

La saturation de l'instabilité elliptique dans les noyaux planétaires : turbulence d'ondes et instabilités secondaires des vortex géostrophiques

T. Le Reun ^a, D. R. Hewitt ^b

a. Aix-Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, IRPHE UMR 7342, Marseille, France.

lereun@irphe.univ-mrs.fr

b. DAMTP, University of Cambridge, Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WA, UK.

drh39@cam.ac.uk

Résumé : (16 gras)

Encelade est un satellite de glace en orbite autour de Saturne dont les survols par la sonde Cassini ont révélé la présence de panaches de particules de glace et de vapeur d'eau éjectées dans l'espace depuis le pôle Sud. Les analyses géophysiques et géochimiques ont montré que ces panaches sont les témoins d'une activité hydrothermale se produisant sous la croûte de glace de ce satellite. Elle est provoquée par la puissance dissipée par les déformations de marées dans le noyau rocheux et poreux ; l'eau de l'océan interne d'Encelade s'y infiltre et s'en trouve chauffée, elle remonte alors à la surface par un processus de convection. Dans cette étude, nous reprenons le travail de Choblet et al. (Nature Astronomy, 2017) sur l'activité hydrothermale d'Encelade en introduisant un modèle idéalisé de la convection en milieu poreux et ouvert chauffé en volume. Celui-ci nous permet d'étudier en détail la manière dont se structure la convection naturelle, à la fois proche et loin du seuil d'apparition des mouvements. Nous rapportons ici quelques résultats, notamment sur la taille typique des panaches ainsi que l'efficacité du transport de chaleur par l'écoulement. Ces résultats nous permettent notamment de donner une loi d'échelle déterminant le flux de flottabilité la vitesse typique des fluides hydrothermaux. Celle-ci est en accord avec les résultats de Choblet et al. (Nature Astronomy 2017) tout en les généralisant.

Abstract :

Enceladus is an icy satellite orbiting Saturn from which plumes of ice and water vapor are ejected at the South Pole. Geophysical and geochemical analyses have shown that these plumes are proofs of ongoing hydrothermal activity under the icy crust. It is caused by the power dissipated by tidal distortion of porous, rocky core ; as the water of the internal ocean infiltrates the core, its temperature increases and cause its rise through natural convection. In this study, we consider an idealised set-up of the simulations of Choblet et al. (2017) to model convection in a porous and open medium undergoing volume heating. With this idealised model, we investigate in detail the way the flow organises close and far from the onset of convection. We report here a few results, especially on the typical size of the plumes as well as the efficiency of the heat transport by the flow. These results allow in particular to give a scaling law determining the typical hydrothermal buoyancy flux. It is in agreement with and generalises the results of Choblet et al. (Nature Astronomy 2017).

Mots clés : convection, chauffage interne, activité hydrothermale, satellite de glace

Introduction

Encelade est un satellite de glace de Saturne dont les survols par la sonde Cassini ont révélé dès 2005 l'existence de panache de glace et de vapeur d'eau émis dans l'espace depuis sa surface [1]. Ces jets de matières proviennent de l'intérieur du satellite à travers une zone de fracture située au pôle sud, et associée à une anomalie de flux de chaleur de $12.5GW$. Des analyses ultérieures ont révélé que l'eau des particules de glace a précédemment été en contact avec une roche silicatée à une température atteignant $90^\circ C$ [2]. Les panaches d'Encelade sont donc interprétés comme des preuves d'une activité hydrothermale se produisant sous sa croûte de glace.

Les modèles de dynamique interne expliquant une telle activité hydrothermale se basent sur le chauffage dû aux importantes déformations de marées provoquées par Saturne [3]. Les études de gravimétrie de la dynamique de rotation ont amené à proposer qu'Encelade possède sous sa croûte de glace un océan global, sous lequel se trouve un noyau rocheux [4]. Du fait du faible champ de gravité propre de la planète, ce noyau est vraisemblablement peu consolidé et donc poreux [5, 3]. L'eau de l'océan interne d'Encelade peut donc pénétrer le noyau, et subir un chauffage induit par la déformation de marée de la matrice rocheuse tout au long de sa circulation. L'élévation de température subie par l'eau cause sa remontée vers l'océan. Des simulations numériques [3] ont montré que l'écoulement d'eau dans la matrice poreuse se structure en nappes de remontées étroites où la température et la vitesse du fluide sont élevées, offrant ainsi un modèle plausible pour l'activité hydrothermale d'Encelade.

Cependant, les instabilités convectives dues à un chauffage interne dans un milieu poreux saturé ont fait l'objet de peu d'études. Si plusieurs travaux ont été consacrés aux seuils d'instabilités ou au transport de chaleur, principalement dans une visée de prévention des accidents nucléaires [6, 7, 8, 9, 10], il n'existe pas d'étude systématique et quantitative sur la manière dont se structurent les écoulements ainsi créés. La convection dans le noyau d'Encelade présente par ailleurs une spécificité supplémentaire car le milieu poreux est en contact avec un océan. L'eau et la chaleur sont échangées entre ces deux couches dont les propriétés de transport convectif de chaleur sont très différentes. Bien qu'il existe des études sur le couplage entre de telles couches, motivées notamment par le stockage de déchets dans des réservoirs géologiques profonds, ou encore par la solidification des alliages binaires [11, 12, 13], elles restent cependant cantonnées au seuil de la convection naturelle où à la quantification du transfert de chaleur.

Notre travail consiste à décrire quantitativement la convection dans un milieu poreux en contact avec un océan et subissant un chauffage interne à l'aide d'un modèle idéalisé. Notre objectif est de proposer des lois simples sur la manière dont le transport de chaleur s'organise à l'intérieur des satellites de glace en général. Nous espérons ainsi faire le lien entre des études idéalisées de la convection de Rayleigh-Bénard dans les milieux poreux [14, 15, 16] et les simulations complexes des intérieurs planétaires [17, 3].

Un modèle idéalisé

Pour étudier la convection dans un milieu poreux avec chauffage interne et en contact avec un océan, nous considérons le modèle présenté en figure 1. Nous nous concentrons sur le milieu poreux de perméabilité k saturé par un fluide de viscosité μ et de densité ρ . La dynamique de l'océan, dont on note la température

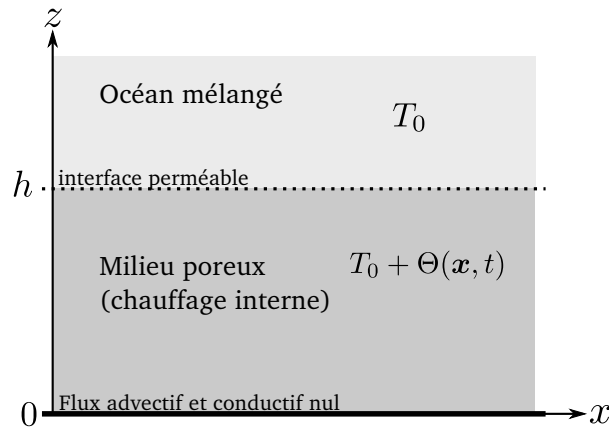


FIGURE 1 – Schéma d'un modèle idéalisé à deux dimensions de l'intérieur d'un satellite de glace subissant un chauffage interne. La limite inférieure du modèle correspond au centre de la planète où on suppose tous les flux nuls. Nous supposons l'océan mélangé et nous modélisons l'interface en laissant libre la vitesse verticale l'interface perméable.

moyenne T_0 , n'est pas incluse dans notre étude, nous la modélisons à travers des conditions aux limites sur le milieu poreux qui seront explicitées plus loin.

Le champ de vitesse $\mathbf{U} = (U, W)$ du fluide dans le milieu poreux obéit à l'équation de Darcy :

$$\mathbf{U} = \frac{k}{\mu} (-\nabla P + \rho \mathbf{g}) \quad (1)$$

où P est le champ de pression et ρ la densité du fluide. Nous incluons les effets de la pesanteur \mathbf{g} que l'on suppose constante. On suppose le fluide incompressible, ce qui donne une contrainte supplémentaire sur le champ de vitesse :

$$\partial_x U + \partial_z W = 0. \quad (2)$$

Nous utilisons l'approximation de Boussinesq pour décrire les effets des variations de température sur la dynamique. Ainsi, en notant α le coefficient d'expansion thermique isobare, et $\Theta = T - T_0$, l'équation de Darcy devient :

$$\mathbf{U} = \frac{k}{\mu} (-\nabla P' + \rho_0 g \alpha \Theta \mathbf{e}_z) \quad (3)$$

avec $P' = P + \rho_0 g z$. La loi de Darcy est couplée à une loi d'advection-diffusion :

$$\partial_t \Theta + \mathbf{U} \cdot \nabla \Theta = \kappa \nabla^2 \Theta + q \quad (4)$$

où κ est la diffusivité de la chaleur à travers le milieu poreux saturé, et q est un terme de production de chaleur due aux marées. Cette production de chaleur est supposée constante : l'orbite d' Encelade étant courte devant les temps dynamiques, seulement la moyenne de la production compte pour le mouvement du fluide.

Pour pouvoir modéliser complètement ce problème, des conditions aux limites sont nécessaires. En $z = 0$, il n'y a ni flux de matière ni flux de chaleur, ainsi :

$$\partial_z \Theta(z = 0) = 0 \quad \text{and} \quad W(z = 0) = 0. \quad (5)$$

Au sommet, la communication entre le milieu poreux et l'océan et libre, nous imposons donc :

$$U(z = h) = 0. \quad (6)$$

Nous devons également modéliser l'évolution de la température à l'interface. Deux options sont possibles : la première consiste à supposer que l'océan est très bien mélangé et donc que la température est imposée en tout point de l'interface $\Theta(z = h) = 0$. Cependant, le flux advectif $W\Theta$ entrant dans l'océan est nul, ce qui ne correspond pas à ce qui se produit au fond des océans terrestres par exemple. Nous pouvons également envisager une condition limite conditionnelle qui suppose que le fluide entrant dans l'océan conserve sa température tandis que le fluide entrant dans le milieu poreux a une température T_0 . Formellement, cette dernière condition revient à :

$$\begin{cases} \text{if } W > 0, \partial_z \Theta(z = h) = 1 \\ \text{else } \Theta(z = h) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Dans ce qui suit, nous appellerons « BC 2 » la condition limite à température imposée et « BC 1 » la condition mixte (7).

Finalement, pour simplifier l'étude de la dynamique, nous souhaitons réduire le nombre de paramètres physiques. Comme dans le problème de Rayleigh-Bénard, il s'avère qu'un seul paramètre de contrôle gouverne le comportement du système ; il s'agit d'un nombre de Rayleigh Ra défini en supposant que l'advection équilibre la production de chaleur :

$$Ra \equiv \left(\frac{k\alpha g}{\kappa\nu} \frac{qh^2}{\kappa} h \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Une fois la température et la vitesse mises à l'échelle par des valeurs typique, *i.e.* en définissant une vitesse typique U^* et une échelle de température $\Delta\Theta$ telles que :

$$\begin{cases} U^{*2} &= \frac{k}{\mu} \rho_0 \alpha g h q \\ \Delta\Theta &= \sqrt{\frac{\mu h q}{k \rho_0 \alpha g}} \end{cases} \quad (9)$$

et en notant $\mathbf{u} = U/U^*$ et $\theta = \Theta/\Delta\Theta$, les équations de la dynamique se réduisent à :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \mathbf{u} &= -\nabla p + \theta \mathbf{e}_z \\ \partial_t \theta + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= Ra^{-1} \nabla^2 \theta + 1 \end{cases} \quad (10)$$

où les longueurs sont normalisées par la hauteur h .

Afin d'étudier la structuration de l'écoulement dans les régimes fortement non-linéaires, c'est-à-dire lorsque Ra atteint des valeurs bien au-dessus du seuil de l'instabilité convective, nous résolvons numériquement ces équations à l'aide du code introduit dans [15].

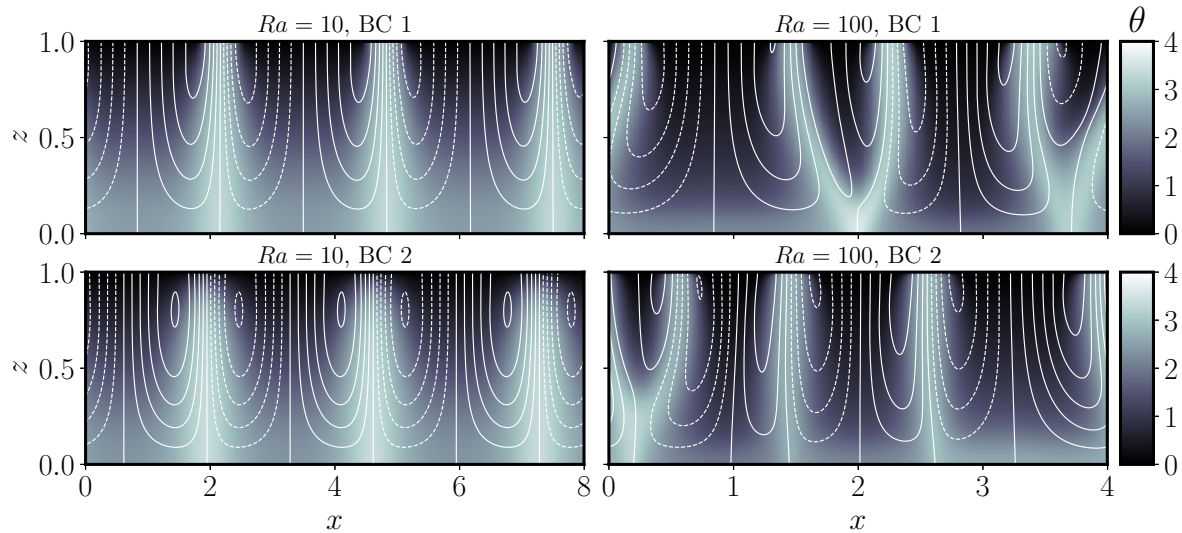


FIGURE 2 – Visualisations du champ de température θ et des lignes de courant de l'écoulement pour $Ra = 10$ (gauche) et $Ra = 100$ (droite), en comparant la condition limite mixte (7) (haut) et la condition de température imposée (bas). Les simulations sont statistiquement à l'équilibre. Pour les deux simulations, la résolution est de 512×300 ($x \times z$) points, et le rapport d'aspect est diminué d'un facteur 2 lorsque Ra est augmenté.

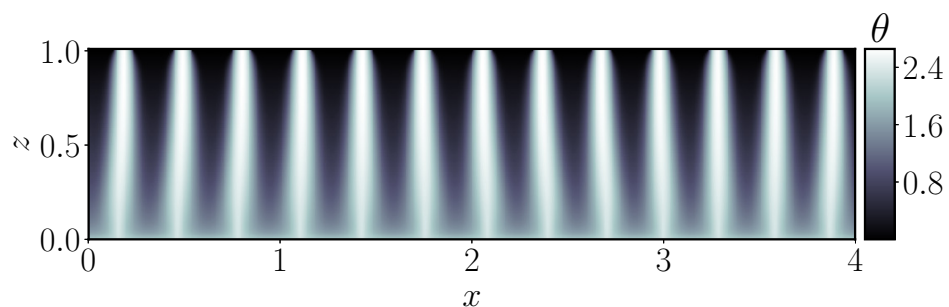


FIGURE 3 – Visualisation du champ de température θ pour $Ra = 1000$ en utilisant la condition limite BC 1. La résolution pour cette simulation est de 1024×300 ($x \times z$).

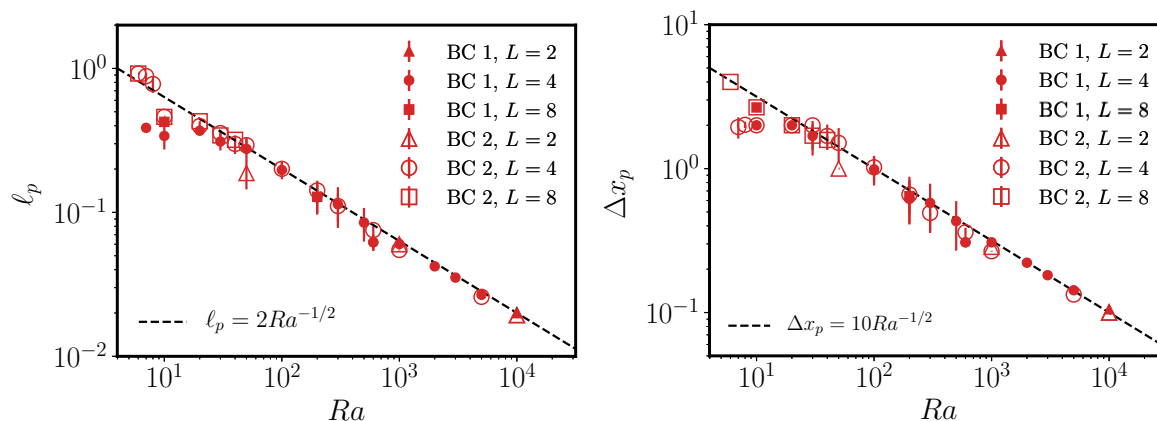


FIGURE 4 – Représentation de la taille typique des panaches ℓ_p (**left**) ainsi que leur séparation moyenne Δx_p (**right**) en fonction du nombre de Rayleigh. Nous présentons le résultats de plusieurs simulations incluant les deux types de condition limite BC 1 et BC 2 ainsi que différentes étendues latérales L du domaine simulé. Les barres d'erreur sont calculées à partir de l'écart-type de ℓ_p et Δx_p sur l'ensemble des séries temporelles issue des simulations.

Structuration de l'écoulement dans les régimes fortement non-linéaires

Sous l'effet du chauffage interne, l'instabilité convective se développe lorsque Ra est supérieur à la valeur critique $Ra = Ra_c \simeq 6$. Nous augmentons progressivement Ra et étudions numériquement la manière dont se structure l'écoulement. Nous illustrons l'organisation de l'écoulement par des visualisations du champ de température et de l'écoulement, représentés pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh Ra en figures 2 et 3.

Aux faibles nombres de Rayleigh $Ra_c \leq Ra \lesssim 40$, l'écoulement atteint un régime stationnaire consistant en quelques rouleaux de convection, et ce, pour les deux types de condition limite BC 1 et BC 2. Au-delà, la convection devient chaotique et l'on observe la compétition entre deux ou trois modes de périodes spatiales différentes. Cette situation cesse lorsque $Ra \gtrsim 600$, du moins lorsque l'étendue latérale du domaine simulé vaut $L = 4$ où l'on retrouve de nouveau un régime stationnaire.

Quel que soit le nombre de Rayleigh Ra , la différence de température moyenne entre le bas et le haut du domaine $\Delta\theta \equiv \bar{\theta}(z=0) - \bar{\theta}(z=1)$ ($\bar{\theta}$ désignant une opération de moyenne horizontale) reste d'ordre $\mathcal{O}(1)$, ce qui indique que l'équilibre entre production de chaleur et advection domine la dynamique. Par ailleurs, la transition vers un état d'équilibre stationnaire à $Ra \gtrsim 600$ se traduit par un abaissement de $\Delta\theta$.

Taille typique des panaches

Afin de mieux caractériser la structuration de l'écoulement, nous étudions la dépendance de la taille typique ℓ_p des panaches chauds ascendant vis-à-vis du nombre de Rayleigh Ra , ainsi que l'évolution de la séparation entre panaches Δx_p . Cette étude est réalisée en mesurant le flux de chaleur traversant l'interface entre le milieu poreux J_t défini comme :

$$J_t(x) = \left(w\theta - \frac{1}{Ra} \frac{\partial\theta}{\partial z} \right) \Big|_{z=1}. \quad (11)$$

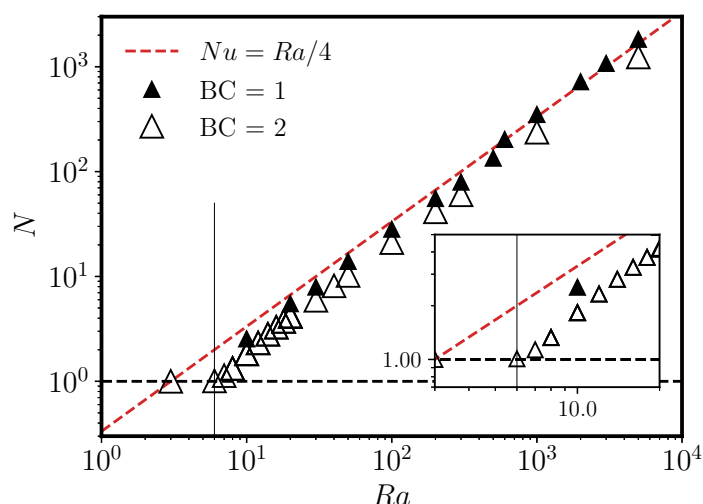


FIGURE 5 – Représentation du nombre diagnostique N quantifiant l'efficacité du transport de chaleur en fonction du nombre de Rayleigh Ra . Nous comparons les deux conditions limites BC 1 et BC 2 pour une extension spatiale du domaine modélisé de $L = 4$. La ligne horizontale $N = 1$ matérialise les cas où le transport est purement diffusif. La ligne verticale indique le nombre de Rayleigh critique. Nous trouvons que N est une loi de puissance de Ra , plus précisément $N \propto Ra$.

Quelle que soit la condition limite en $z = 1$, la quantité J_t est maximale au centre des panaches, et nous mesurons ℓ_p comme la largeur du pic de flux lorsque la moitié de la valeur maximale est atteinte. Δx_p est simplement la distance moyenne séparant deux maxima.

Nous observons que les deux quantités ℓ_p et Δx_p suivent la même loi de puissance en fonction du nombre de Rayleigh : $\ell_p, \Delta x_p \propto Ra^{-1/2}$. Cette loi de puissance traduit un équilibre entre la production de chaleur et la diffusion suivant la direction x .

Quantification du transport de chaleur

Afin de faire le lien avec les études du transport de chaleur par la convection naturelle dans les milieux poreux, nous souhaitons quantifier l'efficacité du transport de chaleur. Cette efficacité est caractérisée dans le problème de Rayleigh-Bénard par le nombre de Nusselt qui compare le flux de chaleur en présence de convection au flux de chaleur diffusif obtenu dans les mêmes conditions, mais en supposant que l'écoulement est nul. Cependant, dans le cas de la convection avec chauffage interne, ce calcul ne caractérise *a priori* pas le transport de chaleur puisque la chaleur évacuée doit correspondre à la chaleur produite quel que soit l'écoulement. Le flux de chaleur ne peut donc pas être augmenté par la présence d'un écoulement.

Pour quantifier l'efficacité du transport, nous avons donc recours à un nombre comparant le flux vertical de chaleur total moyen au flux vertical diffusif moyen. En notant $\langle \bullet \rangle$ l'opération de moyenne sur l'ensemble du domaine modélisé, nous calculons un nombre diagnostique N tel que [18] :

$$N \equiv \frac{\langle w\theta - Ra^{-1}\partial_z\theta \rangle}{-Ra^{-1}\langle \partial_z\theta \rangle} = 1 + Ra \frac{\langle w\theta \rangle}{\Delta\theta} \quad (12)$$

Ce nombre diagnostique N est identique au nombre de Nusselt dans le cas de la convection de Rayleigh-Bénard. Dans le cas présent cependant, puisque la vitesse w , la température θ et l'écart $\Delta\theta$ sont tous

d'ordre 1, on s'attend à ce que $N \propto Ra$.

C'est ce qui est mesuré dans nos simulations, et que nous montrons en figure 12. Cette loi simple est similaire à celle obtenue pour la convection de Rayleigh-Bénard en milieu poreux [14, 15, 16] qui indique que le transport convectif présente les mêmes propriétés dans le cas du chauffage. Cette propriété est inhérente aux milieux poreux. Dans le cas de la convection dans un milieu non-confiné, le chauffage interne donne lieu à un transport de chaleur plus efficace [19].

Conclusion : transposition au cas d'Encelade

Dans cette brève synthèse de nos résultats concernant la convection provoquée par le chauffage interne d'un milieu poreux, nous avons montré que la dynamique ne dépend que d'un paramètre de contrôle, le nombre de Rayleigh Ra , qui est notamment un fonction croissante de la production de chaleur. De manière analogue à l'étude [3], nous avons montré que les panaches deviennent plus étroites lorsque Ra est augmenté. Nous avons également montré que le transport convectif présente la même efficacité en présence d'un chauffage interne que dans le problème de Rayleigh-Bénard.

Nous pouvons utiliser ces résultats pour déterminer les vitesses typiques des écoulements hydrothermaux causés par l'émergence d'eau chaude à l'interface entre le milieu poreux et l'océan. Les simulations tri-dimensionnelles [3, 17, 20] suggèrent que les panaches que nous observons en deux dimensions se structurent sous la forme de nappes. La largeur typique de celles-ci devrait donc suivre une loi de type $Ra^{1/2}$, comme observé ici.

Le flux de flottabilité B_{2d} émergeant au fond de l'océan est défini de la manière suivante [21] :

$$B_{2d} = \int_{\text{panache}} \alpha g (\Theta W)|_{z=h} \quad (13)$$

où l'intégrale est calculée à travers l'extension latérale d'une nappe ascendante, c'est-à-dire sur un domaine de taille typique $\ell_p \propto Ra^{-1/2}$. Nous trouvons finalement la loi suivante sur le flux de flottabilité en fonction de Ra :

$$B_{2d} \simeq \frac{\kappa^2 \nu}{k h} Ra^{3/2} (w\theta)|_{z=h} . \quad (14)$$

Pour estimer une vitesse hydrothermale U_h , nous remarquons que le flux de flottabilité B_{2d} est homogène à une vitesse au cube d'une vitesse, ainsi, $U_h \sim B_{2d}^{1/3}$. En utilisant la plage grandeurs physiques (diffusivité, viscosité, perméabilité, puissance produite par les marées) proposées par [3], nous trouvons que cette vitesse hydrothermale typique reste de l'ordre du centimètre par seconde. Si un tel ordre de grandeur a également été trouvé par [3] par des arguments différents basés sur leurs simulations, notre travail permet de confirmer ce résultat en le généralisant.

Références

- [1] Porco, Helfenstein et al. Cassini Observes the Active South Pole of Enceladus. *Science*, 311(5766) :1393–1401, March 2006.
- [2] Hsu, Postberg et al. Ongoing hydrothermal activities within Enceladus. *Nature*, 519(7542) :207–210, March 2015.
- [3] Choblet, Tobie et al. Powering prolonged hydrothermal activity inside Enceladus. *Nature Astronomy*, page 1, November 2017.

- [4] Thomas, Tajeddine et al. Enceladus's measured physical libration requires a global subsurface ocean. *Icarus*, 264 :37–47, January 2016.
- [5] Roberts. The fluffy core of Enceladus. *Icarus*, 258 :54–66, September 2015.
- [6] Buretta, Berman. Convective Heat Transfer in a Liquid Saturated Porous Layer. *Journal of Applied Mechanics*, 43(2) :249–253, June 1976.
- [7] Nield, Kuznetsov. Onset of Convection with Internal Heating in a Weakly Heterogeneous Porous Medium. *Transport in Porous Media*, 98(3) :543–552, July 2013.
- [8] Hardee, Nilson. Natural Convection in Porous Media with Heat Generation. *Nuclear Science and Engineering*, 63(2) :119–132, June 1977.
- [9] Kulacki, Ramchandani. Hydrodynamic instability in a porous layer saturated with a heat generating fluid. *Wärme- und Stoffübertragung*, 8(3) :179–185, September 1975.
- [10] Fontaine, Wilcock. Two-dimensional numerical models of open-top hydrothermal convection at high Rayleigh and Nusselt numbers : Implications for mid-ocean ridge hydrothermal circulation. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 8(7) :1–17, July 2007.
- [11] Bagchi and Kulacki. *Natural Convection in Superposed Fluid-Porous Layers*. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology. Springer New York, New York, NY, 2014.
- [12] Beckermann, Ramadhyani, and Viskanta. Natural Convection Flow and Heat Transfer Between a Fluid Layer and a Porous Layer Inside a Rectangular Enclosure. *Journal of Heat Transfer*, 109(2) :363, 1987.
- [13] Le Bars and Grae Worster. Interfacial conditions between a pure fluid and a porous medium : implications for binary alloy solidification. *Journal of Fluid Mechanics*, 550(-1) :149, February 2006.
- [14] Otero, Dontcheva et al. High-Rayleigh-number convection in a fluid-saturated porous layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 500 :263–281, January 2004.
- [15] Hewitt, Neufeld, Lister. Ultimate Regime of High Rayleigh Number Convection in a Porous Medium. *Physical Review Letters*, 108(22), May 2012.
- [16] Hewitt, Neufeld, Lister. High Rayleigh number convection in a three-dimensional porous medium. *Journal of Fluid Mechanics*, 748 :879–895, June 2014.
- [17] Monnereau, Dubuffet. Is Io's Mantle Really Molten ? *Icarus*, 158(2) :450–459, August 2002.
- [18] Goluskin. A Family of Convective Models. In *Internally Heated Convection and Rayleigh-Bénard Convection*, SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, pages 1–26. Springer, Cham, 2016.
- [19] Lepot, Aumaître, Gallet. Radiative heating achieves the ultimate regime of thermal convection. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(36) :8937–8941, September 2018.
- [20] Rabinowicz, Boulègues, Genthon. Two- and three-dimensional modeling of hydrothermal convection in the sedimented Middle Valley segment, Juan de Fuca Ridge. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 103(B10) :24045–24065, October 1998.
- [21] Woods. Turbulent Plumes in Nature. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 42(1) :391–412, January 2010.