Introduction à la géométrie algébrique réelle et ses applications

Fabien Priziac*[1]

[1]Aix-Marseille Université / Institut de Mathématiques de Marseille (AMU / I2M) – Aix-Marseille Université - AMU, CNRS : UMR7373 – France

Résumé

La géométrie algébrique réelle consiste en l'étude des ensembles algébriques réels et plus généralement des ensembles semi-algébriques. Un ensemble algébrique réel est l'ensemble des solutions réelles d'un système d'égalités polynomiales à coefficients réels. Un ensemble semi-algébrique est l'ensemble des solutions réelles d'un système d'égalités et d'inégalités polynomiales. Bien qu'elle partage avec la géométrie algébrique plusieurs concepts de base, la géométrie algébrique réelle possède ses propres problématiques et méthodes.
Après plusieurs résultats importants établis au cours du 19ème siècle et de la première moitié du 20ème siècle, une étude plus systématique des ensembles algébriques réels et semi-algébriques a débuté pendant la seconde moitié du 20ème siècle et son développement a depuis lors trouvé des connections avec de nombreux domaines des mathématiques (topologie différentielle, topologie algébrique, géométrie analytique, algèbre commutative et non-commutative, théorie des modèles, analyse) ainsi que des applications dans divers autres secteurs scientifiques tels que la robotique, la chimie, l'informatique ou la mécanique.

Dans cette contribution, on propose d'introduire les notions de base de la géométrie algébrique réelle et de donner quelques résultats fondamentaux de la théorie, ainsi que leurs aspects applicatifs et effectifs. Parmi ces théorèmes importants, on évoquera notamment

- le principe de Tarski-Seidenberg (l'image d'un ensemble semi-algébrique par une projection est un ensemble semi-algébrique), basé sur l'algorithme de Sturm pour le comptage des racines réelles d'un polynôme à coefficients réels,

- le Nullstellensatz réel pour les ensembles algébriques réels (mettant en jeu la notion d'idéal réel et de radical réel),

- le Positivstellensatz et le 17ème problème de Hilbert (tout polynôme réel positif est somme de carrés de fonctions rationnelles) et les applications aux certificats de positivité et à l'optimisation,

- l'existence d'une décomposition cylindrique, d'une triangulation et d'une stratification semi-algébriques pour tout ensemble semi-algébrique.
On abordera également les actions de groupe sur les ensembles algébriques réels et la question de la structure géométrique réelle sur les espaces quotients associés.

*Intervenant

Mots-Clés: géométrie algébrique réelle, ensembles algébriques réels, ensembles semi algébriques, applications, aspects effectifs, actions de groupe