

Modélisation par éléments finis de l'écoulement dans des filières de coextrusion

L. PLASMAN^a, A. FORTIN^b, J. DETEIX^b

a. GIREF, Département de Mathématiques et de Statistique, Université Laval, Québec.
ludovic.plasman.1@ulaval.ca

b. GIREF, Département de Mathématiques et de Statistique, Université Laval, Québec.

Résumé :

Les matières plastiques sont omniprésentes dans l'industrie et leur comportement pendant leur mise en forme peut s'avérer complexe. Prédire ce comportement à l'aide de simulations numériques permet de réduire substantiellement les coûts de développement de nouveaux produits. Dans ce travail, nous présenterons une méthodologie numérique pour modéliser la production de pièces de géométrie complexe par le procédé de coextrusion.

Abstract :

Polymers are often employed in the industry for the production of complex parts and the behaviour is rather complex. Predicting such a complex behaviour by numerical simulations can substantially reduce the development cost. In this work, we will present a finite element numerical methodology to model and to solve the flow in a coextrusion file.

Mots clefs : fluides non newtonien, éléments finis, adaptation de maillage, coextrusion

1 Introduction

Les fluides viscoplastiques (et même viscoélastiques) possèdent beaucoup d'applications dans l'industrie des polymères et en particulier dans le domaine du pneumatique. Pour les entreprises, pouvoir modéliser, simuler et prédire de manière rapide, efficace et précise les comportements de ces fluides permet de mettre en place plus rapidement et à moindre coût de nouvelles chaînes de production.

Durant la phase de mise en forme de ces matériaux, plusieurs étapes interviennent : la plastification, la mise en forme à l'état fondu, la conformation et le refroidissement. On pourra se référer à Agassant et al [1] pour une description complète. Dans cet article nous nous intéresserons à la mise en forme à l'état fondu et plus spécifiquement au cas de la coextrusion de polymères. Dans ce procédé, plusieurs polymères aux propriétés rhéologiques différentes sont injectés au sein d'une même filière. L'une des principales difficultés est de prédire la position des différentes interfaces qui a une influence fondamentale sur la forme finale et les propriétés mécaniques du produit.

2 Le modèle mathématique

Nous nous intéressons donc aux cas d'écoulements de plusieurs matériaux non newtoniens et non miscibles dans des géométries relativement complexes. Nous considérons pour le moment le cas isotherme. Plusieurs phénomènes sont à modéliser : l'écoulement des différents fluides dans le domaine, la dépendance des matériaux au cisaillement et à la température et la position des interfaces entre les différents matériaux.

Les polymères fondus, aux températures de mise en oeuvre, ont des viscosités élevées pouvant aller jusqu'à dix millions de fois celle de l'eau. Nous sommes donc en présence d'écoulements à très bas nombres de Reynolds et on peut négliger les termes d'inertie devant les termes de viscosité. On peut alors obtenir l'écoulement par résolution d'un problème de Stokes toutefois non linéaire. Pour modéliser la dépendance de chacune des viscosités des différents matériaux au cisaillement nous avons opté pour la loi de Carreau-Yasuda. Pour obtenir la position des interfaces, on transporte une fonction indicatrice ϕ_i valant 1 dans le i -ième fluide et 0 ailleurs. Ces fonctions sont chacune solution d'une équation de convection pure. Toutes les interfaces sont transportées par le champ de vitesse dans le domaine, les rendant dépendantes de la solution du problème de Stokes. Le problème global obtenu s'écrit alors :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (2\eta(\mathbf{u}, \phi_i, T)\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \phi_i = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (1)$$

où \mathbf{u} désigne le vecteur vitesse, $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy, p la pression, et (ϕ_i) la suite de fonctions indicatrices correspondant aux différents matériaux. La viscosité dynamique du i -ième fluide (lié à la fonction de position ϕ_i) est donnée par

$$\eta(\mathbf{u}, \phi_i) = \eta_{i,\infty} + (\eta_{i,0} - \eta_{i,\infty})(1 + (\lambda_i |\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\mathbf{u})|)^{m_i})^{\frac{n_i-1}{m_i}} \quad (2)$$

avec $\eta_{i,0}$ la viscosité à cisaillement nul, $\eta_{i,\infty}$ la viscosité à cisaillement infini, λ_i le temps caractéristique et m_i et n_i des coefficients sans unité. Le modèle de Carreau correspondant à $m_i = 2$ est aussi parfois utilisé.

La présence de plusieurs inconnues rend la matrice éléments finis associée au problème global très coûteuse à résoudre quand le maillage devient fin. Nous avons donc choisi de résoudre séparément chacune des physiques au sein d'une boucle de point fixe. Mais même séparément, chacune des équations possède ses propres difficultés de résolution numérique.

Une autre des conséquences de la forte viscosité des polymères est la pression élevée nécessaire pour assurer l'écoulement dans les filières et les moules à des débits raisonnables, ce qui induit parfois à un mauvais conditionnement de la matrice. Afin de limiter les effets de la forte pression sur le conditionnement, tous les problèmes seront résolus sous forme adimensionnelle. De plus, les lois de Carreau-Yasuda rendent le problème de Stokes hautement non linéaire et dès lors, l'utilisation d'une méthode de continuation sur les paramètres peut s'avérer nécessaire à la convergence du problème de Stokes.

La résolution des équations de convection et de convection-diffusion stationnaire peut présenter des oscillations quand le terme de convection devient dominant devant le terme de diffu-

sion. Afin de contrer ces oscillations, nous avons utilisé la méthode *Streamline-Upwinding/Petrov-Galerkin* développée initialement par N. Brooks et J.R. Hugues [4] et nous avons ajouté une terme de diffusion $-k\nabla \cdot (\nabla\phi_i)$ (k très faible) pour les équations de convection pure.

Aux interfaces entre les différents fluides, les propriétés rhéologiques varient très rapidement. Capturer précisément une telle variation nécessiterait des maillages extrêmement fins rendant la résolution très coûteuse. Afin de réduire le nombre d'éléments nécessaires sans perte de qualité sur la solution nous avons utilisé les outils d'adaptation de maillage hiérarchique développés au GIREF [2, 3] et basés sur un estimateur d'erreur dit hiérarchique. L'une des caractéristiques intéressantes de cette approche est qu'elle est valide pour des approximations éléments finis de degré quelconque.

Enfin, chaque problème matriciel est résolu, pour le moment, à l'aide d'une méthode LU, reconnue pour sa robustesse.

3 Résultats numériques

Afin de tester nos algorithmes, nous nous intéressons à la conception de composantes de pneumatiques et plus spécifiquement à la mise en forme par coextrusion des différentes bandes de caoutchouc qui, une fois assemblées et cuites, constitueront le futur pneu. Les propriétés et performances des pneus comme l'adhérence ou l'usure sont étroitement liées à la répartition des différents matériaux dans les différentes couches du pneu. Il est donc fondamental de contrôler la position des interfaces entre les différents matériaux dans tout l'outillage pendant l'extrusion. De plus ces matériaux présentent un gonflement important en sortie de filière qu'il est important de capturer adéquatement. Il est donc primordial de tenir compte de ce phénomène dans le processus de fabrication.

Nous présentons dans cette partie des résultats de simulation dans une portion symétrique d'une extrudeuse multi-couches supposée pour le moment isotherme et présentant plusieurs entrées et une unique sortie (voir les Figures 1 et 2). La géométrie possédant un plan de symétrie (voir la Figure 3), nous ne considérons donc que la moitié du domaine en imposant des conditions adaptées.

On considère l'injection de deux matériaux (voir le tableau 1), le premier via $\Gamma_{\text{entrée 1}}$ et $\Gamma_{\text{entrée 2}}$ (voir figure 1), le deuxième via $\Gamma_{\text{entrée 3}}$ (voir la Figure 2).

	Matériau 1	Matériau 2
η_{∞} (Pa.s)	100	100
η_0 (Pa.s)	1.73×10^7	6.51×10^6
λ (s)	100	100
n (-)	0.1425	0.1588
m (-)	2	2

TABLE 1 – Les paramètres rhéologiques des matériaux.

Au problème de Stokes (1) s'ajoute alors les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{\text{parois}} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 & \text{sur } \Gamma_{\text{entrée 1}} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_2 & \text{sur } \Gamma_{\text{entrée 2}} \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_3 & \text{sur } \Gamma_{\text{entrée 3}} \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{symétrie}} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{sur } \Gamma_{\text{sortie}} \end{cases} \quad (3)$$

On considère trois équations de transport, une pour chaque entrée auxquelles on ajoute les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \phi_i = 1 & \text{sur } \Gamma_{\text{entrée } i} \\ \phi_i = 0 & \text{sur } \Gamma_{\text{entrée } j} \quad j \neq i \end{cases} \quad (4)$$

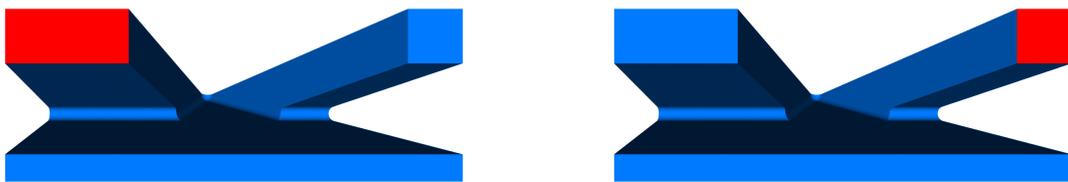


FIGURE 1 – À gauche : $\Gamma_{\text{entrée 1}}$. À droite : $\Gamma_{\text{entrée 2}}$.

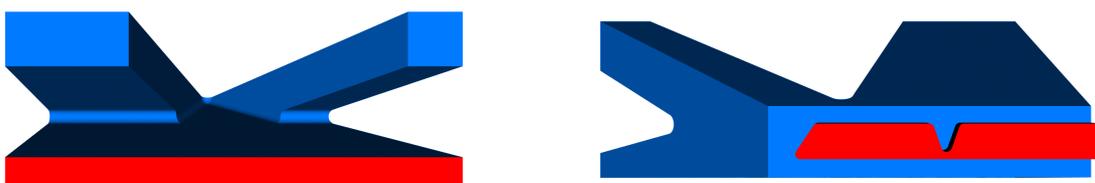


FIGURE 2 – À gauche : $\Gamma_{\text{entrée 3}}$. À droite : Γ_{sortie} .

Sur les figures 4 et 5, on constate que l'adaptation de maillage a permis de diviser par trois le nombre d'éléments dans le maillage et de réduire le coefficient de diffusion k donnant ainsi une interface plus fine et plus précise et un calcul moins coûteux. Pour résoudre avec $k = 10^{-6}$ sur un maillage non adapté, il aurait fallu un maillage beaucoup plus fin, et donc une résolution très coûteuse.

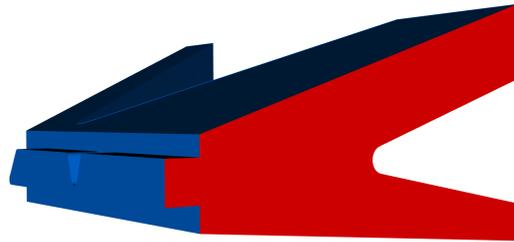
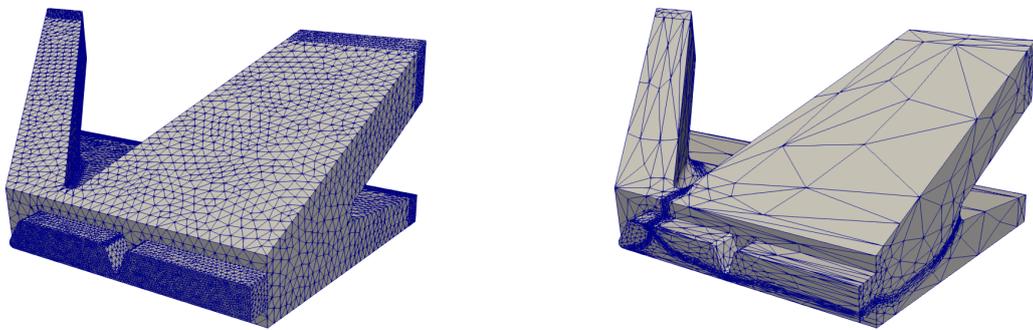
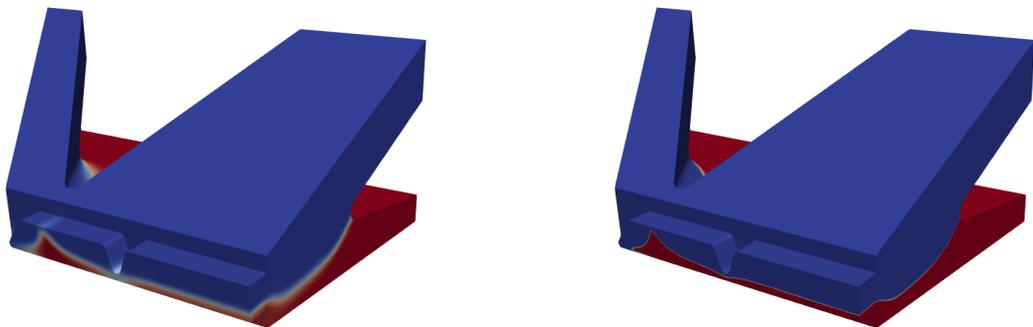
FIGURE 3 – Γ_{symetrie} 

FIGURE 4 – À gauche : maillage initial (184 472 éléments). À droite : maillage adapté (61 582).

FIGURE 5 – Interface (blanc) entre le matériau 1 (bleu) et le matériau 2 (rouge).
À gauche : maillage initial ($k = 10^{-4}$). À droite : maillage adapté ($k = 10^{-6}$).

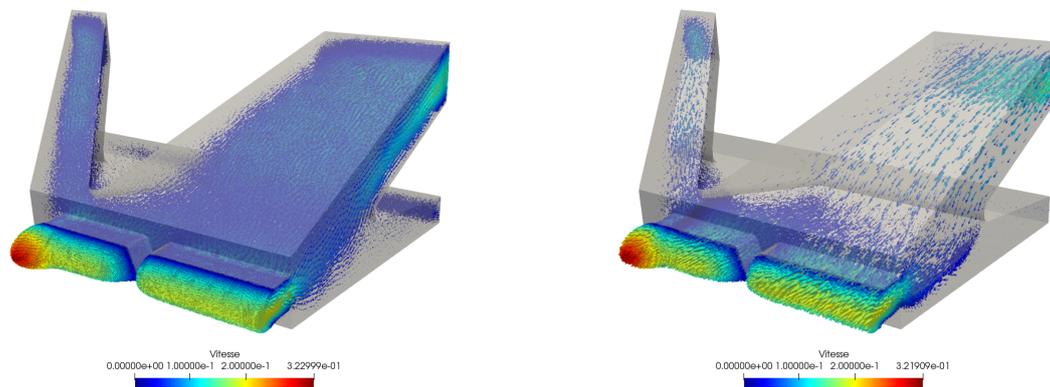


FIGURE 6 – Champ de vitesse dans le domaine. À gauche : maillage initial. À droite : maillage adapté.

4 Conclusions

Nous avons montré que notre méthode permet d'obtenir de bons résultats dans le cas isotherme. Les prochaines étapes seront donc d'ajouter la composante thermique au problème et de complexifier les conditions aux limites par l'introduction de conditions de frottement aux parois solides. Une autre étape sera de remplacer les méthodes de résolution LU par des méthodes itératives. Enfin l'objectif final sera de considérer des fluides visco-élastiques au lieu de fluides visco-plastiques.

Références

- [1] Agassant, J. F., P. Avenas, J. P. Sergent et B. Vergnes: *La mise en forme des matières plastiques*. Technique & Documentation. Lavoisier, 3^e édition, 1996.
- [2] Bois, R., M. Fortin, A. Fortin et A. Couët: *High order optimal anisotropic mesh adaptation using hierarchical elements*. European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique, 21(1-2) :72–91, 2012.
- [3] Briffard, T.: *Contributions à l'adaptation de maillages hiérarchiques*. Thèse de doctorat, Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Québec, Canada, 2017. Dépôt initial mai 2017.
- [4] Hughes, T. J. R. et A. N. Brooks: *A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions. Applications to the streamline upwind procedure*. Dans Gallagher, R. H. (rédacteur) : *Finite element in fluids*, tome IV, pages 47–65. Wiley, London, 1982.