Le principe variationnel d'espace-temps de Brezis-Ekeland-Nayroles symplectique, un outil pour l'étude des systèmes dynamiques dissipatifs

XIAODAN CAO[a], A. OUESLATI[a], AN DANH NGUYEN[b], B. MARKET[b], M. STOFFEL[b], G. DE SAXCE[a]

a. Univ. Lille, CNRS, Centrale Lille, FRE 2016 – LaMcube –
Laboratoire de mécanique multiphysique multiéchelle, gery.de-saxce@univ-lille.fr
b. RWTH Aachen University, Institut für Allgemeine Mechanik, Allemagne

Résumé :

Dans ce travail, notre ambition est de construire de nouveaux outils théoriques pour modéliser les systèmes dissipatifs dynamiques dans un cadre géométrique cohérent, avec en arrière-plan des approches numériques. Le principe variationnel d'Hamilton étant inopérant pour de tels systèmes, nous proposons une version symplectique du principe de minimum de Brezis-Ekeland-Nayroles basée sur le Hamiltonien, un potentiel de dissipation et la forme symplectique.

Abstract :

In this work, our ambition is to build new theoretical tools to modelize the dissipative dynamical systems within a consistent geometrical framework, with the numerical approaches on the background. Hamilton variational principle failing for such systems, we propose a symplectic version of Brezis-Ekeland-Nayroles minimum principle based on the Hamiltonian, a dissipation potential and the symplectic form.

Mots clefs : systèmes dynamiques, milieux dissipatifs, mécanique symplectique, calcul des variations, analyse convexe, géométrie différentielle

1 Introduction

Les systèmes dynamiques réels sont sujets à des pertes d'énergie. Pour les systèmes non conservatifs, la perte résulte des sollicitations extérieures. Leur comportement peut être représenté par le principe de moindre action de Hamilton. Pour les systèmes dissipatifs, la cause de perte d'énergie est interne : collisions, frottement, viscosité, plasticité, rupture, etc... Le principe variationnel d'Hamilton étant inopérant pour de tels système, nous voulons en proposer un autre pour eux. Nous utilisons deux types d'outils, géométriques pour traiter la dynamique et d'analyse convexe, non régulière pour les aspects variationnels.

Commençons par les outils géométriques. On travaille dans l'espace de phase dont les variables $z = (x, y)$ sont constitués des degrés de libertés x, qui peuvent être aussi des champs, et des moments y associés. Il est muni d'une forme symplectique, un tenseur 2 fois covariant antisymétrique :

$$\omega(z, z') = x \cdot y' - x' \cdot y$$

Pour les systèmes réversibles, l'information est contenue dans le Hamiltonien H, différentiable. Son gradient symplectique, noté ∇^ω car construit sur la forme symplectique, permet d'écrire les équations canoniques –c'est-à-dire les équations du mouvement– sous une forme compacte :

$$\dot{z} = \nabla^\omega H \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\, dz, \qquad \omega(\dot{z}, dz) = dH$$

Il s'agit donc d'un gradient dynamique. Pour les systèmes dissipatifs, on décompose la vitesse en parties réversible et irréversible :

$$\dot{z} \,=\, \dot{z}_R + \dot{z}_I, \quad \dot{z}_R = \nabla^\omega H, \quad \dot{z}_I \,=\, \dot{z} \,-\, \nabla^\omega H$$

l'idée étant que si le système ne dissipe pas, la partie irréversible est nulle et le mouvement est régit par les équations canoniques dérivant du Hamiltonien.

Et maintenant, voici un virage crucial. Nous allons confronter les outils de la géométrie différentielle à ceux de l'analyse convexe, non régulière. Nous partons d'un potentiel de dissipation ϕ, pas différentiable partout mais convexe. On invente un gradient dynamique généralisé, multivoque, le sous-différentiel symplectique :

$$\dot{z}_I \in \partial^\omega \phi(\dot{z}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall \dot{z}', \quad \phi(\dot{z} + \dot{z}') - \phi(\dot{z}) \geq \omega(\dot{z}_I, \dot{z}')$$

qui permet d'écrire la loi de comportement sous la forme :

$$\dot{z}_I \in \partial^\omega \phi(\dot{z})$$

et une transformé de Legendre symplectique, dynamique :

$$\phi^{*\omega}(\dot{z}_I) = \sup_{\dot{z}} \left\{\omega(\dot{z}_I, \dot{z}) - \phi(\dot{z})\right\}$$

2 Le principe de Brezis-Ekeland-Nayroles symplectique

Le principe variationnel de Brezis, Ekeland et Nayroles, BEN en abrégé, date de 1976 [1], [3]. A notre connaissance, il n'a jamais été exploité numériquement. Dans [2], le dernier auteur a proposé avec M. Buliga une généralisation à la dynamique dont la fonctionnelle est construite sur le hamiltonien pour le comportement réversible, le potentiel de dissipation pour le comportement dissipatif, et la forme symplectique pour la dynamique :

$$\Pi(z) = \int_0^T \left[\phi(\dot{z}) + \phi^{*\omega}(\dot{z} - \nabla^\omega H) - \omega(\dot{z} - \nabla^\omega H, \dot{z})\right]\, \mathrm{dt}$$

La courbe d'évolution naturelle $t \mapsto z(t)$ minimise cette fonctionnelle parmi toutes les courbes vérifiant les conditions initiales $z(0) = z_0$ et, fait remarquable, son minimum est zéro.

3 Application à la Plasticité et la Viscoplasticité classique

En petites déformations, les variables sont $x = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p)$ où $\boldsymbol{u}$ est le champ de déplacement, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ est celui de déformation plastique et $y = (\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\pi})$, où $\boldsymbol{p}$ est la quantité de mouvement. Le Hamiltonien total de la structure est choisi de la forme :

$$H(t,z) = \int_\Omega \left\{ \frac{1}{2\rho} \parallel \boldsymbol{p} \parallel^2 + w(\nabla \boldsymbol{u} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) - \boldsymbol{f}(t) \cdot \boldsymbol{u} \right\} d\Omega - \int_{\partial\Omega_1} \bar{\boldsymbol{f}}(t) \cdot \boldsymbol{u}\, d(\partial\Omega)$$

où apparaissent la densité d'énergie élastique w et les forces imposées de volume $\boldsymbol{f}$ et de surface $\bar{\boldsymbol{f}}$. Les variables étant des champs, le gradient symplectique doit être calculé au sens du calcul des variations. ϕ^* étant la transformée de Fenchel de ϕ et $\boldsymbol{S}$ l'opérateur de souplesse élastique, le principe de BEN symplectique stipule que la courbe d'évolution minimise la fonctionnelle :

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}, \dot{\boldsymbol{u}}) = \int_0^T \left\{ \int_\Omega \left[\phi(\boldsymbol{\sigma}) + \phi^*(\nabla \dot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) - \langle \boldsymbol{\sigma}, \nabla \dot{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{S}\dot{\boldsymbol{\sigma}} \rangle \right] d\Omega \right\} \,\mathrm{dt}$$

parmi toutes les courbes $t \mapsto (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{u}(t))$ satisfaisant les conditions initiales, les conditions aux limites et la conservation de la quantité de mouvement :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \dot{\boldsymbol{p}}$$

L'étape suivante a consisté à vérifier la faisabilité de la méthode, d'abord sur le problème classique du tube épais. On obtient un bon accord avec les solutions analytiques et numériques, en plasticité (sous chargement monotone) et en viscoplasticité (problème de fluage), en dynamique mais on peut aussi faire des chargements cycliques. Faits remarquables à signaler :

- Il s'agit d'un principe variationnel à deux champs. On utilise donc des éléments finis mixtes, ce qui est particulièrement intéressant en plasticité car on a une convergence forte sur les contraintes, ce qui permet de satisfaire le critère de plasticité avec plus de précision.
- En utilisant le principe de BEN, on n'a pas besoin d'utiliser les schémas d'intégration classiques de la dynamique tels que Newmark ou Runge-Kutta avec les problèmes de stabilité qui les accompagnent. Cette problématique est absente.

4 Perspectives

On touche enfin à un aspect plus fondamental : quelle est la nature du **couplage entre Rhéologie et Dynamique** ? Sans entrer dans trop de détails techniques, il faut savoir que pour retrouver la plasticité classique dans ce cadre dynamique, nous devons faire une hypothèse forte que le potentiel de dissipation, ne dépend explicitement que de la dernière variable : $\phi(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{\pi}}) = \varphi(\dot{\boldsymbol{\pi}})$, ce qui conduit à l'interprétation physique du moment dynamique associé aux déformations plastique : $\dot{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\sigma}$ et reviens à introduire dans le formalisme dynamique une loi de comportement statique, c'est-à-dire dans les variables de la statique :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \in \partial\phi(\dot{\boldsymbol{\pi}}) = \partial\phi(\boldsymbol{\sigma})$$

Inversement, le formalisme symplectique suggère d'imaginer des lois de comportement pleinement dynamiques de la forme plus générale suivante :

$$(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{\pi}}) \in \partial^\omega \phi(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{p}}, \dot{\boldsymbol{\pi}}) + \nabla^\omega H(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{\pi})$$

La question ouverte est alors de savoir quelle est la forme analytique à donner au potentiel ϕ. On peut penser que cette généralisation prend tout son sens dans les problèmes de dynamique rapide pour lesquels on peut s'attendre à un couplage fort entre le comportement dissipatif et la dynamique.

Cette fonctionnelle peut être également généralisée naturellement à la plasticité non associée en remplaçant $\phi(\dot{z}) + \phi^{*\omega}(\dot{z}')$ par un **bipotentiel symplectique** $b(\dot{z}, \dot{z}')$ tel que :

$$\forall \dot{z}, \dot{z}', \quad b(\dot{z}, \dot{z}') \geq \omega(\dot{z}, \dot{z}')$$

Pour les **grandes déformations**, cette approche variationnelle peut être étendue assez aisément en formalisme lagrangien. Il est également possible de le faire en formalisme eulérien, ce qui requière toutefois plus d'efforts. Le gradient symplectique doit être calculé par le calcul des variations au sens des jets. Appliquant alors le principe de BEN symplectique à un fluide newtonien, on obtient un principe de minimum dont les équations de variation sont celles de Navier-Stokes.

5 Remerciements

Ce travail a été réalisé grâce au projet de recherche collaborative - international *Dissipative Dynamical Systems by Geometrical and Variational Methods and Application to Viscoplastic Structures Subjected to Shock Waves* (DDGV) financé par l'*Agence Nationale de la Recherche* (ANR) et le *Deutsche Forchungsgemeinschaft* (DFG).

Références

[1] H. Brezis, I. Ekeland, Un principe variationnel associé à certaines équations paraboliques, I. Le cas indépendant du temps, II. Le cas dépendant du temps, C. R. Acad. Sci. Paris Série A-B, 282 (1976) 971–974, et 282 (1976) 1197–1198.

[2] M. Buliga, G. de Saxcé, A symplectic Brezis-Ekeland-Nayroles principle, Mathematics and Mechanics of Solids, doi : 10.1177/1081286516629532 (2016) 1–15

[3] B. Nayroles, Deux théorèmes de minimum pour certains systèmes dissipatifs, C. R. Acad. Sci. Paris Série A-B, 282 (1976) A1035–A1038.