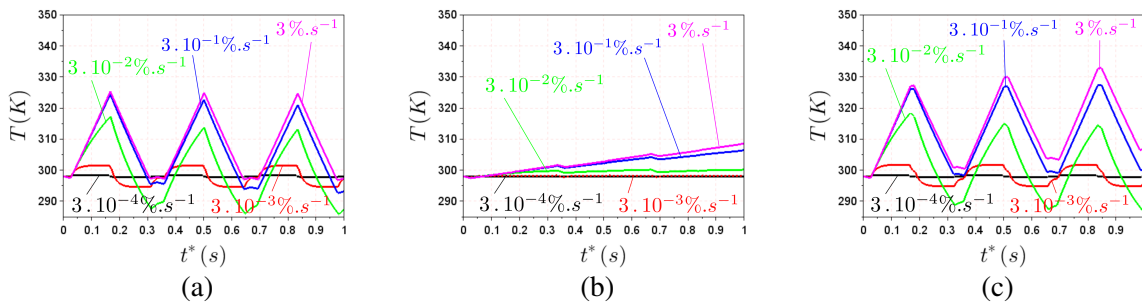


FIGURE 4 – Évolution de la température (a) Couplages thermo-mécaniques seulement ; (b) Dissipation seulement ; (c) Dissipation et couplages thermo-mécaniques

Les effets de vitesse de sollicitation sont en fait directement liés aux effets thermiques du matériau. Les courbes présentées illustrent les effets découplés de la dissipation et des couplages thermo-mécaniques puis le résultat du couplage des deux phénomènes. La compétition entre les couplages thermo-mécaniques et les transferts thermiques entre le matériau et son environnement se traduit par une évolution non monotone de l'aire de la boucle d'hystérésis. L'effet de la dissipation conduit à une augmentation de la température en moyenne pour des vitesses de déformation élevées [7].

3 Résultats et discussions

Pour chacune des deux simulations proposées, cinq configurations seront comparées : (i) Matériau purement élastique (*EL*), (ii) Matériau tenant compte des couplages thermo-mécaniques (*CTM*), (iii) Matériau tenant compte de la dissipation (*D*), (iv) Matériau tenant compte des couplages thermo-mécaniques et de la dissipation (*CTM + D*), (v) Matériau ne tenant pas compte des effets thermiques (*MECA*). A l'exception de cette dernière, l'ensemble des configurations prennent en compte les couplages thermo-élastiques.

3.1 Vibration axiale

Les figures 5-(a)-(b)-(c) et 6-(a)-(b) comparent les différentes configurations dans le cas d'une vibration axiale.

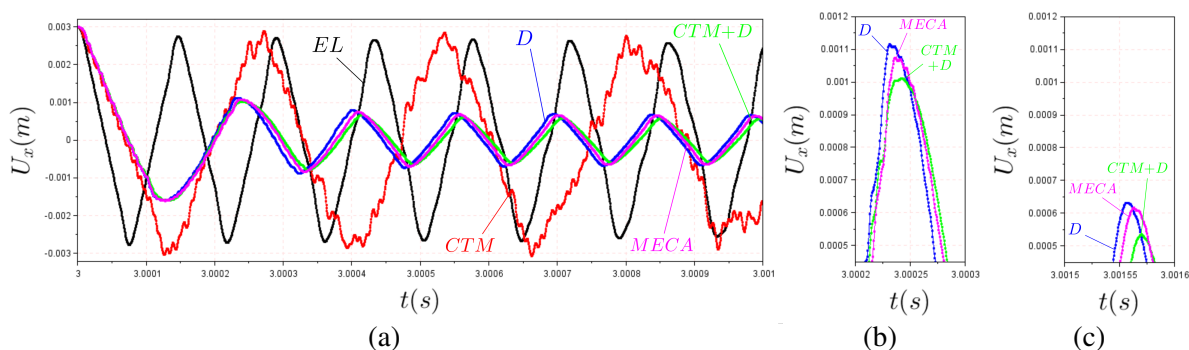


FIGURE 5 – Vibration axiale en régime libre (a) Déplacement de l'extrémité libre de charge ; (b) zoom 1 ; (c) zoom 2

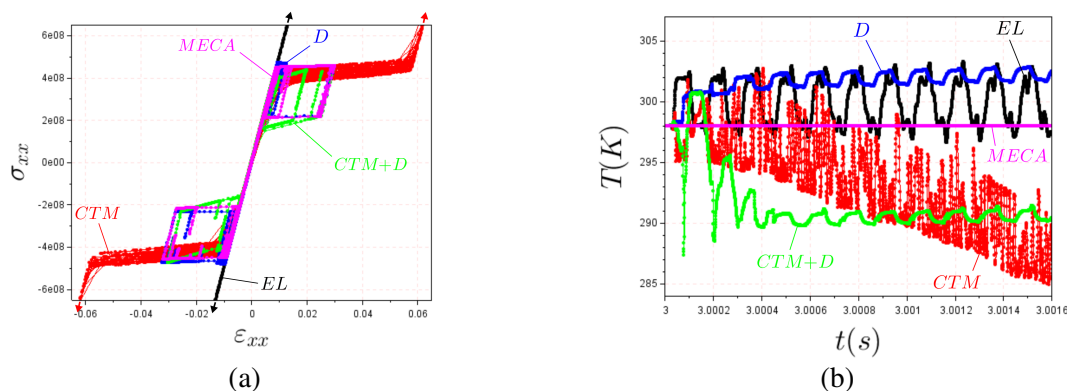


FIGURE 6 – Vibration axiale en régime libre (a) Comportement mécanique de l'élément encasté (fibre inférieure) ; (b) Évolution de la température de ce même élément

Le cas de référence démontre une absence d'amortissement en l'absence de source de dissipation (comportement purement élastique). La vitesse de déformation est ici comprise entre 10^4 et $10^5 \%$. s^{-1} , ce qui correspond à des valeurs où les couplages thermo-mécaniques pris seuls se traduisent par une aire de boucle d'hystérésis nulle. En effet, la contribution des couplages thermo-mécaniques dans le pouvoir amortissant du matériau est largement négligeable devant celle de la dissipation intrinsèque du matériau.

La non prise en compte des effets thermiques conduit à une prédiction de l'amortissement très proche de la configuration tenant compte de tous ces phénomènes. En effet, cette dernière est affectée par deux effets aux conséquences opposées : les variations de température diminuent ΔW , tandis que l'évolution de la température moyenne diminue W .

3.2 Vibration transversale

Les figures 7 et 3.2-(a)-(b) comparent les différentes configurations dans le cas d'une vibration transversale.

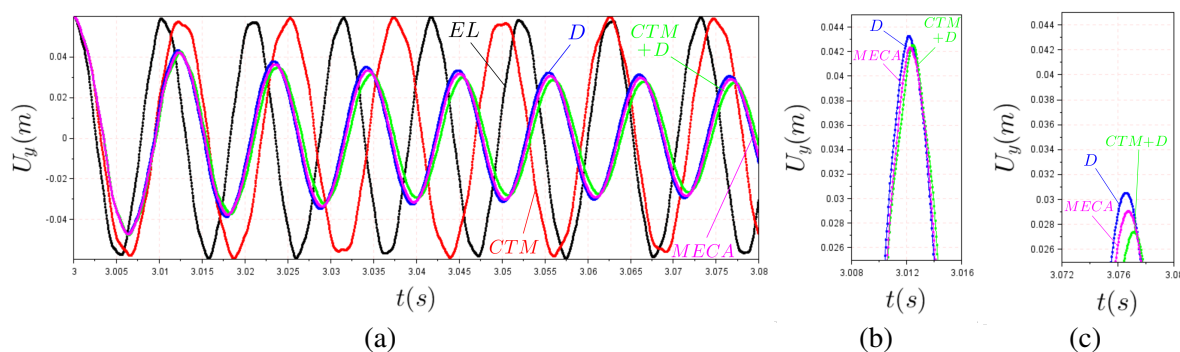


FIGURE 7 – Vibration transversale en régime libre : déplacement de l'extrémité libre de charge

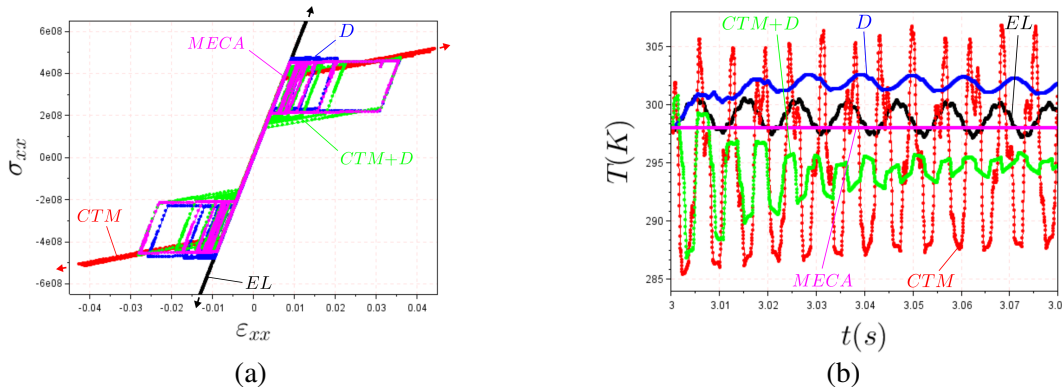


FIGURE 8 – Vibration transversale en régime libre (a) Comportement mécanique de l'élément encastré (fibre inférieure) ; (b) Évolution de la température de ce même élément

Les résultats observés conduisent à des conclusions semblables au cas de la vibration axiale. En effet, la vitesse de déformation est ici comprise entre 10^2 et $10^3\% \cdot s^{-1}$ (configuration quasi adiabatique). En revanche, la prise en compte des effets thermiques s'avère plus significative ici compte tenu d'une évolution en moyenne de la température plus proche de la température initiale que précédemment : l'évolution de ΔW n'est donc plus tout à fait compensée par celle de W .

4 Conclusion

Dans cet article, un modèle d'Éléments Finis permettant d'évaluer les capacités d'amortissement des AMF de type NiTi a été développé. Ainsi, l'introduction d'une loi de comportement pseudo-élastique

se traduit directement par un fort pouvoir amortissant. Par ailleurs, ce modèle permet de tenir compte des divers effets thermiques et des conséquences sur la réponse dynamique de la structure considérée. Bien que les deux configurations présentées démontrent que la non prise en compte des effets thermiques n'est pas critique, il est clair que ce phénomène ne peut être négligé systématiquement. Finalement, cette étude démontre la difficulté de déterminer les propriétés intrinsèques des AMF de la famille des NiTiInol, à travers des essais quasi-statiques, comme il est généralement d'usage tant les conditions d'essais sont différentes.

Par la suite, l'amélioration du modèle est envisagée par la prise en compte des boucles d'hystérésis internes, des transformations vers la phase intermédiaire (R-phase), des effets de localisation de la transformation martensitique et du cisaillement au sein de la poutre (formulation de Timoshenko). Cette nouvelle version devra être validée par l'expérience en confrontant les résultats à ceux obtenus sur un banc de vibration en cours de développement. En revanche, il est préférable de conserver une version simplifiée du modèle afin de réaliser une mesure fine du facteur de perte via les signaux vibratoires à comparer avec celle obtenue via la réponse du matériau.

De plus, une analyse complémentaire de la réponse thermo-mécanique du matériau sous sollicitations harmoniques forcées (type analyse mécanique dynamique ou DMA couplée à des mesures d'auto-échauffement) est envisagée.

Références

- [1] P. H. Leo, T. W. Shield, P. Bruno, Transient heat transfer effects on the pseudoelastic behavior of shape-memory wires, *Acta Metallurgica et Materialia*, 41 (1993) 2477–2485.
- [2] F. Déborde, V. Pelosin, A. Rivière, Phase transformation in NiTi studied by isothermal mechanical spectrometry, *Scripta Metallurgica et Materialia*, 33 (1995) 1993–1998,
- [3] E. E. Ungar, E. M. Kerwin, Loss factors of Viscoelastic Systems in Terms of Energy Concepts, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34 (1962) 954–957.
- [4] M. C. Piedboeuf, R. Gauvin, M. Thomas, Damping behaviour of shape memory alloys : strain amplitude, frequency and temperature effects, *Journal of Sound and Vibration*, 214 (1998) 895–901.
- [5] K. C. Atli, The effect of tensile deformation on the damping capacity of NiTi shape memory alloy, *Journal of Alloys and Compounds*, 679 (2016) 260–267.
- [6] I. Bitar, S. Grange, P. Kotronis, N. Benkemoun, A comparison of displacement-based Timoshenko multi-fiber beams finite element formulations and elasto-plastic applications, *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 22 (2018) 464–490.
- [7] G. Helbert, L. Saint-Sulpice, S. Arbab Chirani, L. Dieng, T. Lecompte, S. Calloch, P. Pilvin, A uniaxial constitutive model for superelastic NiTi SMA including R-phase and martensite transformations and thermal effects, *Smart Materials and Structures*, 26 (2017) 025007