

Analyse de la non stationnarité et de la non gaussiannité des chargements vibratoires par la méthode MBD

B. COLIN^a

a. Nexter Systems , b.colin@nexter-group.fr

Résumé :

Dans un souci permanent de réduire le coût de possession de leurs matériels d'Armement futurs, les industriels de l'Armement sont de plus en plus souvent amenés à intégrer des technologies provenant du Secteur Civil, dont les performances fonctionnelles sont alors à garantir désormais dans un environnement complexe, réputé très sévère, avec des niveaux de fiabilité accrus et pour des durées de vie en forte augmentation.

Basé sur son retour d'expérience d'intégrateur de Systèmes d'armes terrestres (véhicules et artilleries), Nexter a pour ce faire déployé depuis 2005 une méthodologie de synthèse des chargements vibratoires et chocs, adaptée à ces enjeux industriels. De ces considérations techniques, il est alors apparu essentiel de pouvoir caractériser la non stationnarité des chargements vibratoires, inhérente aux conditions d'usage tout terrain de ses véhicules, ainsi que la non gaussiannité de ces derniers, générée par la forte occurrence des franchissements d'obstacles présents en situation réelle sur les terrains variés, mais également par les tirs d'armes principales et secondaires dont sont dotés les systèmes d'armes.

Devant la complexité de ce type de chargements mixtes (vibrations et chocs) à forts niveaux et très non stationnaires, une méthodologie de caractérisation stochastique des chargements vibratoires, dénommée « MBD : Méthode des Blocs Disjoints » a été développée par Nexter [1], [2], [3], en s'appuyant sur la notion classique des Spectres de Réponse (SR) utilisée dans le domaine de la personnalisation des essais [4], mais que l'on vient ici probabiliser, au sens SRX-SFX [5], [6], de manière à prendre en compte la variabilité des conditions d'usage des véhicules. Basée exclusivement sur une démarche probabiliste menée dans le domaine temporel, la méthode MBD est déroulée systématiquement sur l'ensemble des situations d'emploi (Roulage et Tir), en ayant au préalable testé la non stationnarité des chargements relevés in-situ par la technique des Run Test [7], qui constitue le prérequis à l'utilisation de la méthode MBD. Cette démarche innovante fait l'objet de la présentation qui suit.

Abstract :

In a permanent matter of ownership cost reduction of their futur Armement materials, defence Industrials often tend to integrate technologies from the civil sector. Consequently, it is now important to guarantee these civil technologies in a complex environment, known severe, with increased level of reliability and lifetime.

Based on its feedback of terrestrial weapon system integrator (vehicles and artillery), Nexter has deployed since 2005 a methodology of synthesis of vibrational and shock loads adapted to these industrial issues. From these technical considerations, it seemed essential to be able to characterize the non stationnarity of these loads which came from the all-terrain use of the vehicles. Also, the characterization of significance of the non gaussianity of these loads coming from obstruction clearance in real situation on various terrain but also from shots of primary and secondary weapon of armement system is inescapable.

Confrated to the complexity of these mixed types of loads (vibratory and shocks) at high levels and very non stationnary, a methodology of stochastic characterisation of vibratory loads name « BDM : Disjoint Block Method » has been developped by Nexter [1], [2], [3]. This method uses the classical notion of response spectra (RS) used in the tailorng test [4]. Here, the response spectra is probalised as SRX-SFX [5], [6], in order to take in consideration the variability of conditions of use of vehicles. Based exclusively on a probalistic approach in the time domain, the BDM method is always unrolled on all loads reveled by the Run Test [7], which is a requirement of the BDM method. This innovative approach is the subject of the following presentation.

Mots clefs : Méthode MBD, SRX-SFX, Processus stochastiques, Vibrations aléatoires, Non Gaussien, Non Stationnaire, Tests statistiques, Run Test

1 Introduction

Dans le cas général, les processus de vibrations mesurées sur les produits industriels en situation réelle d'utilisation sont de nature complexe. En effet, comme rappelé par un grand nombre d'industriels issus des Secteurs Aéronautique [8], [9], Automobile, Poids Lourds [10], [11], [12], Maritime [13] et du secteur Défense Terrestre [14], [15], les environnements générés par les porteurs développés dans ces secteurs industriels sont à caractère non stationnaire et non gaussien.

Face à ce type d'environnement complexe, les méthodes spectrales historiques, basées principalement sur l'hypothèse de gaussiannité ne sont désormais plus adaptées aux calculs des spectres de réponses (SR), sur lesquels s'appuient les principes de personnalisation de l'environnement mécanique, utilisés par les industriels en phase de validation expérimentale de leur produit. Il est donc désormais essentiel de pouvoir s'affranchir de cette hypothèse restrictive de gaussiannité, si l'on souhaite valider au juste nécessaire les conceptions des produits industriels et d'en limiter leur coût de possession. Dans cette optique, certains auteurs [16] ont proposées des méthodes spectrales capables de prendre en compte la nature non gaussienne des contraintes calculées ou mesurées, en s'appuyant sur les niveaux d'aplatissement (kurtosis) et d'asymétrie (skewness), inhérents aux modèles statistiques des états de contrainte estimés.

Cependant, ces méthodes spectrales non gaussiennes restent quelque peu limitées puisqu'elles ne s'appliquent dans un premiers temps qu'à des chargements dont les niveaux d'asymétrie sont nuls, voire très faibles. Par ailleurs, issue d'une démarche expérimentale empirique, liée au fait que les facteurs de correction obtenus [16] ne couvrent pas nécessairement l'exhaustivité des processus aléatoires non gaussiens rencontrés dans les secteurs industriels Civil et Militaire, il est apparu nécessaire de se tourner non plus vers des approches spectrales, mais vers des approches temporelles innovantes. Capables de traiter désormais des processus vibratoires non stationnaires et non gaussiens, ces nouvelles techniques développées autour de la MBD (Méthode des Blocs Disjoints) consistent à évaluer les effets d'endommagement dans les structures (modélisées simplement par des systèmes

étalons à 1 d.d.l), en s'appuyant sur des méthodes temporelles, et que l'on analyse sous l'angle statistique au travers d'une fenêtre de durée T_b déplacée dans le temps de façon chronologique.

Les effets d'endommagement de type dépassement de contrainte seuil et de dommage par fatigue sont alors analysés pour chaque fenêtre temporelle de durée T_b , en prenant soin d'éviter tout recouvrement temporel entre deux fenêtres successives, afin de pouvoir évaluer la corrélation temporelle existant entre ces blocs disjoints (cas de la MBD corrélée [17]). De ce fait, la construction des modèles statistiques locaux (au sens T_b) est établie pour chaque d.d.l en ce qui concerne les deux variables aléatoires d'intérêt, définies chacune par un n-échantillon aléatoire dont le niveau d'indépendance est fonction de la corrélation temporelle des séries chronologiques ainsi obtenues.

La méthode des blocs disjoints (MBD) consiste ensuite à s'ajuster au mieux, par inférence statistique, à des lois analytiques capables de prendre en compte les niveaux d'aplatissement (kurtosis) et d'asymétrie (skewness) estimés sur les états de contrainte calculés pour chaque d.d.l et chaque mode de défaillance considéré (contrainte max et dommage par fatigue en l'occurrence). Sur la base de ces modèles statistiques locaux, au sens T_b , ces derniers sont ensuite extrapolés sur la durée de vie réelle T_v du produit, donnant lieu à l'établissement de modèles statistiques globaux, exploitables désormais sur le profil de vie des produits (plusieurs années d'utilisation) grâce à l'utilisation des principes statistiques gouvernés par :

- la Théorie des Valeurs Extrêmes (TVE) en ce qui concerne le mode d'endommagement de type dépassement de contrainte seuil σ_{ext} ou Z_{ext} ,
- le Théorème Central Limite (TCL) en ce qui concerne le mode d'endommagement de type dommage par fatigue D_p .

2 Principe de la Méthode MBD

La méthode MBD est une méthode d'analyse statistique permettant dans un premier temps de comprendre la statistique locale univariée des effets d'endommagement (Z_{ext} et D_p), calculés au travers de chaque système étalon (f_0 , Q), caractérisé par son déplacement relatif $z(t)$ sur une durée de mesure T donnée. Les déplacements relatifs $z(t)$ sont évalués dans le domaine temporel, pour chaque système étalon de fréquence de résonance f_0 (avec f_0 compris entre f_0^{min} et f_0^{max}), en s'appuyant sur la technique FOH (First Order Hold), utilisée pour la reconstruction mathématique de la réponse $z(t)$ échantillonnée [18]. La contrainte uni-axiale $\sigma(t)$ dans le système étalon est ensuite évaluée en considérant que le processus de contrainte reste proportionnel au déplacement relatif calculé et ceci quelle que soit la fréquence propre f_0 considérée. Pour ce faire un coefficient de proportionnalité K est rentré par le spécificateur et qui en général est pris égale à l'unité, mais que l'on peut personnaliser à sa convenance.

L'analyse par blocs disjoints de durée T_b est donc effectuée sur chaque déplacement relatif $z(t)$, filtré chronologiquement par l'histogramme de classification des valeurs efficaces locales. Cette classification est issue de la procédure du « Run Test » réalisée initialement sur le processus d'excitation $\ddot{x}(t)$ pour en caractériser sa nature non stationnaire, comme illustré par la Figure 1 présentée ci-après et ceci pour les deux modes d'endommagement considéré, à savoir :

- Déplacement d'un niveau de contrainte seuil, $\sigma_{ext}(\omega)=K.Z_{ext}(\omega)$, qui représente ici la variable aléatoire locale (au sens T_b) de la contrainte extrême des processus aléatoires de contrainte $\sigma(t,\omega)=K.z(t,\omega)$ subie par chaque d.d.l sur la durée de mesure T ,
- Endommagement par fatigue, $D_p(\omega)$, qui représente ici la variable aléatoire locale (au sens T_b) de l'endommagement par fatigue généré au sein de chaque d.d.l par les processus aléatoires de contrainte $\sigma(t,\omega)=K.z(t,\omega)$ de durée T . A ce stade le calcul

d'endommagement local $D_p(\omega)$, appelé également endommagement partiel est calculé par la méthode Rainflow Counting (RFC) sur la durée des blocs T_b [19], qui doit être identique à la durée de bloc d'analyse retenue au niveau du « Run Test ». Il est en effet essentiel de conserver à l'identique la durée T_b retenue pour la classification de la non stationnarité des signaux de mesures vibratoires avec celle retenue pour l'obtention des $n(i)$ -échantillons aléatoires d'endommagement Z_{ext} et D_p pour chacune des classes i considérée ($i=1$ à N_c) et obtenues à l'issue du « Run Test ».

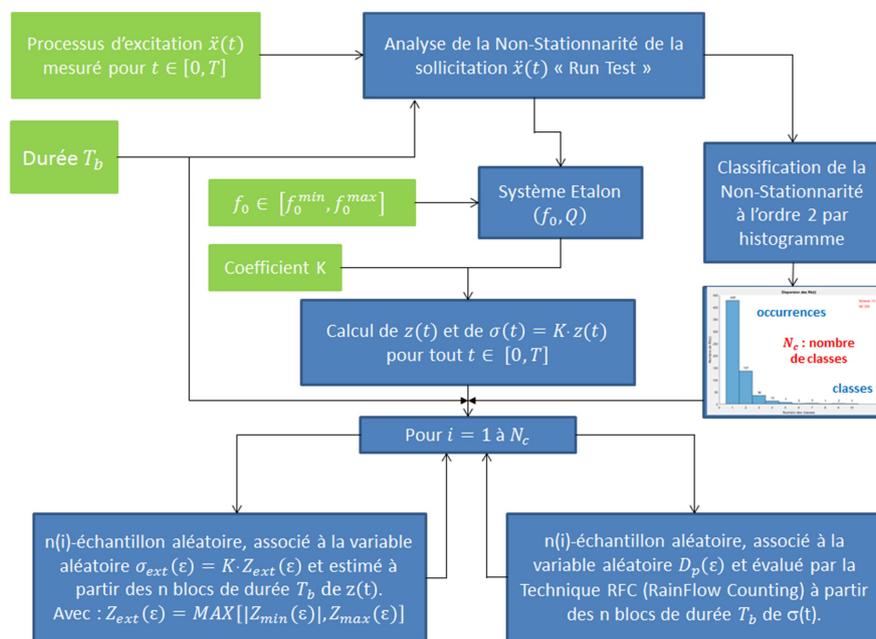


Figure 1 : Démarche d'obtention des n -échantillons aléatoires, associés aux v.a d'endommagement d'intérêt $Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$

Cette analyse statistique locale effectuée sur les variables aléatoires d'intérêt $Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$ est ensuite transposée sur une analyse statistique globale par les principes méthodologiques de la TVE et du TCL présentés ci-après. Cette approche statistique Locale-Globale permet alors d'extrapoler le comportement des lois statistiques, acquises au sens T_b , vers celui de lois statistiques globales, associées aux variables aléatoires globales $Z_{sup}(\omega)$ et $D_c(\omega)$ et évaluées au sens de la durée de vie T_v du profil d'emploi système (avec $T_v \gg T$).

Cette stratégie d'inférence statistique à deux niveaux (Locale-Globale) est donc de nature à permettre l'extrapolation des queues de distribution des variables aléatoires d'endommagement $\sigma_{ext}(\omega) = K \cdot Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$, associées respectivement aux calculs des spectres de réponses de type SRE et SDF, historiquement calculés de façon déterministe sur toute la durée de mesure T . En pouvant désormais extrapoler de façon probabiliste les contraintes extrêmes et les niveaux d'endommagement par fatigue, subis par chaque système étalon sur les durées de vie T_v des systèmes étudiés, la méthode MBD constitue donc de ce fait une méthode de personnalisation stochastique très générale capable de traiter de n'importe quelle situation d'environnement non stationnaire et non gaussienne, contrairement aux méthodes spectrales ou déterministes du passé.

Cette extrapolation statistique est appliquée sur chaque classe stationnaire du signal analysé, en pondérant le facteur d'extrapolation temporelle $M = T_v / T_b$ par l'occurrence de chacune des classes considérées, et ceci dans l'optique d'évaluer avec précision les quantiles $Z_{sup,\alpha}$ et $D_{c,\alpha}$ associés aux formalismes $SRE_\alpha(f_0)$ et $SDF_\alpha(f_0)$, qui correspondent aux Spectres de Réponse à risque de dépassement α donné, dénommés également SRX et SFX. Introduits historiquement sur les méthodes spectrales de calcul des SRX [5] et des SFX [6] pour le cas des processus aléatoires stationnaires et

gaussiens, la méthode MBD permet désormais de le faire simplement sur des processus non stationnaires et non gaussiens, en s'appuyant sur des méthodes temporelles d'analyse statistique avancées et jusqu'ici peu utilisées dans le cadre des processus stochastiques.

L'analyse statistique réalisée par le principe de la MBD permet donc de synthétiser l'information d'un processus d'environnement aléatoire quelconque, représentée par une série de mesures physiques (accélération en générale) acquises sur une durée limitée T, afin de permettre l'estimation probabiliste des variables d'endommagement d'intérêt (Z_{ext} et D_p) sur un profil d'emploi système, dont la durée de vie T_v est souvent égale à plusieurs années. Cette analyse qui suppose en préliminaire l'analyse de la stationnarité du processus aléatoire mesuré $\ddot{x}(t)$ s'effectue en déroulant les différentes étapes illustrées par la Figure 2 qui suit, à savoir :

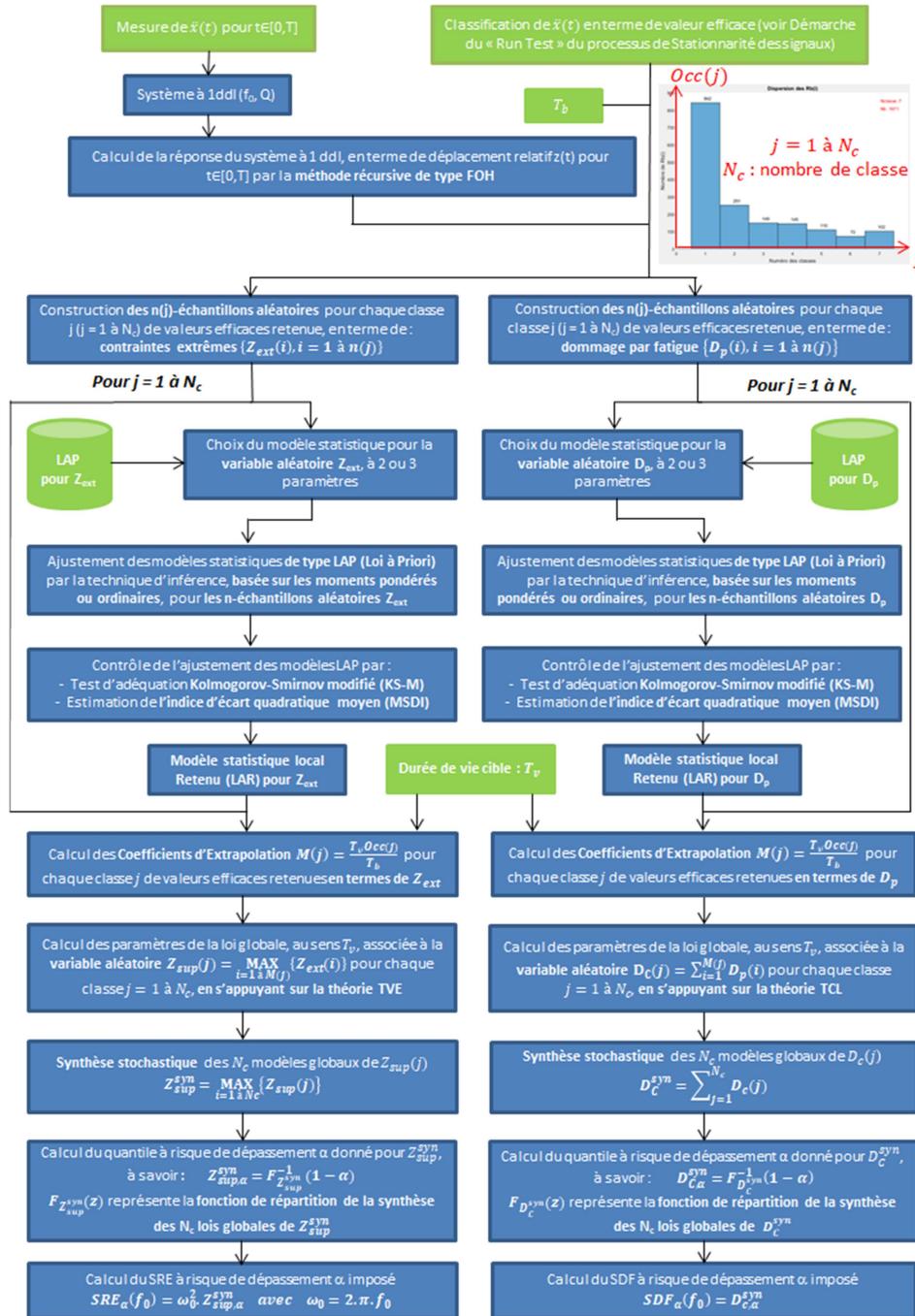


Figure 2 : Approche MBD associée à l'analyse statistique des processus stochastiques d'excitation vibratoire et de réponse en contrainte

3 Test de stationnarité

Conformément aux principes de base du Traitement du Signal [20], un signal mesuré pour une situation d'environnement réel donnée, se doit d'être systématiquement considérée comme étant une réalisation issue d'un processus stochastique. Cette réalisation mesurée sur une durée restreinte T par rapport à la durée de vie T_v du profil d'emploi système fait ensuite appel aux techniques d'extrapolation de la méthode MBD, comme explicité précédemment. Par ailleurs, sachant que la caractérisation d'une situation d'environnement en terme d'endommagement (par dépassement de contrainte seuil et/ou par fatigue), basée sur la modélisation statistique des processus aléatoires, n'est possible que si ces derniers sont supposés stationnaires et ergodiques, il est nécessaire de vérifier ces hypothèses avant de procéder au traitement des signaux mesurés.

Dans le cas des processus aléatoires, la stationnarité au sens strict est requise, nécessitant de démontrer l'égalité entre les moments statistiques et les moments temporels à l'ordre n (n étant pris égale à 4 en général). Devant la complexité, voire l'impossibilité de démontrer la stationnarité au sens strict, la stationnarité au sens large (stabilité des moments d'ordre 2 du signal mesuré au cours du temps) est jugée dans la pratique, comme étant un prérequis suffisant mais nécessaire au traitement statistique des signaux mesurés par la méthode MBD [17]. Sur la base de ces considérations techniques, l'ergodicité du processus est alors admise et constitue donc l'hypothèse de base fondamentale permettant d'appliquer la méthode MBD sur les signaux mesurés, au travers d'un processus de traitement temporel, alors que ce dernier est destiné par essence à la construction des modèles statistiques des variables d'endommagement de type dépassement de contrainte seuil (notion de type SRE) et de type fatigue vibratoire (notion de type SDF).

La technique du « Run Test » est ici utilisée dans un premier temps pour caractériser le niveau de non stationnarité présent dans le signal mesuré, afin de déterminer la nécessité ou non de classifier cette dernière, au sens du moment d'ordre 2. Le « Run Test » est une méthode statistique non paramétrique basée, comme pour la MBD sur le principe consistant à analyser le signal mesuré sur un nombre de blocs disjoints N_b , de durée T_b donnée (durée identique à celle retenue pour le processus de traitement de la MBD), et sur lequel la valeur efficace locale centrée au sens T_b est calculée $\{E_b(i), i=1 \text{ à } N_b\}$, et qui correspond en fait à la valeur efficace locale, corrigée de sa valeur moyenne locale au sens T_b . Cette valeur efficace locale centrée des blocs de signaux $E_b(i)$ est ensuite comparée, au travers d'un Critère Statistique donné $CS(\lambda)$, à la valeur moyenne des valeurs efficaces locales centrées, \bar{E}_b du signal centré et mesuré sur la durée d'acquisition $T=N_b.T_b$. Le Critère Statistique $CS(\lambda)$ est associé à un indice λ qui prend les valeurs 0, 1 ou 2 selon l'usage, sachant que plus la valeur de λ est faible et plus ce critère est sélectif en matière de stationnarité.

Cette technique du « Run Test » est donc basée sur la définition d'un « Run », qui correspond à une séquence d'observations identiques (au sens du critère statistique retenu), suivie et ou précédée par une observation de nature différente, voire par aucune observation du tout. Chaque observation réalisée sur un bloc j de durée T_b est alors classée en deux événements mutuellement exclusifs, décrits par la variable aléatoire $V_\lambda(j)$ associée au Critère Statistique $CS(\lambda)$ retenu, qui dans le cadre de la non stationnarité au sens large décrite précédemment, est fonction de $E_b(j)$, de \bar{E}_b et de σ_{E_b} (écart type des valeurs efficaces locales centrées, du signal mesuré et centré sur la durée d'acquisition T).

$$\text{Cas } \lambda = 0 : V_\lambda(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } E_b(j) > \bar{E}_b \\ 0 & \text{si } E_b(j) \leq \bar{E}_b \end{cases} \quad \text{Cas } \lambda \neq 0 : V_\lambda(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } |E_b(j) - \bar{E}_b| > \lambda \cdot \sigma_{E_b} \\ 0 & \text{si } |E_b(j) - \bar{E}_b| \leq \lambda \cdot \sigma_{E_b} \end{cases} \quad (1)$$

Avec $\lambda = 0, 1$ ou 2 selon l'usage

Sur la base de ce processus de traitement temporel par blocs disjoints, la séquence aléatoire $\{V_\lambda(j), j=1 \text{ à } N_b\}$ est évaluée, permettant de définir le nombre de Runs observé $\hat{R}(\lambda)$, contenu dans le signal mesuré que l'on compare alors à l'estimateur de la moyenne statistique $\hat{\mu}_R(\lambda)$ de la variable aléatoire $R(\lambda)$ associée au « Run Test » et que l'on appelle $I_{NS}(\lambda)$ pour Index de Non Stationnarité.

$$I_{NS}(\lambda) = \hat{R}(\lambda) / \hat{\mu}_R(\lambda) \quad (2)$$

$$\text{Sachant que : } \hat{\mu}_R(\lambda) = \frac{2 \cdot N_0(\lambda) \cdot N_1(\lambda)}{N_b} + 1 \quad \text{avec } N_0(\lambda) + N_1(\lambda) = N_b \quad (3)$$

$$\text{Et où : } \begin{cases} N_0(\lambda) : \text{nombre d'observations tel que } V_\lambda(j) = 0 \text{ pour } j = 1 \text{ à } N_b \\ N_1(\lambda) : \text{nombre d'observations tel que } V_\lambda(j) = 1 \text{ pour } j = 1 \text{ à } N_b \end{cases} \quad (4)$$

Un index $I_{NS}(\lambda)$ proche de l'unité constitue un indicateur de stationnarité pertinent du signal mesuré, qui caractérise de ce fait le signal au même titre que les moments temporels de ce dernier. L'estimateur de l'écart type $\hat{\sigma}_R(\lambda)$ de cette variable aléatoire $R(\lambda)$ du « Run Test » est également calculé pour permettre d'évaluer le caractère non-stationnaire du signal mesuré, en s'appuyant sur la notion des tests statistiques. Pour ce faire, le calcul de l'intervalle de confiance $IC_\delta[R(\lambda)]$ de la variable aléatoire $R(\lambda)$ pour un niveau de signification δ donné (compris entre 10% et 25% selon l'usage) est alors calculé, sachant que $R(\lambda)$ tend asymptotiquement vers une loi normale.

$$\begin{cases} IC_\delta[R(\lambda)] = \hat{\mu}_R(\lambda) + \frac{1}{2} \pm k_\delta \cdot \hat{\sigma}_R(\lambda) & \text{si } \hat{R}(\lambda) \geq \hat{\mu}_R(\lambda) \\ IC_\delta[R(\lambda)] = \hat{\mu}_R(\lambda) - \frac{1}{2} \pm k_\delta \cdot \hat{\sigma}_R(\lambda) & \text{si } \hat{R}(\lambda) < \hat{\mu}_R(\lambda) \end{cases} \quad \text{avec : } k_\delta = \begin{cases} 1,64 & \text{pour } \delta = 10\% \\ 1,28 & \text{pour } \delta = 20\% \\ 1,15 & \text{pour } \delta = 25\% \end{cases} \quad (5)$$

Les sorties de la procédure de traitement du « Run Test » sont $\{\hat{R}(\lambda), \hat{\mu}_R(\lambda), \hat{\sigma}_R(\lambda)\}$, et l'indice de Non Stationnarité $I_{NS}(\lambda)$ qui permettent de statuer sur la nécessité ou non de classifier la non stationnarité du signal mesuré (définie en terme d'histogramme empirique des valeurs efficaces locales centrées), comme présentée par la Figure 3 qui suit.

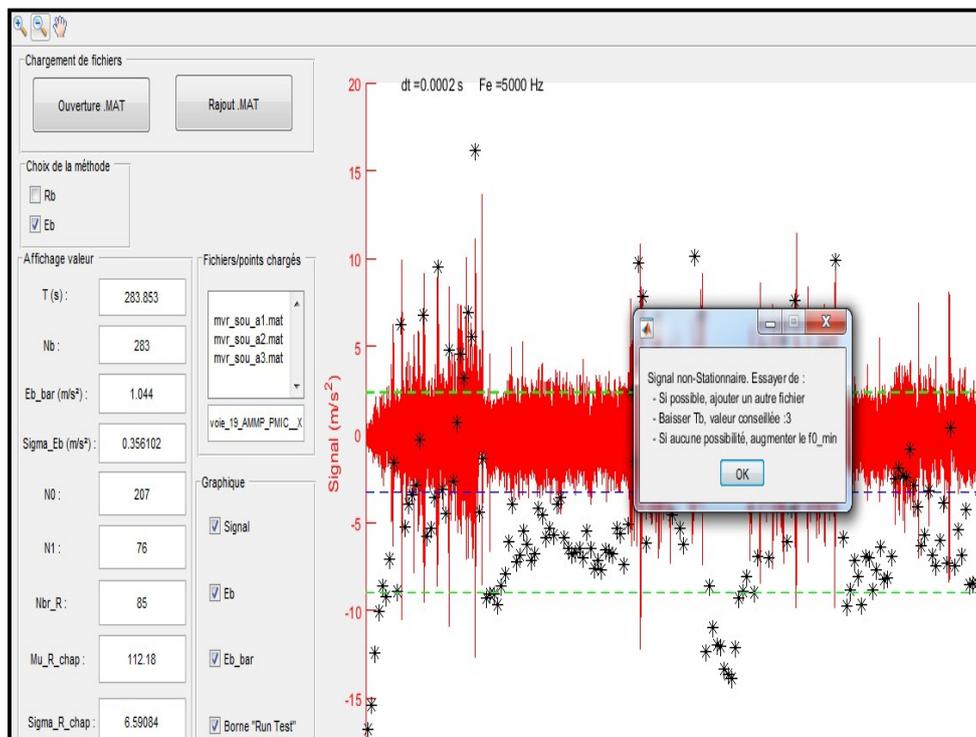


Figure 3 : Traitement de la Non Stationnarité des signaux mesurés par la technique du « Run Test »

4 Les différentes Etapes de la MBD

Ainsi pour chaque classe stationnaire du processus aléatoire d'environnement étudié, obtenu par la procédure du « Run Test » décrit précédemment, les différentes étapes de la méthode MBD sont :

- Etape 1** Construction des n-échantillons aléatoires des variables aléatoires d'intérêt $Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$ pour chaque système étalon (f_0, Q) , caractérisé par son déplacement relatif $z(t)$, évalué par la méthode FOH [17]. Le processus d'environnement aléatoire étant dans la pratique non gaussien, les valeurs maximales $Z_{max}(\omega)$ et minimales $Z_{min}(\omega)$ ne sont donc pas nécessairement symétriques, ce qui conduit à retenir comme variable d'intérêt $Z_{ext}(\omega) = \text{Max}[|Z_{min}(\omega)|, Z_{max}(\omega)]$ pour caractériser la contrainte locale seuil du processus de contrainte aléatoire. Par ailleurs, pour ce qui est de la variable d'endommagement par fatigue locale $D_p(\omega)$, cette dernière est estimée par la technique de Rain Flow Counting (RFC), qui constitue la méthode de calcul la plus pertinente par rapport à la méthode Peak-Valley (PV) utilisée historiquement dans les approches de personnalisation basées sur les techniques d'analyse spectrales [21],
- Etape 2** Choix des lois de probabilité théorique, définies a priori (LAP) pour chacune des deux variables d'endommagement d'intérêt $Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$. Les lois locales d'endommagement a priori (LAP) sont principalement à 2 ou 3 paramètres, ayant par ailleurs favorablement un support positif, de par la nature physique des variables aléatoires d'intérêt considérées,
- Etape 3** Ajustement des LAP pour chacune des deux variables d'endommagement d'intérêt, en s'appuyant sur la technique d'inférence statistique, basée sur les moments pondérés ou ordinaires,
- Etape 4** Contrôle des ajustements réalisés entre les fréquences expérimentales des valeurs observées par blocs pour les deux variables aléatoires d'intérêt $Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$ et les fréquences théoriques des mêmes valeurs, calculées à partir des fonctions de répartition des LAP considérées précédemment. Ce contrôle s'effectue donc à partir d'un test d'adéquation classique qui consiste à comparer l'adéquation de plusieurs LAP possibles, afin de retenir la meilleure loi pour chacune des deux variables d'intérêt considérées. Cette procédure d'ajustement des modèles statistiques locaux des processus de contrainte $\sigma(t, \omega) = K \cdot z(t, \omega)$ est alors réalisée pour chaque système étalon (f_0, Q) considéré. Le test d'adéquation retenu dans le cas de la MBD est le test de Kolmogorov-Smirnov, qui est ici légèrement modifié pour le centrer sur le comportement des queues de distribution des lois a priori (LAP). A l'issue du test d'adéquation KS-M, les lois retenues (LAR) pour $Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$ sont alors identifiées et caractérisent alors les modèles statistiques des variables d'endommagement $Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$ locales, au sens T_b ,
- Etape 5** Calcul des coefficients d'extrapolation temporelle $M(j)$ pour chaque classe j considérée ($j=1$ à N_c). Ces coefficients sont estimés en s'appuyant sur les valeurs de T_b et T_v , associées respectivement à la durée de bloc de l'analyse MBD et à la durée de vie cible de la Situation d'environnement analysée. A ce stade, il est important de signaler que ces coefficients d'extrapolation peuvent être estimés à partir également d'occurrences kilométriques, conduisant alors les spécificateurs à raisonner en potentiel kilométrique de roulage cible et non plus en durée de vie sur leur système (cas des véhiculiers du monde Civil ou Militaire),
- Etape 6** Extrapolation des modèles statistiques locaux, associés aux variables aléatoires locales $Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$ en modèles statistiques globaux, associés désormais aux variables aléatoires globales $Z_{sup}(\omega)$ et $D_c(\omega)$, qui caractérisent désormais le processus de contrainte $\sigma(t, \omega) = K \cdot z(t, \omega)$, dont la durée de sollicitation est égale à la durée de vie cible T_v considérée. Cette extrapolation est réalisée en s'appuyant respectivement sur le principe de la TVE pour

$Z_{sup}(\omega)$ et sur le principe du TCL pour $D_c(\omega)$, en prenant comme coefficient d'extrapolation M le rapport (T_v/T_b) , que l'on pondère par le coefficient $Occ(j)$, correspondant à l'occurrence temporelle de chaque classe j ($j=1$ à N_c) dans le cas des processus non stationnaires,

Etape 7 Synthèse stochastique des N_c modèles statistiques globaux afférents aux variables aléatoires $Z_{sup}(\omega)$ et $D_c(\omega)$, en s'appuyant sur le principe que chaque classe j ($j=1$ à N_c) correspond à une Sous Situation d'environnement vibratoire stationnaire de la Situation non stationnaire étudiée. Et il est alors admis pour ce faire que les N_c Sous Situations stationnaires ainsi identifiées sont indépendantes les unes avec les autres et peuvent être alors synthétisées en les considérant en série pour en évaluer leurs effets résultant, en termes de contraintes extrêmes et d'endommagement par fatigue,

Etape 8 Estimation des quantiles à risque de dépassement α imposé (fonction de la criticité de l'équipement) pour les variables aléatoires globales d'intérêt $\sigma_{sup}(\omega)=K.Z_{sup}(\omega)$ et $D_c(\omega)$, qui représentent respectivement la contrainte maximale globale et l'endommagement par fatigue cumulé sur la durée T_v du processus aléatoire considéré.

5 Etape 1 : Construction des n-échantillons aléatoires

Pour chaque système étalon (f_0, Q) considéré et caractérisé par sa réponse en contrainte $z(t)$, l'Etape 1 de la MBD consiste à analyser cette réponse au travers d'une fenêtre de durée T_b constante et égale à la durée de bloc retenue initialement pour étudier la stationnarité du processus d'excitation. Pour chaque durée T_b donnée, la valeur extrême $Z_{ext}(\omega)$ est alors retenue, permettant de construire le n-échantillon aléatoire de l'excitation, en terme de contrainte extrême. Puis on fait la même chose pour le dommage partiel $D_p(\omega)$, en s'appuyant sur la méthode de comptage de type RFC, ce qui permet alors de construire le n-échantillon aléatoire de l'excitation, en terme d'endommagement par fatigue. Ceci est illustré par la Figure 4 qui suit.

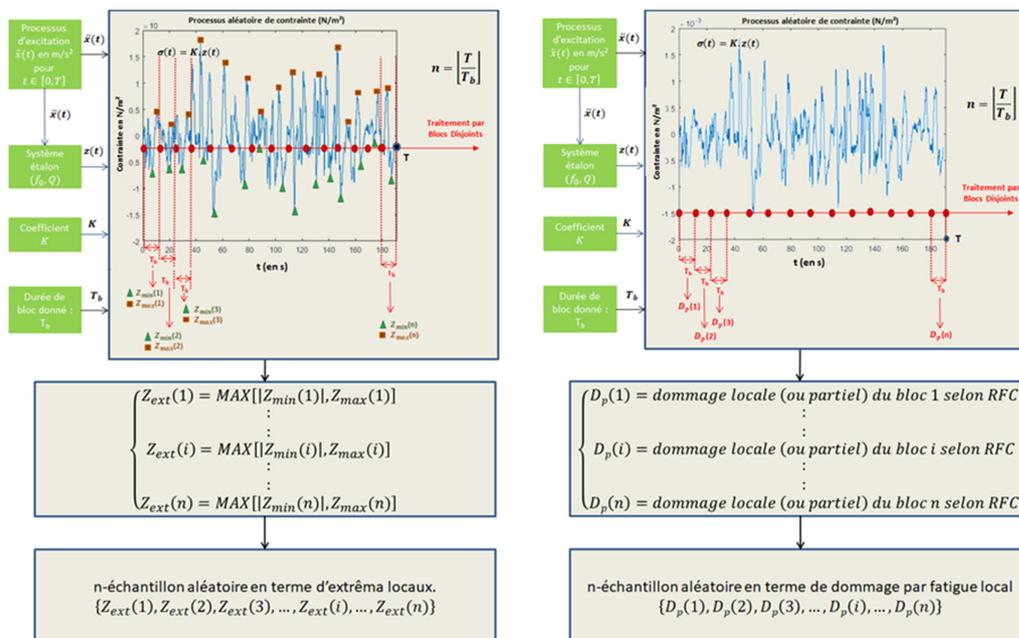


Figure 4 : Synoptique de construction des n-échantillons aléatoires des variables d'intérêt $Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$

6 Etape 2 : Choix des lois locales d'endommagement (LAP)

Pour chaque variable aléatoire d'intérêt $Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$ définie précédemment, un nombre de lois de distribution à deux ou trois paramètres peuvent être considérées pour chacune d'entre elles, sachant que les lois diffèrent selon la nature de la variable d'intérêt. Les lois proposées pour la variable d'intérêt de type contrainte extrême, dans le cadre de la MBD sont :

- GUM (μ , β) : loi de Gumbel, appelée très souvent double exponentielle (ou EV1 : Extreme Value 1) et qui joue un rôle fondamental dans le cas des processus Gaussiens [21],
- GEV (μ , β , k) : lois des valeurs extrêmes généralisées, de type EV2 (Extreme Value 2) si k négatif, et qui correspond à la loi appelée communément loi de FRECHET,
- GEV (μ , β , k) : lois des valeurs extrêmes généralisées, de type EV3 (Extreme Value 3) si k positif, et qui correspond à la loi appelée communément loi de WEIBULL négatif,
- WB2P (η , β) : loi de Weibull à deux paramètres et qui constitue une loi centrale pour le recalage de la variable Z_{ext} en terme de coefficient de variation, lorsque le processus est non gaussien présentant un caractère dissymétrique positif ou négatif [1],
- WB3P (η , β , ε) : loi de Weibull à trois paramètres et qui constitue une loi centrale pour le recalage de la variable Z_{ext} en terme d'asymétrie ou d'aplatissement, lorsque le processus est non gaussien présentant un caractère dissymétrique (>0 ou <0) et leptokurtique ou platikurtique,
- LN2P (μ , σ) : loi Log-Normale à deux paramètres (Galton) et qui constitue une loi centrale pour le recalage de la variable Z_{ext} en terme de coefficient de variation, lorsque le processus est non gaussien présentant un caractère essentiellement dissymétrique à valeur positive (distribution étalée à droite de sa valeur moyenne) [1],
- LN3P (μ , σ , ε) : loi Log-Normale à trois paramètres et qui constitue une loi centrale pour le recalage de la variable Z_{ext} en terme d'asymétrie ou d'aplatissement, lorsque le processus est non gaussien présentant un caractère essentiellement dissymétrique à valeur positive et de type leptokurtique,

Les lois proposées pour la variable d'intérêt de type endommagement par fatigue, dans le cadre de la MBD sont :

- GAUSS (μ , σ^2) : loi de Gauss, appelée très souvent loi normale et qui joue un rôle fondamental dans le cas des processus Gaussiens,
- WB2P (η , β) : loi de Weibull à deux paramètres et qui constitue une loi centrale pour le recalage de la variable D_p en terme de coefficient de variation, lorsque le processus est non gaussien présentant un caractère dissymétrique positif ou négatif [2],
- WB3P (η , β , ε) : loi de Weibull à trois paramètres et qui constitue une loi centrale pour le recalage de la variable D_p en terme d'asymétrie ou d'aplatissement, lorsque le processus est non gaussien présentant un caractère dissymétrique (>0 ou <0) et leptokurtique ou platikurtique,
- LN2P (μ , σ) : loi Log-Normale à deux paramètres (Galton) et qui constitue une loi centrale pour le recalage de la variable D_p en terme de coefficient de variation, lorsque le processus est non gaussien présentant un caractère essentiellement dissymétrique à valeur positive (distribution étalée à droite de sa valeur moyenne) [2],
- LN3P (μ , σ , ε) : loi Log-Normale à trois paramètres et qui constitue une loi centrale pour le recalage de la variable D_p en terme d'asymétrie ou d'aplatissement, lorsque le processus est non gaussien présentant un caractère essentiellement dissymétrique à valeur positive et de type leptokurtique.

7 Etape 3 : Ajustement des modèles statistiques locaux (LAP)

Cette étape est fondamentale car la validité des calculs des SRE et des SDF à risque de dépassement α des processus aléatoires d'excitation non gaussiens dépend essentiellement du choix du modèle statistique local retenu et plus particulièrement de son type à 2 ou 3 paramètres. En effet, les valeurs de SRE_α et de SDF_α recherchées étant au sens des processus stochastiques identifiées sur les modèles statistiques globaux, comme discuté au §2, il est important d'assurer une bonne qualité d'ajustement des modèles statistiques locaux (LAP) au niveau des queues de distribution de ces lois, situées à droite de leurs valeurs moyennes. Plusieurs techniques d'inférence statistiques sont alors utilisables pour définir les estimateurs des lois LAP définies précédemment : méthode des moments ordinaires (MMO) ou méthode des moments pondérés (MMP).

Dans le cas de la méthode MBD, la technique d'inférence utilisée est celle des moments pondérés, sachant que cette dernière permet d'obtenir des approximations asymptotiques des distributions d'échantillonnage meilleures que dans le cas de l'inférence classique, utilisant la méthode des moments ordinaires (retenue initialement en [1] et [2]). Par ailleurs, il est reconnu que la méthode MMP est moins sensible à la présence de valeurs aberrantes (artefact, spikes,...) que la méthode MMO utilisée couramment en statistique descriptive [23], ce qui dans le cas des processus aléatoires mesurés est un réel atout. De plus, les études comparatives entre MMO et MMP ont montrées que la technique d'inférence par la méthode des moments pondérés nécessite un nombre d'observations des variables aléatoires plus faible que la technique basée sur les moments ordinaires, pour une précision statistique sur les paramètres des LAP identique.

De ce fait les estimateurs des paramètres des LAP, associées aux variables aléatoires locales d'intérêt $Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$ de la MBD sont obtenues en s'appuyant sur le synoptique de la Figure 5 qui illustre la procédure de calcul utilisée pour l'estimation des paramètres des lois par la théorie des L-moments non biaisée, et qui repose sur l'hypothèse de n-échantillons aléatoires indépendants et identiquement distribués (i.i.d).

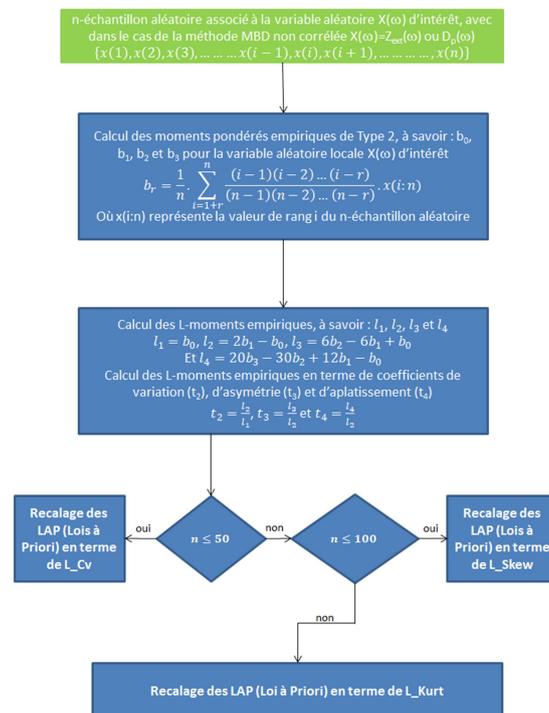


Figure 5 : Inférence statistique des paramètres des LAP, associées aux variables d'intérêt par la théorie des L-moments non biaisés

Comme présenté par le synoptique précédent, la technique d'inférence statistique des paramètres $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ des LAP mise en place dans le cadre de la MBD est basée sur la théorie des L-moments de Hosking [24] en s'appuyant sur la méthode d'ajustement de type MMP. A l'instar de la méthode d'ajustement classique de type MMO, la méthode d'ajustement de type MMP consiste à évaluer les L-moments empiriques l_1, l_2, l_3 et l_4 des n -échantillons aléatoires aux valeurs théoriques $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 dont les expressions analytiques, fonction des paramètres $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ des LAP considérées dans la MBD, sont fournies dans le Tableau 1 de synthèse, situé en annexe de cet article.

Cette procédure de calculs permet alors d'estimer les estimateurs $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \widehat{\theta}_3, \widehat{\theta}_4)$ de chacun des paramètres des LAP considérées. Le nombre p de L-moments $\{\lambda_j, j=1 \text{ à } p\}$ à recalculer est bien évident égale au nombre de paramètres des LAP retenues pour la MBD, en sachant que ce nombre p de paramètres est fonction bien évidemment de la valeur n des n -échantillons aléatoires considérés. Plus le nombre n est élevé et plus le nombre p de paramètres des LAP peut être important.

8 Etape 4 : Contrôle de l'ajustement des LAP et obtention des LAR

Ayant recalculé les paramètres des LAP par la technique d'inférence MMP pour les deux variables d'intérêt $Z_{\text{ext}}(\omega)$ et $D_p(\omega)$, le contrôle de l'ajustement de ces LAP est alors nécessaire dans le but de conserver la LAR (Loi à Retenir) la plus pertinente et la plus efficace pour l'extrapolation temporelle de l'étape 6 qui suit. Cet ajustement statistique est en général obtenu par un test d'adéquation non paramétrique. Le test du χ^2 étant réputé peu puissant par les statisticiens, la MBD s'appuie favorablement sur le test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov (KS), que l'on va ici modifier pour le centrer sur l'ajustement des queues de distribution des LAP, situées à droite de leurs valeurs moyennes. On parlera alors de Test KS-M que l'on estime par la statistique classique $D_m(\omega)$ établie essentiellement à partir des m observations les plus grandes du n -échantillon considéré ($m < n$). Ce test consiste donc à mesurer la plus grande distance D_m entre la fonction de répartition théorique $F_X^{\text{thé}}(x)$, calée sur les estimateurs $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \widehat{\theta}_3, \widehat{\theta}_4)$ des paramètres $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ de la LAP concernée, et la fonction de répartition expérimentale $F_X^{\text{exp}}(x)$ ou empirique au niveau des m plus grandes valeurs du n -échantillon aléatoire considéré.

Le contrôle de l'ajustement des LAP est à réaliser sur le même principe pour les modèles statistiques locaux des SRE et des SDF de chaque classe considérée et pour chaque fréquence f_0 des systèmes étalons à l.d.d.l considéré.

La fonction de répartition empirique $F_X^{\text{exp}}(x)$, se calcule dans la théorie classique de Kolmogorov-Smirnov, par la relation (6) suivante :

$$F_X^{\text{exp}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < x_{1:n} \\ \frac{i}{n} & \text{pour } x_{i:n} \leq x < x_{i+1:n} \text{ pour } i = 1 \text{ à } n-1 \\ 1 & \text{pour } x \geq x_{n:n} \end{cases} \quad (6)$$

Où : n représente le nombre de valeurs du n -échantillon aléatoire considéré et $x_{i:n}$ représente la valeur de rang i de ce n -échantillon aléatoire.

L'adéquation entre la fonction de répartition empirique $F_X^{\text{exp}}(x)$ et la fonction de répartition théorique $F_X^{\text{thé}}(x)$ est alors évaluée par la distance D_m de Kolmogorov-Smirnov, qui correspond à la distance de la norme uniforme entre ces deux fonctions de répartition. Pour calculer cette distance D_m , il suffit

d'évaluer la différence entre $F_X^{thé}(x)$ et $F_X^{exp}(x)$ aux m plus grandes valeurs $x_{i:n}$ ($i=n-m+1, n$) du n -échantillon aléatoire considéré, comme défini ci-après :

$$D_m = \max_{n-m \leq i \leq n-1} \{ |F_X^{exp}(x_{i:n}) - F_X^{thé}(x_{i:n})|, |F_X^{exp}(x_{i+1:n}) - F_X^{thé}(x_{i:n})| \} \quad (7)$$

L'ajustement de la LAP, associée au modèle statistique local, de fonction de répartition $F_X^{thé}(x)$, est d'autant plus satisfaisant que la valeur D_m calculée est faible. La loi LAR au sens du Test d'adéquation KS-M correspond de ce fait à la LAP dont la valeur D_m est la plus petite. Dans la pratique, on retient m telle que :

$$\frac{m}{n} = \begin{cases} 0,4 & \text{si } n \leq 50 \\ 0,3 & \text{si } 50 < n \leq 100 \\ 0,2 & \text{si } 100 < n \leq 150 \\ 0,1 & \text{si } n > 150 \end{cases} \quad (8)$$

A ce stade, le contrôle de l'ajustement des LAP peut également s'effectuer en s'appuyant non plus sur un test statistique classique d'adéquation, mais sur une technique de calcul simple d'écart entre un modèle statistique prédictif (modèle théorique) et un modèle statistique empirique (modèle expérimental). Pour ce faire un des critères d'écart le plus pertinent à retenir de par sa simplicité est défini par l'indice de déviation quadratique moyen (MSDI : Mean Square Deviation Index), qui est ici utilisé sur les valeurs empiriques $x_{i:n}^{exp}$ et théoriques $x_{i:n}^{thé}$ des n -échantillons aléatoires, évalués en termes de contraintes extrêmes et d'endommagement par fatigue. Les n valeurs théoriques retenues pour l'analyse comparative sont calculées à partir de la fonction quantile de la LAP considérée et calée sur les estimateurs $(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2, \widehat{\theta}_3, \widehat{\theta}_4)$ de ses paramètres $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ de loi, en associant à chaque valeur théorique $x_{i:n}^{thé}$ la probabilité empirique de non dépassement $p_{i:n}$ calculée comme suit :

$$p_{i:n} = \frac{i-v}{n+1-2.v} \quad \text{avec } 0 \leq v \leq 0,5 \quad (9)$$

Note : Les valeurs de v les plus couramment utilisées sont ($v=0$ selon Weibull), ($v=0,4$ selon Cunnane) et ($v=0,44$ selon Gringorten).

Comme précédemment pour le test de KS-M, le calcul d'écart s'effectue favorablement sur les m valeurs les plus grandes ($m < n$) des n -échantillons aléatoires, de manière à se concentrer sur l'ajustement des queues de distribution des LAP, situées à droite de leurs valeurs moyennes. L'expression du MSDI en % est alors la suivante :

$$MSDI(\%) = \frac{100}{m} \cdot \sum_{i=n-m+1}^n \left(\frac{x_{i:n}^{exp} - x_{i:n}^{thé}}{x_{i:n}^{exp}} \right)^2 \quad (10)$$

Comme précédemment la valeur m à retenir dépend du nombre n des n -échantillons considérés. Plus la valeur de n est élevée et plus le rapport (m/n) peut être réduit. L'ajustement de la LAP, associée au modèle statistique local, de fonction de répartition $F_X^{thé}(x)$, est d'autant plus satisfaisant que la valeur de l'écart quadratique moyen calculé est faible. La loi LAR au sens du critère d'écart MSDI correspond de ce fait à la LAP dont la valeur MSDI est la plus faible.

9 Etape 5 : Calcul du coefficient d'extrapolation temporelle M

Dans sa grande généralité, l'environnement vibratoire relevé sur les systèmes étant non stationnaire et non gaussien, cela conduit désormais à utiliser favorablement des méthodes adaptées comme la MBD pour classifier cette non stationnarité (au sens du « Run Test »), ainsi que pour définir un modèle

statistique pertinent pour chaque mode d'endommagement d'intérêt (contrainte max et dommage par fatigue). Comme précisé précédemment, ce travail s'effectue localement, au sens T_b (durée de bloc) pour chacune des N_c classes considérées et ceci en considérant que chaque classe est alors assimilable à une Sous Situation stationnaire, indépendante les unes avec les autres. Cela revient donc à considérer que les N_c Sous Situations seront à synthétiser, en les supposant implicitement reliées en série.

Dans un premier temps, il convient donc de savoir extrapoler chaque Sous Situation en terme de durée de manière à passer de la durée T_b (durée de bloc de la MBD) à la durée de vie cible T_v de la Situation d'environnement, caractérisée ici par l'environnement vibratoire analysé. Pour ce faire, il convient de s'appuyer sur l'histogramme empirique des valeurs efficaces locales centrées, qui est obtenu à la suite de la classification de la non-stationnarité du signal analysé (voir §3). De ce fait, le coefficient d'extrapolation temporelle $M(j)$ associé à la classe j et donc à la Sous Situation stationnaire j est obtenu comme suit :

$$M(j) = \frac{T_v}{T_b} \cdot Occ(j) \quad \text{avec } j = 1 \text{ à } N_c \quad (11)$$

Où : $Occ(j)$ représente l'occurrence de la classe j , associée à l'histogramme empirique des valeurs efficaces locales centrées.

10 Etape 6 : Extrapolation des lois locales (LAR) en lois globales

Sur la base des considérations précédentes, il convient d'extrapoler les modèles statistiques locaux, associés aux variables aléatoires d'intérêt $Z_{ext}(\omega)$ et $D_p(\omega)$ en modèles statistiques globaux, associés aux variables aléatoires globales $Z_{sup}(\omega)$ et $D_c(\omega)$, qui caractérisent désormais les endommagements des processus de contrainte $\sigma(t,\omega)=K.z(t,\omega)$, sur la durée de vie cible T_v de la situation d'environnement réelle analysée.

Cette extrapolation est réalisée pour l'endommagement de type « dépassement d'une contrainte seuil », en utilisant le principe de la TVE. Dans le cas des environnements non stationnaires, cette extrapolation doit s'effectuer pour chacune des classes j ($j=1$ à N_c), en prenant comme coefficient d'extrapolation temporelle $M(j)$ la valeur évaluée à la relation 11 précédente. Cette technique d'extrapolation, basée sur la TVE n'est cependant acceptable que si l'ensemble des coefficients $M(j)$ pour $j=1$ à N_c restent suffisamment élevés [$M(j) > 100, \forall j$]. Ce critère asymptotique sur la valeur du coefficient d'extrapolation temporelle $M(j)$ est de nature à permettre de définir les zones d'attraction maximales des lois locales retenues (LAR) et donc de déterminer le type de lois asymptotiques (EV1, EV2 ou EV3) auxquelles les modèles globaux doivent satisfaire. Pour ce faire, le spécificateur doit adapter les paramètres de traitement de la MBD sur la base des préconisations suivantes, afin de garantir ce critère asymptotique sur les coefficients $M(j)$, à savoir :

- Diminuer la durée de bloc T_b de manière à augmenter la dimension des n -échantillons aléatoires de chaque classe j considérée ($j=1$ à N_c), lorsque la durée de vie cible T_v n'est pas négociable,
- Concaténer les histogrammes des valeurs efficaces locales centrées, issues de l'étape de classification de la non stationnarité, notamment au niveau des classes à faibles occurrences, lorsque la durée T_b n'est pas négociable,
- Augmenter la durée de vie cible T_v , lorsque cette dernière est une valeur forfaitaire retenue par le spécificateur, en vue de préparer les bases de données, sur lesquelles seront réalisées les synthèses stochastiques des profils d'emploi de niveau système.

Pour le cas des lois statistiques locales retenues LAR dans le cadre des SRE, les lois statistiques globales de type EV1 (Gumbel), EV2 (Fréchet) et EV3 (Weibull Négatif) sont fournies dans le Tableau 2 qui suit, en fournissant les expressions analytiques de leurs paramètres, fonction du coefficient M considéré et des paramètres afférents aux lois locales LAR de la MBD.

Modèle statistique de la loi locale en SRE, au sens T _b .		Modèle statistique asymptotique de la loi statistique globale en SRE pour un coefficient d'extrapolation temporelle M donné.	
Lois	Définition (voir Tableau C3)	Lois	Définition (voir Tableau C3)
GEV de Type EV1 (Gumbel)	$GUM(\mu_X, \beta_X)$	GEV de Type EV1 (Gumbel)	$GUM(\mu_Y, \beta_Y)$ avec : $\begin{cases} \mu_Y = \mu_X + \beta_X \cdot \ln(M) \\ \beta_Y = \beta_X \end{cases}$
GEV de type EV2 (Fréchet)	$FRE(\mu_X, \beta_X, k_X)$	GEV de type EV2 (Fréchet)	$FRE(\mu_Y, \beta_Y, k_Y)$ avec : $\begin{cases} \mu_Y = \mu_X + \frac{\beta_X}{k_X} \cdot \left[\frac{m_X - 1}{m_X} \right] \\ \beta_Y = \frac{\beta_X}{m_X} \\ k_Y = k_X \text{ avec } m_X = M^{k_X} \end{cases}$
GEV de type EV3 (Weibull Négatif)	$WBN(\mu_X, \beta_X, k_X)$	GEV de type EV3 (Weibull Négatif)	$WBN(\mu_Y, \beta_Y, k_Y)$ avec : $\begin{cases} \mu_Y = \mu_X + \frac{\beta_X}{k_X} \cdot \left[\frac{m_X - 1}{m_X} \right] \\ \beta_Y = \frac{\beta_X}{m_X} \\ k_Y = k_X \text{ avec } m_X = M^{k_X} \end{cases}$
Weibull 2 Paramètres	$WB2P(\eta_X, \beta_X)$	GEV de Type EV1 (Gumbel)	$GUM(\mu_Y, \beta_Y)$ avec : $\begin{cases} \mu_Y = \eta_X \cdot [\ln(M)]^{\frac{1}{\beta_X}} \\ \beta_Y = \frac{\eta_X}{\beta_X} \cdot [\ln(M)]^{\frac{1-\beta_X}{\beta_X}} \end{cases}$
Weibull 3 Paramètres	$WB3P(\varepsilon_X, \eta_X, \beta_X)$	GEV de Type EV1 (Gumbel)	$GUM(\mu_Y, \beta_Y)$ avec : $\begin{cases} \mu_Y = \varepsilon_X + \eta_X \cdot [\ln(M)]^{\frac{1}{\beta_X}} \\ \beta_Y = \frac{\eta_X}{\beta_X} \cdot [\ln(M)]^{\frac{1-\beta_X}{\beta_X}} \end{cases}$
Log-Normale 2 Paramètres	$LN2P(\mu_X, \sigma_X)$	GEV de Type EV1 (Gumbel)	$GUM(\mu_Y, \beta_Y)$ avec : $\begin{cases} \mu_Y = \exp \left[\mu_X + \sigma_X \cdot \Phi^{-1} \left(\frac{M-1}{M} \right) \right] \\ \beta_Y = \frac{\sigma_X \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \mu_Y}{M \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \left[\Phi^{-1} \left(\frac{M-1}{M} \right) \right]^2 \right]} \end{cases}$
Log-Normale 3 Paramètres	$LN3P(\varepsilon_X, \eta_X, \beta_X)$	GEV de Type EV1 (Gumbel)	$GUM(\mu_Y, \beta_Y)$ avec : $\begin{cases} \mu_Y = \varepsilon_X + \exp \left[\mu_X + \sigma_X \cdot \Phi^{-1} \left(\frac{M-1}{M} \right) \right] \\ \beta_Y = \frac{\sigma_X \cdot \sqrt{2} \cdot \pi \cdot \exp \left[\mu_X + \sigma_X \cdot \Phi^{-1} \left(\frac{M-1}{M} \right) \right]}{M \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \cdot \left[\Phi^{-1} \left(\frac{M-1}{M} \right) \right]^2 \right]} \end{cases}$

Tableau 2 : Calcul des paramètres de la loi globale de type SRE pour un coefficient d'extrapolation M donné, en fonction du modèle statistique de la loi locale

En ce qui concerne l'endommagement de type « fatigue vibratoire », l'extrapolation des lois locales repose essentiellement sur le principe TCL. Comme précédemment, cette extrapolation doit s'effectuer pour chacune des classes j (j=1 à N_c), en prenant comme coefficient d'extrapolation temporelle M(j) la valeur évaluée à la relation 11 précédente. Cette technique d'extrapolation, basée sur le théorème central limite (TCL) n'est cependant acceptable que si les coefficients M(j) pour j=1 à N_c restent suffisamment élevés [M(j) > 50, ∀j]. Ce critère asymptotique sur la valeur du coefficient d'extrapolation temporelle M(j) est de nature à permettre la convergence des lois globales vers une loi de type Normale (Gauss) et ceci quelle que soit le type de loi locale retenue (LAR). Pour ce faire, le spécificateur doit adapter les paramètres de traitement de la MBD sur la base des préconisations citées précédemment pour le cas des lois globales en SRE.

Pour le cas des lois statistiques locales retenues LAR dans le cadre des SDF, les deux paramètres de la loi globale, asymptotiquement Normale, sont fournies dans le Tableau 3 qui suit. La normalité de la loi statistique globale conduit à démontrer que sa valeur moyenne et sa variance sont indépendantes de la forme de la loi locale, et uniquement fonction du coefficient M considéré et des paramètres afférents aux lois LAP de la MBD.

Les résultats du Tableau 3 montrent clairement que la valeur moyenne de l'endommagement produit par le processus de contrainte aléatoire de durée T_v est égale à M fois l'endommagement local moyen produit au sens T_b, qui constitue un résultat fondamental relié à l'hypothèse de cumulation linéaire des

dommages partiels, sous-jacent au calcul des SDF. De même, il convient de noter que le coefficient de variation de la loi globale est réduit d'un facteur égale à (\sqrt{M}) par rapport à celui obtenu à partir des paramètres des lois locales LAR, signifiant que le processus d'extrapolation en dommage est de nature à réduire les effets de variabilité des dommages locaux pour autant que les processus de contrainte sont évalués sur une durée de vie cible T_v importante (ce qui est le cas pour le secteur des véhicules routier du monde Civil ou Militaire).

Modèle statistique de la loi locale en SDF, au sens T_b .		Modèle statistique asymptotique de la loi statistique globale en SDF pour un coefficient d'extrapolation temporelle M donné.	
Lois	Définition (voir Tableau C3)	Lois	Définition (voir Tableau C3)
Gauss (Loi Normale)	$GAUSS(\mu_X, \sigma_X^2)$	Gauss (Loi Normale)	$GAUSS(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ avec : $\begin{cases} \mu_Y = E[Y] = M \cdot E[X] \\ \sigma_Y^2 = VAR[Y] = M \cdot VAR[X] \end{cases}$ d'où : $CV_Y = \frac{ET[Y]}{E[Y]} = \frac{CV_X}{\sqrt{M}}$ avec $CV_X = \frac{ET[X]}{E[X]}$ avec : $\begin{cases} ET[X] : \text{Ecart type de la v.a } X(\omega) \\ ET[Y] : \text{Ecart type de la v.a } Y(\omega) \end{cases}$
Weibull 2 Paramètres	$WB2P(\eta_X, \beta_X)$		
Weibull 3 Paramètres	$WB3P(\varepsilon_X, \eta_X, \beta_X)$		
Log-Normale 2 Paramètres	$LN2P(\mu_X, \sigma_X)$		
Log-Normale 3 Paramètres	$LN3P(\varepsilon_X, \eta_X, \beta_X)$		

Tableau 3 : Calcul des paramètres de la loi globale de type SDF pour un coefficient d'extrapolation M donné, en fonction du modèle statistique de la loi locale

11 Etape 7 : Synthèse Stochastiques des lois globales

Dans le cas d'une situation d'environnement caractérisée par un environnement non stationnaire, la classification au sens du « Run Test » des valeurs efficaces locales centrées en N_c classes est de nature à assimiler cette dernière comme étant un ensemble de N_c Sous Situations stationnaires reliées en série, et supposées indépendantes les unes avec les autres.

Chaque Sous Situation stationnaire de durée $T(j) = M(j) \cdot T_b$ pour $j=1$ à N_c est alors caractérisée pour chaque système étalon (f_0, Q) par ses deux lois statiques globales définies en termes de $Z_{sup}(j)$ et de $D_c(j)$ et que l'on note respectivement $F_{Z_{sup},j}(x)$ et $F_{D_c,j}(x)$ au niveau des fonctions de répartition.

Sur la base de ces considérations techniques et conformément au principe de synthèse stochastique des Situations d'environnement vibratoire présenté en [22], la fonction de répartition $F_{Z_{sup}}^{syn}(x)$ de la situation d'environnement non stationnaire est alors calculable numériquement, en s'appuyant sur l'expression suivante :

$$F_{Z_{sup}}^{syn}(x) = \prod_{j=1}^{N_c} F_{Z_{sup},j}(x) \quad (12)$$

En ce qui concerne la loi de distribution de synthèse en terme de dommage cumulé, cette dernière est forcément une loi normale, puisque asymptotiquement les lois globales des N_c Sous Situations sont de type normale (cf. Tableau 3) et ceci quelle que soit la nature des lois locales retenues (LAR en SDF) considérées. De ce fait contrairement au cas de la variable aléatoire $Z_{sup}^{syn}(\omega)$ associée au SRE de la

Situation non stationnaire, la variable aléatoire $D_c^{syn}(\omega)$ associée au SDF de cette même Situation est calculable par une approche analytique, en s'appuyant sur la stabilité par additivité des lois normales, à savoir :

$$F_{D_c^{syn}}(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu_{D_c^{syn}}}{\sigma_{D_c^{syn}}}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mu_{D_c^{syn}} = \sum_{j=1}^{N_c} \mu_{D_{c,j}} \\ \sigma_{D_c^{syn}}^2 = \sum_{D_{c,j}}^{N_c} \sigma_{D_{c,j}}^2 \end{cases} \quad (13)$$

12 Etape 8 : Estimation des Spectres de Réponse (SRE et SDF) à risque de dépassement α imposé

Connaissant désormais numériquement les lois $F_{Z_{sup}^{syn}}(x)$ et $F_{D_c^{syn}}(x)$ associées à la Situation d'environnement non stationnaire considérée, il est possible d'évaluer les SRE et SDF à risque de dépassement α imposé, en s'appuyant sur les expressions (14) et (15) suivantes, à savoir :

$$SRE_{\alpha}(f_0) = 4 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2 \cdot F_{Z_{sup}^{syn}}^{-1}(1 - \alpha) = 4 \cdot \pi^2 \cdot f_0^2 \cdot Z_{sup,\alpha}^{syn} \quad (14)$$

$$SDF_{\alpha}(f_0) = F_{D_c^{syn}}^{-1}(1 - \alpha) = D_{c,\alpha}^{syn} \quad (15)$$

Avec pour valeurs de risque α , des valeurs qui sont fonction de la criticité de l'équipement [2], et reprise dans le Tableau 4 qui suit.

Risque de dépassement α accepté, en fonction de la criticité de l'Equipement		
Nature des Equipements concernés	Criticité de l'Equipement	Risque de dépassement α retenu
Equipements Standards	Faible (Equipement dont la Fonction Technique est non prioritaire)	10%
Equipements Critiques	Moyen (Equipement dont la Fonction Technique est prioritaire)	1%
Equipements Sécuritaires	Fort (Equipement dont la Fonction Technique est en liaison avec la sécurité des biens et des personnes)	0,1%

Tableau 4 : Choix du niveau de risque α en fonction de la criticité de l'équipement

13 Conclusions

Utilisée sur les programmes d'armement terrestre actuels (notamment dans le cas du Programme SCORPION, Griffon - Jaguar), la méthode MBD permet de caractériser au juste nécessaire l'impact des conditions d'emploi de tels systèmes d'armes (en terme de dépassement d'une contrainte seuil et de fatigue vibratoire) sur l'ensemble des équipements embarqués, en maîtrisant efficacement les performances FMDS de ces derniers. Contrairement aux démarches de conception et de validation déterministes du passé, menées dans le domaine temporel, la méthode MBD proposée est de nature à extrapoler, désormais au sens statistique, les niveaux d'endommagement calculés au cours du temps pour un risque de dépassement α donné, fonction de la criticité de l'équipement à intégrer.

En gérant la notion de non stationnarité et de non gaussiannité des excitations générées par ces systèmes d'arme, la méthode MBD s'impose donc comme une méthode universelle de traitement des

chargements dynamiques complexes, ne nécessitant plus l'utilisation d'hypothèses restrictives comme par le passé, qui venaient gommer certains phénomènes physiques des chargements réels, par l'utilisation abusive des techniques d'analyse spectrale (DSP). La méthode MBD, soutenue par la DGA est désormais au cœur du référentiel Normatif AFNOR [25], en ce qui concerne les méthodologies de prise en compte de l'environnement par la démarche de personnalisation des essais, utilisée grandement par les industriels du monde Civil et Militaire.

Annexe

Désignation	Loi de distribution	Support de la Loi	Paramètres de la Loi	Fonction de Répartition	Méthode d'inférence (MMP)	Méthode d'inférence (MMO)	Désignation
GUM (μ, β)	$f_X(x) = \frac{z \exp(-z)}{\beta}$ avec $z = \exp\left[-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)\right]$	$x \in]-\infty, +\infty[$	μ : paramètre de position (μ ∈ ℝ) β : paramètre d'échelle (β > 0)	$F_X(x) = \exp(-z)$ avec $z = \exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)\right)$	$\lambda_1 = \mu + \gamma \cdot \beta$ $\gamma = \text{constante d'Euler} = 0,577215\dots$ $\lambda_2 = \beta \cdot \ln(2)$	$E[X] = \mu + \beta \cdot \gamma$ $\gamma = \text{constante d'Euler} = 0,577215\dots$ $VAR[X] = \frac{\pi^2}{6} \cdot \beta^2$	GUM (μ, β)
GEV de type EV2 GEV (μ, β, k<0) FRE (μ, β, k)	$f_X(x) = \frac{1}{\beta} \left[1 - k \left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)\right]^{\frac{1-k}{k}} \cdot F_X(x)$	$x \in \left] \mu + \frac{\beta}{k}, +\infty \right[$	μ : paramètre de position (μ ∈ ℝ) β : paramètre d'échelle ou de dispersion (β > 0) k : paramètre de forme ou indice de queue (k < 0)	$F_X(x) = \exp\left[-\left[1 - k \left(\frac{x-\mu}{\beta}\right)\right]^{\frac{1}{k}}\right]$	$\lambda_1 = \mu + \frac{\beta}{k} [1 - g_1]$ avec $g_1 = \Gamma(1 + k)$ et avec $\Gamma(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \exp(-t) \cdot t^{x-1} \cdot dt$	$E[X] = \mu + \frac{\beta}{k} [1 - g_1]$ avec $g_1 = \Gamma(1 + k)$ et avec $\Gamma(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \exp(-t) \cdot t^{x-1} \cdot dt$	GEV de type EV2 GEV (μ, β, k<0) FRE (μ, β, k)
GEV de type EV3 GEV (μ, β, k>0) WBN (μ, β, k)		$x \in \left] -\infty, \mu + \frac{\beta}{k} \right[$	μ : paramètre de position (μ ∈ ℝ) β : paramètre d'échelle ou de dispersion (β > 0) k : paramètre de forme ou indice de queue (k > 0)		$\lambda_2 = \frac{g_1 \cdot \beta}{k} [1 - 2^{-k}]$ avec $g_1 = \Gamma(1 + ik)$ $\tau_3 = \frac{2[1-3^{-k}]}{[1-2^{-k}] - 3}$ et $\tau_4 = \frac{1-6[2^{-k}]+10[3^{-k}]-5[4^{-k}]}{[1-2^{-k}]}$	$VAR[X] = \left(\frac{\beta}{k}\right)^2 \cdot [g_2 - g_1^2]$ avec $g_1 = \Gamma(1 + i \cdot k)$ $\alpha_{3X} = -\frac{ k }{k} \left[\frac{g_1 - 3g_1 g_2 + 2g_1^3}{(g_1 - g_1^2)^3} \right]$ avec $g_1 = \Gamma(1 + i \cdot k)$	GEV de type EV3 GEV (μ, β, k>0) WBN (μ, β, k)
WB2P (η, β)	$f_X(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta\right]$	$x \in [0, +\infty[$	η : paramètre d'échelle (η > 0) β : paramètre de forme (β > 0)	$F_X(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta\right]$	$\lambda_1 = \eta \cdot g_1$ avec $g_1 = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ et avec $\Gamma(x) = \int_{t=0}^{+\infty} \exp(-t) \cdot t^{x-1} \cdot dt$ $\lambda_2 = \eta \cdot g_1 \cdot [1 - 2^{-\frac{1}{\beta}}]$ avec $g_1 = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$E[X] = \eta \cdot g_1$ avec $g_1 = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ $VAR[X] = \eta^2 \cdot \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]$ Ou : $VAR[X] = \eta^2 \cdot (g_2 - g_1^2)$ avec $g_1 = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	WB2P (η, β)
WB3P (η, β, ε)	$f_X(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x-\epsilon}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{x-\epsilon}{\eta}\right)^\beta\right]$	$x \in [\epsilon, +\infty[$	η : paramètre d'échelle (η > 0) β : paramètre de forme (β > 0) ε : paramètre de localisation (ε ∈ ℝ)	$F_X(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\epsilon}{\eta}\right)^\beta\right]$	$\lambda_1 = \epsilon + \eta \cdot g_1$ et $\lambda_2 = \eta \cdot g_1 \cdot [1 - 2^{-\frac{1}{\beta}}]$ avec : $g_1 = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ et $\Gamma(x) = \int_{t=0}^{+\infty} t^{x-1} \cdot \exp(-t) \cdot dt$ $\lambda_2 = \eta \cdot g_1 \cdot [1 - 2^{-\frac{1}{\beta}}]$ avec $g_1 = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$	$E[X] = \epsilon + \eta \cdot g_1$ avec $g_1 = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$ $VAR[X] = \eta^2 \cdot \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right] = \eta^2 \cdot (g_2 - g_1^2)$ Et : $\alpha_{3X} = [g_3 - 3 \cdot g_1 \cdot g_2 + 2 \cdot g_1^3] \cdot [g_2 - g_1^2]^{-3/2}$	WB3P (η, β, ε)
LN2P (μ, σ)	$f_X(x) = \frac{1}{x \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$x \in [0, +\infty[$	μ : moyenne des log valeurs (μ ∈ ℝ) σ : écart type des logs valeurs (σ > 0)	$F_X(x) = \Phi\left[\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}\right]$ φ(x) : fonction de répartition de la loi normale standard	$\lambda_1 = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right]$ et $\lambda_2 = \lambda_1 \cdot \left[2 \cdot \Phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right) - 1\right]$ φ(x) : fonction de répartition de la loi normale standard	$E[X] = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] = \sqrt{u} \cdot \exp(\mu)$ avec $u = \exp(\sigma^2)$ $VAR[X] = \exp[2\mu + \sigma^2] \cdot [\exp(\sigma^2) - 1] = u \cdot \exp(2 \cdot \mu) \cdot [u - 1]$	LN2P (μ, σ)
LN3P (μ, σ, ε)	$f_X(x) = \frac{1}{(x-\epsilon) \cdot \sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\ln[(x-\epsilon)] - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$x \in [\epsilon, +\infty[$	μ : moyenne des log valeurs (μ ∈ ℝ) σ : écart type des logs valeurs (σ > 0) ε : paramètre de localisation (ε ∈ ℝ)	$F_X(x) = \Phi\left[\frac{\ln(x-\epsilon) - \mu}{\sigma}\right]$ φ(x) : fonction de répartition de la loi normale standard	$\lambda_1 = \epsilon + \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right]$ et $\lambda_2 = \lambda_1 \cdot \text{erf}\left(\frac{\sigma}{2}\right)$ $\tau_3 = \frac{6}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\int_{x=0}^{x=\frac{\sigma}{\sqrt{2}}} \text{erf}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{3}}\right) \cdot \exp(-x^2) \cdot dx}{\text{erf}\left(\frac{\sigma}{2}\right)}$ erf(x) : fonction erreur avec : $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{t=0}^x \exp(-t^2) \cdot dt$	$E[X] = \exp\left[\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right] = \sqrt{u} \cdot \exp(\mu)$ avec $u = \exp(\sigma^2)$ $VAR[X] = \exp[2\mu + \sigma^2] \cdot [\exp(\sigma^2) - 1] = u \cdot \exp(2 \cdot \mu) \cdot [u - 1]$ $\alpha_{3X} = \sqrt{u - 1} \cdot [u + 2]$ $\alpha_{4X} = u^4 + 2 \cdot u^3 + 3 \cdot u^2 - 3$	LN3P (μ, σ, ε)
GAUSS (μ, σ ²)	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$x \in]-\infty, +\infty[$	μ : paramètre d'échelle (μ ∈ ℝ) σ ² : paramètre de forme (σ > 0)	$F_X(x) = \Phi\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]$ φ(x) : fonction de répartition de la loi normale standard	$\lambda_1 = \mu$ et $\lambda_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$ $\tau_3 = 0$ et $\tau_4 = \frac{30 \cdot \text{Arctg}(\sqrt{2})}{\pi} - 9 \cdot 0,1226$	$E[X] = \mu$ et $VAR[X] = \sigma^2$ $\alpha_{3X} = 0$ et $\alpha_{4X} = 3$	GAUSS (μ, σ ²)

Tableau 1 : Expressions analytiques associées aux techniques d'inférence MMP et MMO des lois statistiques retenues dans la MBD

Références

- [1] B. Colin, Characterization of random Gaussian and non-Gaussian stress processes in terms of extreme response, Matec Web of Conferences, edp sciences, October 2014, DOI: 10.1051/mateconf/20152006001
- [2] B. Colin, Characterization of random Gaussian and non-Gaussian stress processes in terms of vibration fatigue, Mechanics & Industry Vol, No (2018), DOI : 10.1051/meca/2017057
- [3] B. Colin & J.Y Disson , New standard XP X50-144 related to mechanical environment strength proof. Implementation and first feedback, FD2017, ScienceDirect, Procedia Engineering 213 (2018) 282–295, DOI : 10.1016/j.proeng.2018.02.029
- [4] DGA, Guide d'application de la démarche de personnalisation en environnement mécanique, NORMDEF 0101, Edition 01, Juillet 2009
- [5] B. Colin, La probabilisation des SRE : Une réponse à la comparaison des sévérités d'environnement déterministe et stochastique, en termes de contraintes extrêmes, Colloque ASTELAB 2007, 25, 26 et 27 Septembre 2007, Paris-Expo de la porte de Versailles
- [6] B. Colin, La probabilisation des SDF : Une réponse à la comparaison des sévérités d'environnement déterministe et stochastique, en terme d'endommagement par fatigue, Colloque ASTELAB 2007, 25, 26 et 27 Septembre 2007, Paris-Expo de la porte de Versailles
- [7] J. S. Bendat, A. G. Piersol, Random Data: Analysis and Measurement Procedures, 2nd Edition, Chapter 4-Statistical Principles, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 1986
- [8] A. Halfpenny, HBM & T. C. Walton, AugustaWestland, CBM for Vibrating Equipment on Rotorcraft, American Helicopter Society Technical Specialists' Meeting on Condition Based Maintenance, Huntsville, AL, February 10-11, 2009
- [9] Bram Cornelis, Simone Manzato, Bart Peeters, Raphael Van der Vorst, John Hiatt , A Mission Synthesis procedure for Sine-on-Random excitations in a helicopter application, CPSEMS, 18 April 2017
- [10] D. Charles, Derivation of environment descriptions and test severities from measured road transportation data. Journal of the IES, Vol. 36, Issue 1 1993, p. 37-42
- [11] Vincent Rouillard, On the Non-Gaussian Nature of Random Vehicle Vibrations, Proceedings of the World Congress on Engineering 2007 Vol II WCE 2007, July 2 - 4, 2007, London, U.K
- [12] Manuel-Alfredo Garcia-Romeu-Martinez, Vincent Rouillard, Vicente-Agustin Cloquell-Ballester, A Model for the Statistical Distribution of Road Vehicle Vibrations, , Proceedings of the World Congress on Engineering 2007 Vol II WCE 2007, July 2 - 4, 2007, London, U.K
- [13] Gao Z., Moain T., 2007. Fatigue damage induced by non-Gaussian bimodal wave loading in mooring lines. Applied Ocean Research 29: 45-54
- [14] B. Colin, Tracklayers : A complex vibration environnement, Institute of Environmental Sciences, 1990, Proceedings, pp 663-678
- [15] B. Colin, Analyse des moments statistiques : un moyen pertinent pour la caractérisation et la simulation des données d'environnement vibratoire, ATELAB 97, 27-29 Mai 1997
- [16] F. Cianetti, M. Palmieri, C. Braccesi. G. Morettini, Correction formula approach to evaluate fatigue damage induced by non-Gaussian stress state, AIAS 2017 International Conference on Stress Analysis, AIAS 2017, 6-9 September 2017, Pisa, Italy
- [17] B. Colin, L'intérêt de la Méthode des Blocs Disjoints (MBD) dans la Spécification des Essais vibratoires, Colloque ASTELAB 2018, 5 et 6 Juillet 2018, EDF LB de Palaiseau (91)
- [18] R.W. Hamming, Numerical Methods for Scientists and Engineers, Second Edition, ISBN0486652416

- [19] AFNOR, Produits métalliques - Fatigue sous sollicitations d'amplitude variable - Méthode Rainflow de comptage des cycles, AFNOR A03-406, Novembre 1993.
- [20] M. Bellanger, Traitement numérique du signal – 9^{ème} édition, Sciences de l'ingénieur (Dunod, 2012), ISBN 9782100588640
- [21] B. Colin, Approche stochastique de la Fatigue Vibratoire : Comparaison entre les méthodes Peak-Valley et Rainflow Counting, Revue de Métallurgie 109, 217-247 (2012), EDP Sciences, 2012, DOI : 10.105/metal/2012024
- [22] B. Colin, Conception sécurisée des structures soumises aux valeurs extrêmes de processus stochastiques stationnaires, Mécanique & Industries 10, 131 – 150 (2009), EDP Sciences 2009, DOI : 10.1051/meca/2009041
- [23] G. Saporta, Probabilités, analyse des données et statistique – 3^{ème} édition, Editions TECHNIP (2011), ISBN 978-2-7108-0980-7
- [24] J.M.R Hosking, L-moments: Analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics, J. Roy. Statistical Soc., Series B, 52, pp. 105-24, 1990
- [25] Normes AFNOR, NF X50-141-1 à 6, Démonstration de la tenue aux environnements – Conception et réalisation des essais en environnement, Partie 1 à 6, 2019