Approche géométrique de la mécanique incrémentale

J. LERBET[a], N. CHALLAMEL[b], F. NICOT[c], F. DARVE[d]

a. LaMME, Univ Evry, Université Paris Saclay, jean.lerbet@univ-evry.fr
b. IRDL, Univ Bretagne Sud, noel.challamel@univ-ubs.fr
c. IRSTEA, Univ Grenoble Alpes, francois.nicot@irstea.fr
d. L3SR, Univ Grenoble Alpes, felix.darve@3sr-grenoble.fr

Résumé :

La mécanique incrémentale est impliquée dans de nombreuses branches de notre discipline (calcul des structures, géomécanique, génie civil, milieux granulaires, . . .). Elle peut être abordée par de nombreux points de vue et traitée avec des outils très variés (milieux continus, milieux discrets, MED, MEF, . . .) tout en introduisant des objets spécifiques à ce type d'évolution. Nous proposons ici d'en présenter un point de vue géométrique. L'objectif est de donner un cadre unificateur de ces évolutions et de proposer une version intrinsèque des outils qu'elle met en œuvre. Pour cela, un cadre naturel est celui de la géométrie des espaces fibrés dont on présentera les éléments fondamentaux et leurs interprétations dans le cadre qui est le nôtre ici. Nous présenterons également l'éclairage géométrique qu'elle peut projeter sur des notions usuelles comme celles de matrice de rigidité tangente ou de stabilité. Ce cadre permet également de projeter un éclairage géométrique sur les relations entre élasticité, hyperélasticité et hypoélasticité. Le cadre général sera celui de la géométrie différentielle en dimension finie.

Abstract :

The incremental mechanics is involved in several domains of mechanics (Structural mechanics, geomechanics, Civil Engineering, Granular Matter,. . .). It can be investigated from many points of view and tackled by numerous tools (continuum mechanics, mechanics of discrete systems, FEM, DEM,. . .) but with their own specificities. We propose in this work a geometric point of view on incremental mechanics in order to provide a unified and intrinsic framework for its. Geometry of finite dimensional vector bundles then proves to be a natural framework for incremental mechanics. We then use this language to provide insights on usual concepts as stability or tangent stiffness matrix. It also provides an intrinsic language to make a geometric distinction between elasticity, hyperelasticity and hypoelasticity.

Mots clés : Mécanique incrémentale, fibré vectoriel, section nulle, transversalité, stabilité, dérivation verticale, matrice de rigidité tangente, élasticité, hypoélasticité

1 Introduction

Notre groupe de travail s'est attaché depuis dix à élucider les liens entre le critère d'instabilité de type Lyapounov divergence et celui dit du travail du second ordre de Hill (voir [1] par exemple). L'équivalence complète entre ces deux critères a été finalement obtenue et parfaitement prouvée dans le cadre de la mécanique discrète linéaire et différentiable dont le cadre d'application usuel est celui des milieux élastiques non conservatifs ou hypoélastiques. Cette preuve a nécessité d'introduire le concept de stabilité structurelle cinématique (KISS) et d'user du concept de compression des opérateurs ([2]). Une fois cette preuve établie, la démarche suivante non encore achevée est, bien entendu, de généraliser cette démonstration dans des cadres plus généraux afin de parvenir à une preuve complète dans le cadre pour lequel la compétition entre ces deux critères a été la plus vive à savoir la plasticité non associée des milieux continus. Une première étape a été franchie ([3]) en surmontant les obstacles topologiques et justifiant l'extension à la dimension infinie (c'est-à -dire aux milieux continus) des résultats initiaux. Le cadre mathématique était donc celui de l'analyse des opérateurs dans les espaces hilbertiens puisque le cadre linéaire était supposé préservé. Dans le travail que nous présentons ici, c'est l'extension au cadre non linéaire qui est visée. Le cadre discret différentiable initial étant cependant maintenu, les développements vont donc naturellement avoir lieu dans le cadre de la géométrie des variétés différentiables de dimension finie. D'un point de vue mécanique, il s'agit de poser le cadre géométrique de la mécanique discrète non linéaire incrémentalement linéaire c'est-à-dire de l'hypoélasticité non linéaire (et non conservative bien entendu).

Nous présenterons ici quelques éléments indispensables à la mise en en œuvre du théorème visé. Du cadre mécanique initial correspondant géométriquement au cas des fibrés vectoriels au dessus d'un point, nous allons maintenant passer à celui des fibrés vectoriels au dessus d'une variété différentiable $\mathbb{M}$ représentant l'espace des configurations du système mécanique. Nous présenterons successivement les notions géométriques intrinsèques de stabilité, d'opérateur de rigidité tangente. Nous envisagerons aussi avec ce langage les relations entre élasticité, hyperélasticité et hypoélasticité. Enfin, nous généraliserons les notions de chemin de chargement et de stabilité structurelle cinématique. Une partie de ce qui est présenté ici est exposé dans [4].

2 Définitions de base : Espace des configurations, champs de vitesses, systèmes de forces

Dans la suite toutes les quantités sont $\mathcal{C}^\infty$. Soit un système mécanique Σ dont l'espace des configurations est supposé être une variété différentiable $\mathbb{M}$. Cela signifie que ses configurations sont décrites par un nombre fini n de degrés de liberté, soit parce qu'il est discret (assemblage de corps rigides comme dans les systèmes granulaires), soit parce qu'il est discrétisé (par exemple par EF). Si $m \in \mathbb{M}$, on appellera génériquement $(U, q = (q_1, \dots, q_n))$ ou simplement $q = (q_1, \dots, q_n)$ un système de coordonnées de m dans un voisinage ouvert $(m \in)U \subset \mathbb{M}$.

Une évolution du système est une courbe $\sigma \in I \mapsto m(\sigma)$ tracée sur $\mathbb{M}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans nos évolutions incrémentales, σ n'est pas nécessairement le temps physique.

Un champ de vitesses de Σ dans la configuration m est un vecteur tangent u à $\mathbb{M}$ en m. On note $u \in T_m\mathbb{M}$. La réunion disjointe $T\mathbb{M} = \bigcup_{m\in\mathbb{M}} T_m\mathbb{M}$ forme un espace fibré vectoriel au dessus de $\mathbb{M}$ par la projection naturelle $\pi : T\mathbb{M} \to \mathbb{M}$ qui à tout vecteur tangent associe son origine. On l'appelle le fibré tangent. Si $m \in \mathbb{M}$, la fibre $\pi^{-1}\{m\}$au dessus de m est l'espace tangent $T_m\mathbb{M}$. Un champ de vecteurs ($\mathcal{C}^\infty$) noté

$X : m \mapsto X(m)$ est alors une section de ce fibré vectoriel. Si $m \in \mathbb{M}$, $X(m)$ peut être compris comme un champ de vitesses virtuelles de Σ dans la configuration m. X section du fibré veut dire que l'on a $\pi \circ X = id_{\mathbb{M}}$.
Dans l'esprit des puissances virtuelles, un système de forces $\mathcal{F}$ est décrit par une section ($\mathcal{C}^\infty$) $\omega_{\mathcal{F}}$ du fibré cotangent $T^*_m\mathbb{M}$. Si X est un champ de vecteurs et si $m \in \mathbb{M}$, $\omega_{\mathcal{F}}(X)(m) = \omega_{\mathcal{F}}(m)(X(m)) \in \mathbb{R}$ est la puissance développée par le système de force $\mathcal{F}$ dans le champ de vitesses $X(m)$ dans la configuration m. A l'espace fibré $T^*_m\mathbb{M}$ est également associé une projection que l'on notera encore π.
Cette description des efforts permet de décrire uniquement les efforts qui ne dépendent que des positions et qui sont donc indépendants du temps physique et en particulier de la vitesse des particules de Σ. Ils ne permettent donc pas de décrire les systèmes avec viscosité. Par ailleurs, son caractère $\mathcal{C}^\infty$ exclut donc les phénomènes incrémentalement non linéaires comme ceux intervenant dans la plasticité : incrémentalement, $\omega_{\mathcal{F}}$ pourra être décrit par son aspect infinitésimal. Il faut prendre garde cependant que le calcul différentiel ayant lieu dans un espace fibré, si l'on souhaite conserver la structure de fibration, les dérivations des sections d'un espace fibré nécessitent en général une connection sur cet espace fibré, connection qui n'existe pas ici de manière naturelle. Ce sera un des points clés de la section suivante.
Parmi les sections d'un fibré vectoriel, il y a en a une particulière qui est la section nulle et qui a la particularité d'être globale "au dessus " de la variété de base $\mathbb{M}$. Souvent on confondra $\mathbb{M}$ et la section nulle du fibré vectoriel.
Pour résumer, nous avons pour l'instant le langage intrinsèque pour traiter tous les systèmes discrets élastiques non conservatifs. Pour prendre en compte les aspects hypoélastiques, il faudra accepter une description plus "faible" des efforts.

3 Positions d'équilibre. Stabilité des positions déquilibre. Aspects géométriques et infinitésimaux.

Soit donc un système Σ de variété des configurations $\mathbb{M}$ soumis à un système de force $\mathcal{F}$. Σ est dit en équilibre dans la configuration m_e si $\omega_{\mathcal{F}}(m_e) = 0$ ce qui signifie que $\omega_{\mathcal{F}}(m_e)(u) = 0$ pour tout $u \in T_{m_e}\mathbb{M}$.
L'interprétation géométrique de l'équilibre est que la section $\omega_{\mathcal{F}}$ intersecte la section nulle $0_{T^*\mathbb{M}}$ en m_e. Si tel est le cas, on dira alors que la position d'équilibre m_e est T-stable (ou simplement stable) si $\omega_{\mathcal{F}}$ intersecte transversalement la section nulle $0_{T^*\mathbb{M}}$ en m_e. On écrira $\omega_{\mathcal{F}} \top 0_{T^*\mathbb{M}}$. Les définitions de positions d'équilibre et de stabilité trouvent ainsi une formulation purement géométrique.
Si l'on veut revenir à des aspects calculatoires plus usuels, la 1-forme différentielle $\omega_{\mathcal{F}}$ s'écrit $\omega_{\mathcal{F}}(m) = \sum_{k=1}^{n} F_k(q)dq_k$ en coordonnées locales $q = (q_1, \dots, q_n)$ au voisinage U de m_e et l'équation d'équilibre $\omega_{\mathcal{F}}(m_e) = 0$ est alors équivalente à n équations non linéaires $F_k(q_e) = 0, \forall k = 1, \dots, n$ qui sont les n équations d'équilibre.
La caractérisation de la stabilité en coordonnées locales est plus délicate et doit être comprise ainsi :
la différentielle de $\omega_{\mathcal{F}}$ en m_e est une application linéaire $d\omega_{\mathcal{F}}(m_e) : T_{m_e}\mathbb{M} \to T_{\omega_{\mathcal{F}}(m_e)}T^*\mathbb{M} = T_{(m_e,0)}T^*\mathbb{M}$ car m_e est une position d'équilibre. On va se servir de la section nulle comme d'un espace horizontal de connection bien qu'il n'y ait pas de connection. L'identification canonique $T_0T^*_{m_e}\mathbb{M} \approx T^*_{m_e}\mathbb{M}$ car $T^*_{m_e}\mathbb{M}$ est un espace vectoriel conduit à la décomposition canonique $T_{(m_e,0)}T^*\mathbb{M} = T_{m_e}\mathbb{M} \oplus$

$T^*_{m_e}\mathbb{M}$ de sorte que la différentielle $d\omega_{\mathcal{F}}(m_e)$ prend la forme

$$\begin{array}{rcl} d\omega_{\mathcal{F}}(m_e) : T_{m_e}\mathbb{M} & \to & T_{m_e}\mathbb{M} \oplus T^*_{m_e}\mathbb{M} \\ u & \mapsto & u + d\omega^{ver}_{\mathcal{F}}(m_e)(u) \end{array} \tag{1}$$

où $d\omega^{ver}_{\mathcal{F}}(m_e)$ est linéaire et appartient à $\mathcal{L}(T_{m_e}\mathbb{M}, T^*_{m_e}\mathbb{M})$.
Par définition, $d\omega^{ver}_{\mathcal{F}}(m_e)$ est l'opérateur linéaire tangent de rigidité du système de forces $\mathcal{F}$ en m_e. Sa matrice dans les bases duales $(\frac{\partial}{\partial q_k})_k$ de $T_{m_e}\mathbb{M}$ et $(dq_k)_k$ de $T^*_{m_e}\mathbb{M}$ associées au système de coordonnées locales $q = (q_1, \ldots, q_n)$ au voisinage U de m_e est ce que les mécaniciens appellent la matrice de rigidité tangente. $d\omega^{ver}_{\mathcal{F}}(m_e)$ est un tenseur 2 fois covariant.
Caractérisant la transversalité et usant du théorème du rang, on a alors le résultat suivant :
m_e est T-stable si et seulement si $d\omega^{ver}_{\mathcal{F}}(m_e)$ est inversible. En coordonnées locales, on retrouve le critère d'Euler sur l'inversibilité de la matrice de rigidité tangente.

4 Elasticité, hyperélasticité, hypoélasticité.

Soit maintenant $\mathcal{F}_\ell$ le système de forces s'exerçant dans les liaisons de Σ. Le système est dit élastique si $\mathcal{F}_\ell$ est décrit par une section $\omega_{\mathcal{F}_\ell}$ de $T^*\mathbb{M}$. Il sera dit hyperélastique s'il existe une fonction $W_{e\ell}$ appelée énergie élastique telle que $\omega_{\mathcal{F}_\ell} = -dW_{e\ell}$. On dit alors que $\omega_{\mathcal{F}_\ell}$ est une 1-forme exacte. Cela impose que $\mathbf{d}(\omega_{\mathcal{F}_\ell}) = 0$ où $\mathbf{d}$ est la dérivation extérieure sur le module des formes extérieures sur $\mathbb{M}$ c'est-à-dire que $\omega_{\mathcal{F}_\ell}$ est une 1-forme fermée sur $\mathbb{M}$. Par le théorème de Poincaré, c'est localement équivalent, l'obstruction globale pouvant provenir de la topologie de la variété $\mathbb{M}$.
Parfois lorsque $\mathbf{d}\omega_{\mathcal{F}_\ell} \neq 0$, les mécaniciens disent que le système est hypoélastique. Pour nous il est lors seulement élastique et nous préférons poser la définition suivante : Σ sera dit hypoéslatique lorsque le système des forces de liaison $\mathcal{F}_\ell$ n'est plus donné par une section $\omega_{\mathcal{F}_\ell}$ de $T^*\mathbb{M}$ mais par un système différentiel sur $T^*\mathbb{M}$ en général non intégrable. Il est équivalent de dire que $\mathcal{F}_\ell$ est décrit par une distribution $\mathcal{C}^\infty$ $\omega \mapsto H_\ell(\omega) \subset T_\omega T^*\mathbb{M}$ tels que $T_\omega T^*\mathbb{M} = H_\ell(\omega) \oplus V(\omega)$ avec $V(\omega) = T_\omega \pi^{-1}\{\pi(\omega)\} = T_\omega T^*_{\pi(\omega)}\mathbb{M} \approx T^*_{\pi(\omega)}\mathbb{M}$ car $T^*_{\pi(\omega)}\mathbb{M}$ est un espace vectoriel. Lorsque ce système est intégrable, la variété intégrable passant par une configuration de référence dans laquelle $\mathcal{F}_\ell$ est donnée (par exemple une configuration dite relachée dans laquelle les efforts de liaison sont nuls) est une section de $T^*\mathbb{M}$ et le système est alors élastique.

5 Chemin de chargement, Stabilité Structurelle Cinématique (KISS)

Pour conclure ce travail et en écho avec nos motivations initiales décrites dans l'introduction, nous présentons l'extension dans ce cadre non linéaire (mais incrémentalement linéaire) des notions de chemins de chargement et de Stabilité Structurelle Cinématique (KISS).
Un chemin de chargement $\mathcal{L} = (I_{\mathcal{L}}, \mathbb{V}_{\mathcal{L}}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}})$ est la donnée d'un intervalle $I_{\mathcal{L}}$ de $\mathbb{R}$, d'une sous variété plongée $\mathbb{V}_{\mathcal{L}}$ de $\mathbb{M}$ et d'une distribution $\sigma \in I \mapsto \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\sigma)$ de système de forces. On suppose donc ici qu'il existe le long de ce chemin de chargement des contraintes cinématiques s'exerçant sur Σ décrites par la sous variété $\mathbb{V}_{\mathcal{L}}$ de $\mathbb{M}$ et ces contraintes cinématiques sont donc supposées maintenues durant le chemin de chargement. Remarqu'ons d'une part que le chemin de chargement induit par projection π un chemin $\pi \circ \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ tracé sur $\mathbb{M}$ et que dans le cadre élastique par exemple, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ est décrit par une section $\omega_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}}$ de $T^*\mathbb{V}_{\mathcal{L}}$.
Nous nous plaçons pour simplifier dans le cas intégrable. Le chemin de chargement $\mathcal{L}$ est dit régulier si

pour tout $\sigma \in I_{\mathcal{L}}$, $\omega_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}(\sigma)}} \top 0_{T^*\mathbb{M}}$. On alors le résultat étendu au cadre non linéaire :
Soit $\mathcal{L}_{\mathbb{M}} = (I, \mathbb{M}, \mathcal{F})$ un chemin de chargement régulier tracé sur $\mathbb{M}$. Alors pour toute sous variété $\mathbb{V}$ plongée dans $\mathbb{M}$ telle que $\pi \circ \omega_{\mathcal{F}} = \pi \circ \omega_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}_{\mathbb{V}}}}$, $\mathcal{L}_{\mathbb{M}}$ induit un chemin de chargement régulier $\mathcal{L}_{\mathbb{V}} = (I, \mathbb{V}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}_{\mathbb{V}}})$ si et seulement si le critère du travail du second ordre de Hill $d\omega_{\mathcal{F}}^{ver,s}(m(\sigma))$ définie positive est satisfait pour tout $\sigma \in I$.
La condition $\pi \circ \omega_{\mathcal{F}} = \pi \circ \omega_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}_{\mathbb{V}}}}$ signifie que l'introduction des contraintes cinématiques ne modifie pas les positions d'équilibre du système. La notion de chemin induit sur la sous variété $\mathbb{V}$ nécessite de préciser comment est définie $\omega_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}_{\mathbb{V}}}}$ à partir de $\omega_{\mathcal{F}}$. C'est la section du fibré "tiré en arrière" $j^*(T^*\mathbb{M}) = T^*\mathbb{V}$ par le plongement $j : \mathbb{V} \to \mathbb{M}$ définie par $\omega_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}_{\mathbb{V}}}} = j^*(\omega_{\mathcal{F}})$.

6 Conclusion et perspectives

On a donc ici donné ici un cadre géométrique pour l'analyse des évolutions incrémentales (incrémentalement linéaires) des systèmes mécaniques non linéaires hypoélastiques. Dans ce cadre, l'extension du KISS a permis d'obtenir l'équivalence de la T-stabilité de tout système contraint $\Sigma_{\mathcal{C}}$ et de la Hill stabilité du système non contraint Σ. Les perspectives sont principalement doubles. D'une part étendre cette approche au cas incrémentalement non linéaire comme dans le cas de a plasticité, ce qui impliquerait de se libérer du cadre différentiable, d'autre part l'étendre au cas d'un milieu continu tout en restant non linéaire. Cela impliquerait, sauf changement de cadre, de travailler dans des variétés des configurations de type Banach.

Références

[1] R. Hill, Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 7, 209-225, 1959

[2] J. Lerbet, N. Challamel, F. Nicot, F. Darve, Variational formulation of divergence stability for constrained systems Applied Mathematical Modelling, Volume 39, Issues 23-24, 7469-7482, December 2015

[3] J. Lerbet, N. Challamel, F. Nicot, F. Darve, On the stability of nonconservative continuous systems under kinematic constraints, ZAMM, vol.97, no 9, 1100-1119, 2017

[4] J. Lerbet, N. Challamel, F. Nicot, F. Darve, Intrinsic Nonlinear Incremental Discrete Mechanics, ZAMM, Vol. 98, no 10, 1813-1833, 2018