

Apport de l'agrégation de métamodèles pour le calcul de probabilité d'évènements rares

C. Amrane, P. Beaurepaire, C. Mattrand, J.-M. Bourinet, N. Gayton

Université Clermont Auvergne, CNRS, SIGMA Clermont,
Institut Pascal, F-63000 Clermont-Ferrand, France
{chahrazed.amrane, pierre.beaurepaire, cecile.mattrand, jean-marc.bourinet,
nicolas.gayton}@sigma-clermont.fr

Résumé :

Les méthodes d'analyse de fiabilité requièrent de nombreux appels au modèle numérique, et particulièrement lorsque les probabilités recherchées sont faibles. Un modèle mathématique simplifié de la fonction coûteuse à évaluer, appelé métamodèle, est utilisé afin d'imiter la relation entrée-sortie de cette fonction. Ceci permet ainsi de diminuer le nombre d'appels nécessaires à l'analyse. Plusieurs types de métamodèles existent. Néanmoins, aucun type de métamodèle n'est optimal pour toutes les applications. Plusieurs travaux de recherches ont été menés dans le but de trouver une stratégie qui permet d'éviter de faire le choix a priori d'un métamodèle pour un problème donné. Une des solutions proposées consiste en l'agrégation de métamodèles sous la forme d'une somme pondérée. Elle est généralement connue sous le nom d'Ensemble de Métamodèles (EM). Dans ce travail, la fonction de performance est substituée par un EM pour estimer la probabilité de défaillance. Les ensembles sont ici constitués de métamodèles de Krigage construits avec différents noyaux. La méthode AK-MCS est implémentée avec une nouvelle fonction d'apprentissage pour l'estimation de la probabilité de défaillance. Un exemple académique est étudié afin de montrer l'intérêt de l'approche proposée.

Abstract :

Reducing the computational burden is a challenging task in reliability analysis. Huge number of calls to the expensive performance function are required in engineering applications, especially in the context of low failure probabilities. Metamodels are used to mimic the input-output relationship of the expensive function to evaluate, allowing the several calls needed in the analysis. Several kinds of metamodels exist, but no type and no tuning is optimal in all applications. Ensemble of Metamodels (EM) is an alternative which consist in combining individual metamodels in the form of a weighted average metamodel. In this paper, the relevance of using ensembles as a substitution for the performance function to estimate the failure probability is investigated. Ordinary Kriging metamodels are solely considered as EM individuals. The focus is rather put on the choice of the kernel. The contribution therefore consists in using EMs, composed of Kriging metamodels with different kernels. The Active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation, namely AK-MCS, is here considered for the estimation of failure probabilities. A new learning function is proposed in this work. An academic example is studied in order to investigate the potential benefits of such an approach.

Mots clés : Métamodèle / Ensemble de métamodèles / Agrégation / Probabilité de défaillance / AK-MCS

1 Introduction

En analyse de fiabilité, l'état de défaillance est exprimé à partir d'une fonction de performance g . La structure est dite défaillante quand g est négative ou nulle, i.e. $g(\mathbf{x}) \leq 0$, où $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ est le vecteur des variables aléatoires d'entrée. En revanche, $g(\mathbf{x}) > 0$ signifie que la structure est sûre pour \mathbf{x} . La limite entre ces deux configurations, i.e. $g(\mathbf{x}) = 0$, est appelé état limite. La probabilité de défaillance est définie par l'intégrale de la fonction de densité jointe $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ sur le domaine de défaillance Ω_f pour tout \mathbf{x} tel que $g(\mathbf{x}) \leq 0$:

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

où $d\mathbf{x} = dx_1 \dots dx_n$. Le calcul d'une intégrale multidimensionnelle est particulièrement complexe en grande dimension, ou lorsque la probabilité de défaillance recherchée est faible ou lorsque la fonction de performance est non-linéaire et coûteuse en temps de calcul. Plusieurs méthodes existent dans la littérature afin d'approcher cette intégrale. La méthode de référence est basée sur la simulation de Monte Carlo (MCS). L'estimation de la probabilité de défaillance est donnée par :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} I\{g(\mathbf{x}^{(i)}) \leq 0\} \quad (2)$$

où N_{MC} est la taille de la population MC et $I\{\cdot\}$ est la fonction indicatrice. La méthode MCS est simple et facile à implémenter. Toutefois, elle requiert des temps de calcul considérables pour l'estimation de probabilités faibles. En effet, une estimation précise de la probabilité de défaillance n'est obtenue que lorsque la taille de la population MC est suffisamment importante, c'est-à-dire avec un nombre important d'appels à la fonction de performance g . Des méthodes plus avancées ont été développées afin de réduire le nombre d'appels à la fonction de performance. Les métamodèles sont amplement utilisés dans ce contexte. Ils permettent d'imiter la relation entrée-sortie de la fonction de performance. Plusieurs types de métamodèles sont utilisés en analyse de fiabilité, voir par exemple [1–8]. Les métamodèles de Krigeage en font partie. Ils sont interpolants et il est possible d'estimer leur variance de prédiction en chaque point du domaine [9–11], ce qui les rend particulièrement séduisants. L'intérêt d'utiliser des métamodèles en fiabilité a été démontré. Néanmoins, aucun type de métamodèle (et le choix des hyperparamètres sous-jacents) n'est optimal dans toutes les conditions. En Krigeage par exemple, il n'existe aucun consensus ou critères pour le choix *a priori* des fonctions tendances et noyaux. Un choix inapproprié donne lieu à des prédictions biaisées tel qu'indiqué en [12]. Par conséquent, le choix *a priori* d'un métamodèle pour un problème donné n'est pas systématique et reste un challenge pour les utilisateurs. Plusieurs travaux de recherche ont été menés dans le but de trouver une stratégie qui permet de lever ce verrou. Une des alternatives proposées consiste en l'agrégation de métamodèles. Il est montré que la qualité de la prédiction est parfois améliorée par l'agrégation de modèles [13–16].

Les ensembles de métamodèles ont essentiellement été utilisés en optimisation, peu de recherches ont été dédiés quant à leur possible utilisation en analyse de fiabilité [12, 17]. Dans cet article, la pertinence d'utiliser l'ensemble de métamodèles comme un substituant de la fonction de performance pour estimer

la probabilité de défaillance est étudiée. Le papier est organisé comme suit. Un bref état de l'art sur les différentes stratégies d'agrégation de métamodèles est présenté en Section 2.1. Dans la même Section 2.2, La méthode AK-MCS (*Active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo Simulation*) [10] est brièvement décrite. L'approche proposée est présentée en Section 3, puis appliquée sur un exemple académique en Section 4 afin de mettre en évidence son intérêt.

2 État de l'art

2.1 Les stratégies d'agrégation de métamodèles

La prédiction d'un ensemble de métamodèles est obtenue comme la somme pondérée des prédictions des métamodèles individuels. L'EM a été proposé en [18] et est formulé comme suit :

$$\hat{y}_{ens}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{x}) \hat{y}_i(\mathbf{x}) \quad (3)$$

où $\hat{y}_{ens}(\mathbf{x})$ est la prédiction de l'EM pour le vecteur entrée \mathbf{x} , m est le nombre de métamodèles utilisés dans l'EM, w_i est le poids du $i^{\text{ème}}$ métamodèle et $\hat{y}_i(\mathbf{x})$ est la prédiction du $i^{\text{ème}}$ métamodèle. La somme des poids doit être égale à 1. Plusieurs stratégies d'agrégation de métamodèles, c'est-à-dire de détermination des poids, sont proposées dans la littérature. Deux principales catégories d'EM, appelés les EMs globaux et les EMs locaux, peuvent être distingués.

Les EMs globaux

Les EMs globaux ont des poids w_i qui restent constants sur le domaine de définition des variables \mathbf{x} . Ainsi, la valeur des poids ne dépend pas de la position des points de prédiction, i.e. $w_i(\mathbf{x}) = w_i, \forall \mathbf{x}$. Dans ce travail, trois stratégies d'EM global sont appliquées pour la détermination des poids. La première approche (BMA) combine les différentes prédictions des métamodèles dans un contexte Bayésien et est appelée *Bayesian model averaging* [19]. Si M est un ensemble de métamodèles, $M = \{M_i, i = 1, \dots, m\}$, alors, pour un plan d'expérience donné D , BMA donne la distribution *a posteriori* de la prédiction de l'EM par la formule suivante :

$$P(\hat{y}_{ens}(\mathbf{x})|D) = \sum_{i=1}^m P(M_i|D)P(\hat{y}_i(\mathbf{x})|M_i, D) \quad (4)$$

où $P(\hat{y}_i|M_i, D)$ désigne ici la fonction de répartition de $\hat{y}_i(\mathbf{x})$, c'est-à-dire la prédiction du $i^{\text{ème}}$ métamodèle. $P(M_i|D)$ correspond à la probabilité que le métamodèle M_i représente les données D . Il s'agit de la masse ponctuelle *a posteriori* [19] :

$$P(M_i|D) = \frac{P(D|M_i)P(M_i)}{\sum_{l=1}^m P(D|M_l)P(M_l)} \quad (5)$$

La somme des probabilités $P(M_i|D)$ est égale à un et donc $P(M_i|D)$ peut être assimilé à un poids [20]. Par analogie à l'équation 3, on peut écrire que $P(M_i|D) = w_i$. La vraisemblance intégrée du métamodèle M_i est donnée par :

$$P(D|M_i) = \int P(D|\theta_i, M_i)P(\theta_i|M_i)d\theta_i \quad (6)$$

où θ_i est le vecteur paramètres du $i^{\text{ème}}$ métamodèle, $P(\theta_i|M_i)$ est la fonction de densité *a priori* de θ_i , $P(D|\theta_i, M_i)$ est la vraisemblance des données sachant le métamodèle M_i et ses paramètres θ_i et $P(M_i)$ correspond à la masse ponctuelle *a priori* du métamodèle souvent choisie égale à $\frac{1}{m}$ en l'absence d'informations.

La deuxième approche (EG) est proposée par Goel et al. [13]. Elle est basée sur l'erreur moyenne quadratique généralisée (GMSE) qui est obtenue par validation croisée. Les poids sont définies par :

$$\begin{aligned} w_i &= \frac{w_i^*}{\sum_i w_i^*}, \quad w_i^* = (E_i + \alpha E_{avg})^\beta \\ E_{avg} &= \frac{\sum_i E_i}{m}, \quad \alpha < 1 \text{ et } \beta < 0 \\ E_i &= \sqrt{GMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y^{(k)} - \hat{y}_i^{(k)})^2} \end{aligned} \quad (7)$$

où $y^{(k)}$ indique la vraie réponse en un point $\mathbf{x}^{(k)}$, $\hat{y}_i^{(k)}$ est sa prédiction donnée par le $i^{\text{ème}}$ métamodèle calibré à partir de tous les points du plan d'expérience sauf le point $(\mathbf{x}^{(k)}, y^{(k)})$ et N est la taille du plan d'expérience. α et β sont des paramètres dont les valeurs sont à fixer au préalable. Par exemple, $\alpha = 0.05$ et $\beta = -1$ sont utilisés dans l'article de Goel et. al [13] et dans le présent travail.

Acar et al. [14] ont proposé d'estimer les poids à partir de la minimisation de la quantité GMSE à partir de l'EM qui constitue la troisième stratégie (EME) considérée dans ce travail :

$$GMSE_{\hat{y}_{ens}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y^{(k)} - \hat{y}_{ens}^{(k)})^2 \quad (8)$$

où $y^{(k)}$ indique la vraie réponse en un point $\mathbf{x}^{(k)}$ et $\hat{y}_{ens}^{(k)}$ est sa prédiction donnée par l'EM calibré à partir de tous les points du plan d'expérience sauf le point $(\mathbf{x}^{(k)}, y^{(k)})$. Les poids sont alors les solutions du problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned} \min_w \quad & GMSE_{\hat{y}_{ens}} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m w_i = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Les EMs locaux

Contrairement à l'EM global, les poids de l'EM local varient en fonction du point de prédiction. Selon Acar [15], cette stratégie peut donner des résultats plus précis. Néanmoins, une mauvaise estimation des poids peut aussi mener à retenir localement un modèle inapproprié [21]. Deux stratégies d'EM local sont ici considérées.

La première approche (EV) est basée sur la variance de prédiction locale et est proposée par Zerpa et. al [18]. Sous l'hypothèse de prédictions non-biaisées et non-corrélées, les poids sont déterminés comme suit afin de réduire la variance de l'EM :

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{\frac{1}{V_i(\mathbf{x})}}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{V_j(\mathbf{x})}} \quad (10)$$

où $V_i(\mathbf{x})$ est la variance de prédiction du $i^{\text{ème}}$ métamodèle M_i en \mathbf{x} .

Acar propose quatre approches pour calculer les poids de l'Eq. (3) en [15]. Elles sont basées sur l'erreur de validation croisée et sur la distance entre les points d'apprentissage et les points de prédiction. Seule la troisième approche (EA3) est considérée dans cet article. Au niveau des points d'apprentissage, un poids égal à un est attribué au métamodèle qui minimise l'erreur de validation croisée, tandis qu'un zéro est attribué aux autres poids. Au point de prédiction \mathbf{x} , les poids sont égaux aux poids estimés au point d'apprentissage le plus proche. Cette approche est formulée comme suit :

$$w_i(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N w_{ik} I_k(\mathbf{x}) \quad (11)$$

$$I_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{Si } \mathbf{x}^{(k)} \text{ est le plus proche de } \mathbf{x} \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

où w_{ik} est le poids attribué au métamodèle M_i en un point d'apprentissage $\mathbf{x}^{(k)}$.

2.2 AK-MCS

Echard et al. [10] a combiné le Krigeage adaptatif à la méthode de simulation de Monte Carlo (MCS). La principale idée de cette méthode est de classer une population Monte Carlo entre les domaines de défaillance et de sûreté à partir d'un métamodèle de Krigeage itérativement recalibré. Le plan d'expérience est enrichi jusqu'à ce que la classification soit jugée correcte. L'ajout des points est réalisé à partir d'une fonction d'apprentissage notée U . La méthode est résumée ici et les lecteurs peuvent se référer à [10] pour plus de détails.

1. Génération de la population MC, de taille N_{MC} , dans l'espace standard où toutes les variables aléatoires \mathbf{u} sont centrées réduites et non-corrélées. Une transformation appropriée est requise pour le passage de l'espace physique (\mathbf{x}) vers l'espace standard des (\mathbf{u}).
2. Sélection du plan d'expérience initial (DoE) de taille N en utilisant une des techniques décrites en [22].
3. Calibration du métamodèle du Krigeage à partir du DoE (\mathbf{u}_i, g_i), $i = 1, \dots, N$.
4. Évaluation de la fonction d'apprentissage U en chacun des points de la population MC et identification du point candidat u^* qui la minimise.

$$U(\mathbf{u}^*) = \min_{i=1, \dots, N_{MC}} U(\mathbf{u}^{(i)}) \quad (12)$$

où

$$U(\mathbf{u}^{(i)}) = \frac{|\mu_{\hat{g}}(\mathbf{u}^{(i)})|}{\sigma_{\hat{g}}(\mathbf{u}^{(i)})} \quad (13)$$

et $\mu_{\hat{g}}(\mathbf{u}^{(i)})$ et $\sigma_{\hat{g}}^2(\mathbf{u}^{(i)})$ représentent respectivement la prédiction moyenne du Krigeage et sa variance.

5. Vérification du critère d'arrêt défini par :

$$U(\mathbf{u}^*) \geq 2 \quad (14)$$

Si le critère d'arrêt est vérifié, l'algorithme s'arrête et le métamodèle est considéré suffisamment précis pour classer la population de Monte Carlo. Sinon, le DoE est enrichi par l'évaluation de g au point \mathbf{u}^* . Ensuite, l'algorithme revient à l'étape 3.

6. Estimation de la probabilité de défaillance selon l'Eq. (2), où \hat{g} remplace g .

3 L'approche proposée

Dans ce travail, la fonction d'apprentissage U est modifiée afin d'appliquer la méthode AK-MCS en considérant un ensemble de métamodèles de Krigeage. Pour ce faire, l'Eq. (13) peut être utilisée de telle sorte que :

$$\mu_{\hat{g}_{ens}}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) \mu_{\hat{g}_i}(\mathbf{u}) \quad (15)$$

$$\sigma_{\hat{g}_{ens}}(\mathbf{u}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m w_i(\mathbf{u}) w_j(\mathbf{u}) Cov[\hat{g}_i(\mathbf{u}), \hat{g}_j(\mathbf{u})]} \quad (16)$$

où $\hat{g}_i(\mathbf{u})$ et $\hat{g}_j(\mathbf{u})$ sont les prédictions des métamodèles M_i et M_j , respectivement. L'estimation de la variance est problématique à cause des termes de covariance $Cov[\hat{g}_i(\mathbf{u}), \hat{g}_j(\mathbf{u})]$. Selon Ginsbourger et al. [23], l'estimation de ces termes est difficile. Une hypothèse d'indépendance entre les prédicteurs (même si non vérifiée en pratique) peut être faite afin de contourner ce problème. Une agrégation des distributions statistiques des prédicteurs est plutôt proposée en [23] pour s'affranchir du problème de l'estimation de la variance. En mélangeant les distributions du Krigeage, la fonction de densité de l'EM de Krigeage est estimée et est utilisée pour définir la nouvelle fonction d'apprentissage, nommée ci-après U_{ens} .

La distribution conditionnelle de $\hat{g}_{ens}(\mathbf{u})$, notée $f_{\hat{g}_{ens}}(\mathbf{u})$, s'obtient comme la somme pondérée de distributions gaussiennes conditionnelles de $\hat{g}_i(\mathbf{u})$, notée $f_{\hat{g}_i}(\mathbf{u})$, où i indique le $i^{\text{ème}}$ métamodèle M_i :

$$f_{\hat{g}_{ens}}(\mathbf{u})(\cdot) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) f_{\hat{g}_i}(\mathbf{u})(\cdot) \quad (17)$$

Si S correspond à l'évènement « le point \mathbf{u} de la population MC est mal classé par la prédiction de \hat{g}_{ens} », alors la probabilité d'occurrence de cet évènement peut être déduite de l'Eq. (17) :

$$P_{ens}(S) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) \Phi(-U_i(\mathbf{u})) \quad (18)$$

où $\Phi(-U_i(\mathbf{u}))$ correspond à la probabilité qu'un point \mathbf{u} soit mal-classé par la prédiction du $i^{\text{ème}}$ métamodèle M_i . En introduisant un indice U_{ens} conceptuel, nous pouvons écrire :

$$F_{\hat{g}_{ens}}(\mathbf{u})(-U_{ens}(\mathbf{u})) = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) \Phi(-U_i(\mathbf{u})) \quad (19)$$

où $F_{\hat{g}_{ens}}(\mathbf{u})$ représente la fonction de densité cumulative de $\hat{g}_{ens}(\mathbf{u})$ et qui est inconnue. Par analogie avec AK-MCS, nous considérons la fonction de distribution cumulative normale standard Φ . À partir de

là, U_{ens} peut s'écrire comme suit :

$$U_{ens} = \Phi^{-1} \left(\sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{u}) \Phi(U_i(\mathbf{u})) \right) \quad (20)$$

Le processus d'apprentissage est effectué dans ce papier avec la nouvelle fonction d'apprentissage U_{ens} .

4 Applications

L'approche proposée est appliquée sur un exemple académique en considérant le Krigeage Ordinaire (OK) et deux noyaux : un gaussien et un Matern $\nu = \frac{3}{2}$. Les métamodèles du Krigeage sont calibrés avec la toolbox OPENTURNS [24] et ils sont combinés par les techniques décrites en Section 2.1. La probabilité de défaillance calculée par la méthode MCS est la valeur de référence. Dans ce qui suit, M1 correspond à un OK avec un noyau gaussien et M2 représente un OK avec un noyau Matern $\nu = \frac{3}{2}$. La méthode AK-MCS est appliquée avec les métamodèles du Krigeage individuels M1 et M2 en utilisant la fonction d'apprentissage de base U . La fonction U_{ens} est appliquée dans le processus d'apprentissage d'AK-MCS quand l'EM est le modèle de remplacement.

L'exemple d'application est un problème système à quatre branches dont la fonction d'état limite est irrégulière. Sa fonction de performance est exprimée par :

$$g(u_1, u_2) = \min \begin{cases} 3 + 0.1(u_1 - u_2)^2 - \frac{(u_1 + u_2)}{\sqrt{2}} \\ 3 + 0.1(u_1 - u_2)^2 + \frac{(u_1 + u_2)}{\sqrt{2}} \\ (u_1 - u_2) - \frac{7}{\sqrt{2}} \\ (u_2 - u_1) - \frac{7}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (21)$$

où u_1 et u_2 sont des variables aléatoires normales standards. La valeur de référence de la probabilité de défaillance est 2.231×10^{-3} et est estimée par la méthode MCS avec 10^6 points. Les résultats obtenus pour les différentes combinaisons d'AK-MCS avec les métamodèles de Krigeage et avec les EMs sont donnés dans le Tableau 4.

Méthode	N_{call}	P_f	points mal-classés
Monte Carlo	10^6	2.231×10^{-3}	/
AK-MCS+M1	87	2.230×10^{-3}	1
AK-MCS+M2	59	0.472×10^{-3}	1759
AK-MCS+BMA	82	2.231×10^{-3}	2
AK-MCS+EG	127	2.231×10^{-3}	0
AK-MCS+EME	93	2.231×10^{-3}	0
AK-MCS+EV	70	2.231×10^{-3}	0
AK-MCS+EA3	105	2.231×10^{-3}	0

Tableau 1 – Comparaison des résultats d'AK-MCS combinée avec les métamodèles individuels OK et les EMs

En premier lieu, les résultats montrent l'incapacité du métamodèle M2 à converger vers la valeur de référence de la probabilité de défaillance. Ceci est aussi constaté à partir de la Figure 1, où la prédiction de M2 est notablement différente pour deux branches de la fonction d'état limite. La taille du plan d'expériences initial et la position des points dans l'espace ne permettent pas une prédiction correcte par

M2. Les EMs sont capables de prédire correctement la probabilité de défaillance et de bien approcher la fonction d'état limite, même si M2 échoue à le faire. L'estimation de la probabilité de défaillance des EMs est légèrement meilleure que celle obtenue avec le meilleur métamodèle M1. Le nombre d'appels à la fonction d'état limite diffère d'une stratégie d'agrégation à une autre. La méthode EG est la plus exigeante en nombre d'itérations. Ceci est probablement dû au choix des paramètres α et β . En effet, leur choix est empirique et problème dépendant [13]. La méthode EA3 requiert aussi plus d'itérations que le meilleur métamodèle pour converger. En effet, M2 est sélectionné pour plus que 80% des points de prédiction à la fin du processus d'apprentissage selon la Figure 2. Ce métamodèle a en général une variance de prédiction plus élevée, ce qui réduit la valeur de U_{ens} et ralentit la convergence. Cette stratégie d'EM permet cependant d'avoir une bonne approximation de la fonction d'état limite, Voir Figure 1. La méthode EME sélectionne immédiatement le meilleur métamodèle pour cet exemple et lui attribue un poids égale à 1 pendant tout le processus d'enrichissement du plan d'expériences. Les méthodes BMA et EV sont capables d'améliorer légèrement l'estimation de la probabilité de défaillance avec moins d'itérations qu'avec le meilleur métamodèle. Enfin, la nouvelle fonction d'apprentissage U_{ens} a prouvé son efficacité en classification à travers cet exemple. En effet, les points sélectionnés pour l'apprentissage se retrouvent tous au voisinage de la fonction d'état limite tel que montré sur la Figure 1. Par ailleurs, tous les points de la population MC sont bien classés par les EMs, ce qui n'est pas le cas des métamodèles individuels.

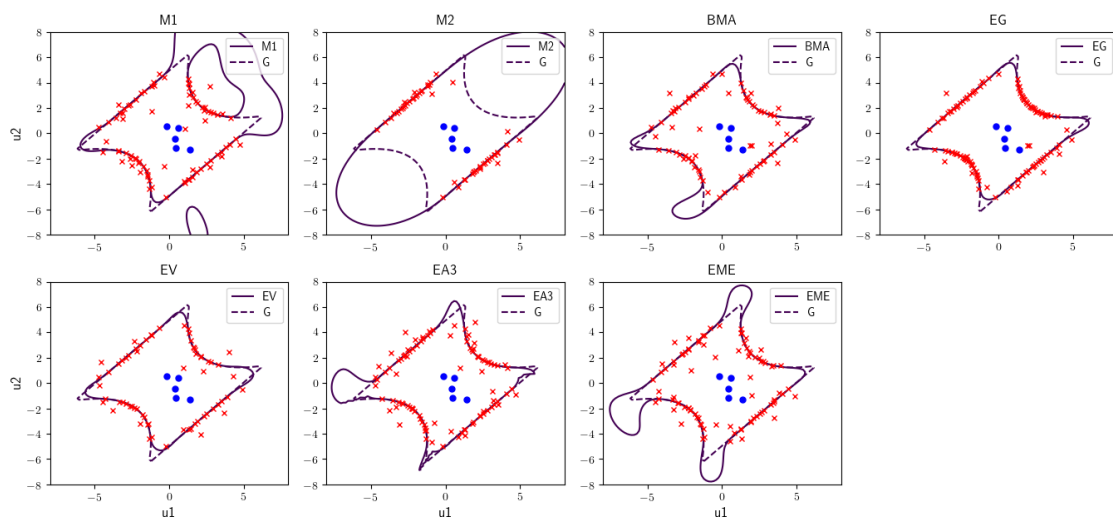


FIGURE 1 – Approximation d'AK-MCS combiné avec les métamodèles individuels OK et les EMs

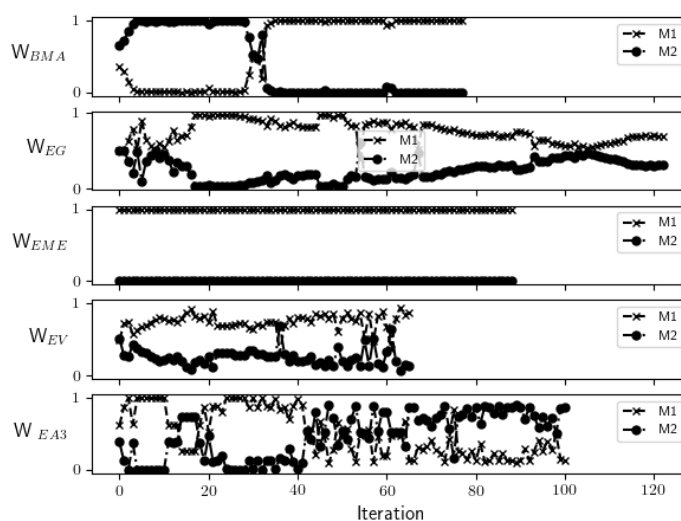


FIGURE 2 – Approximation d’AK-MCS combiné avec les métamodèles individuels OK et les EMs

5 Conclusions

Une analyse de fiabilité basée sur les métamodèles est considérée dans ce travail. La variété des types de métamodèles et des paramétrages rend le choix difficile. L’ensemble de métamodèles (EM) est une approche qui permet de lever ce verrou, c’est-à-dire faire des choix *a priori*. Cette stratégie est combinée avec AK-MCS où une nouvelle fonction d’apprentissage est proposée.

Dans cet article, deux métamodèles de Krigeage ordinaire sont considérés avec deux noyaux différents (gaussien et Matern $\nu = \frac{3}{2}$). Ils sont combinés pour former des EMs locaux et globaux. Les résultats montrent que la nouvelle fonction d’apprentissage effectue une classification efficace des points de la population MC avec toutes les stratégies d’EMs considérées dans ce travail. La méthode basée sur la variance locale de la prédiction (EV) et la méthode globale *Bayesian Model Averaging* (BMA) ont réussi à atteindre la valeur de référence de la probabilité de défaillance avec moins d’appels à la fonction de performance comparée au meilleur métamodèle. L’heuristique de Goel (EG), les poids optimisés (EME) et la méthode locale spatiale (EA3) permettent aussi d’avoir une estimation correcte de la probabilité de défaillance mais avec plus de nombre d’appels à la fonction de performance.

A travers ces résultats préliminaires, le potentiel de l’utilisation de l’ensemble de métamodèles en analyse de fiabilité est bien montré. Néanmoins, des améliorations doivent être faites pour la détermination des poids. L’EM garantit sur cet exemple la correcte estimation de la probabilité de défaillance quelque soit la méthode d’agrégation retenue. Même si le coût de calcul peut être supérieur par rapport à la solution basée sur le meilleur métamodèle. L’EM permet surtout d’éviter la pire configuration, c’est-à-dire celle basée sur un mauvais choix *a priori* de métamodèle, et qui échoue à estimer correctement la probabilité de défaillance. Une pré-sélection de métamodèles peut aussi être faite afin d’écarter ceux qui ont une variance de prédiction élevée dans le but d’éviter le ralentissement de la convergence. D’autres exemples de validation doivent être étudiés avec plus que deux métamodèles et en plus grande dimension. Enfin, quand le meilleur métamodèle n’est pas connu au préalable, l’utilisation de l’EM semble être une bonne stratégie pour faire la sélection de métamodèle, pour éviter de se tromper sur le choix du métamodèle et pour améliorer la performance des méthodes AK.

Références

- [1] L. Faravelli, Response-surface approach for reliability analysis, *Journal of Engineering Mechanics*, 115 (1989), 2763–2781.
- [2] B. Sudret, A. Der Kiureghian, Comparison of finite element reliability methods., *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17 (2002), 337–348, 2002.
- [3] M. Papadrakakis, V. Papadopoulos, D. Lagaros, Structural reliability analysis of elastic-plastic structures using neural networks and Monte Carlo simulation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136 (1996), 145–163.
- [4] J.-M. Bourinet, Rare-event probability estimation with adaptive support vector regression surrogates, *Reliability Engineering and System Safety*, 150 (2016), 210–221.
- [5] H. M. Gomes, A. M. Awruch, Comparison of response surface and neural network with other methods for structural reliability analysis, *Structural Safety*, 26 (2004), 49–67.
- [6] M. Moustapha, J.-M. Bourinet, B. Guillaume, B. Sudret, Comparative study of Kriging and support vector regression for structural engineering applications, *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A : Civil Engineering*, 4 (2018), 04018005.
- [7] V. Dubourg, B. Sudret, F. Deheeger, Metamodel-based importance sampling for structural reliability analysis? *Probabilistic Engineering Mechanics*, 33 (2013), 47–57.
- [8] B. Sudret, Meta-models for structural reliability and uncertainty quantification, *Proc. Asian-Pacific Symposium on Structural Reliability and its Applications*, Singapore, 2012, 23—25, .
- [9] B. J. Bichon, M. S. Eldred, L. P. Swiler, S. Mahadevan, J. M. McFarland, Efficient global reliability analysis for nonlinear implicit performance functions, *AIAA journal*, 46 (2008), 2459–2468.
- [10] B. Echard, N. Gayton, M. Lemaire, AK-MCS : an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation, *Structural Safety*, 33 (2011), 145–154.
- [11] N. Lelièvre, P. Beaurepaire, C. Mattrand, N. Gayton, AK-MCSi : A Kriging-based method to deal with small failure probabilities and time-consuming models, *Structural Safety*. 73 (2018), 1–11.
- [12] V. S. Sundar, M. D. Shields, Reliability Analysis Using Adaptive Kriging Surrogates with Multi-model Inference, *ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part A : Civil Engineering*, 5 (2019), 04019004.
- [13] T. Goel, R. T. Haftka, W. Shyy, N. V. Queipo, Ensemble of surrogates, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33 (2007), 199–216.
- [14] E. Acar, M. Rais-Rohani, Ensemble of metamodels with optimized weight factors, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37 (2009), 279–294.
- [15] E. Acar, Various approaches for constructing an ensemble of metamodels using local measures, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42 (2010), 879–896,.
- [16] E. Sanchez, S. Pintos, N. V. Queipo, Toward an optimal ensemble of kernel-based approximations with engineering applications, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 36 (2008), 247–261.
- [17] X. Gu, J. Lu, H. Wang, Reliability-based design optimization for vehicle occupant protection system based on ensemble of metamodels, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 51(2015), 533–546.

- [18] L. E. Zerpa, N. V. Queipo, S. Pintos, J. L. Salager, An optimization methodology of alkaline–surfactant–polymer flooding processes using field scale numerical simulation and multiple surrogates, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 47 (2005), 197–208.
- [19] J. A. Hoeting, D. Madigan, A. E. Raftery, C. T. Volinsky. Bayesian model averaging : a tutorial, *Statistical Science*, 382–401, 1999.
- [20] A. E. Raftery, T. Gneiting, F. Balabdaoui, M. Polakowski, Using Bayesian model averaging to calibrate forecast ensembles, *Monthly Weather Review*, 133 (2005), 1155–1174.
- [21] H. Liu, S. Xu, X. Wang, J. Meng, S. Yang, Optimal weighted pointwise ensemble of radial basis functions with different basis functions, *AIAA Journal*, 3117–3133, 2016.
- [22] V. Dubourg, Adaptive surrogate models for reliability analysis and reliability-based design optimization, PhD thesis, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France, 2011.
- [23] D. Ginsbourger, C. Helbert, L. Carraro, Discrete mixtures of kernels for Kriging–based optimization, *Quality and Reliability Engineering International*, 24 (2008), 681–691.
- [24] M. Baudin, A. Dutfoy, B. Iooss, A. L. Popelin, OpenTURNS : An industrial software for uncertainty quantification in simulation, *Handbook of Uncertainty Quantification*, 2001–2038, 2017.