

# Comportement vibratoire d'une poutre encastree sous différentes conditions d'appui à l'extrémité

A .Abderrachid <sup>a</sup>, EL. Abdelouafi <sup>b</sup>

a. Ecole Nationale des Sciences Appliquées Al Hoceima, abderrachid.afra@gmail.com

b. Ecole Nationale des Sciences Appliquées Al Hoceima, e.abdelouafi@hotmail.fr

Equipe de recherche : Modélisation, Optimisation et Dynamique des Structures en Génie Civil (MODSGC)

## Résumé :

L'utilisation des nouveaux systèmes non-classiques aux extrémités des poutres est devenue une pratique de plus en plus courante, l'analyse vibratoire de ces structures est importante et nécessaire dans la conception et dimensionnement de nombreux ouvrages en génie civil, aéronautique et Robotique structure. Ce document présente l'étude analytique de la réponse vibratoire d'une poutre encastree en acier reposant sur différent type d'appui a l'extrémité, ce problème traité par l'approche d'Euler-Bernoulli et en utilisant les conditions aux limites classique et non-classique, les équations différentielles qui régissent sur chaque système, les modes propre et les fréquences fondamentale sera déterminé.

## Abstract:

The non-classical boundary condition at the ends of beams has become an increasingly common practice. The vibration analysis of these structures is important and necessary in the design and dimensional, in civil engineering, aeronautics structure and robotic,

This paper presents the analytical study of the vibratory response of a steel embedded beam resting on different types of support at the end, this problem solve by the Euler-Bernoulli approach and using the classical boundary conditions and non-classical, the differential equations that govern on each system, the modes and the fundamental frequencies will be determined.

**Mots clefs :** Poutre, vibration, theorie Euler-Bernoulli, condition aux limites, mode propre, fréquence propre

## 1-Introduction

Les vibrations transversales d'une poutre encastree ont été étudié par plusieurs chercheurs en ingénierie,

[1] S.I. Alvarez G. M.Ficcadenti de Iglesias P.A.A. Laura, ont étudié une poutre encastree non-uniforme attaché à l'extrémité par une mass avec position variable du système ressort linéaire et en rotation par Approche de Rayleigh-Ritz. [2] M.Gurgoze, traité le système mass ressort a la pointe d'une poutre par la méthode de Lagrange. [3] Zhou, trouvé les solutions des expressions pour les fréquences et les modes propre d'une poutre encastree, avec support élastique et une masse très lourde a la pointe.

[4] Seon M. Han, Haym Benaroya , Timothy Wei, ont etudié une poutre encastree-libre par quatre théories Euler – Bernoulli, Rayleigh, Shear et Timoshenko, [5] BinghuiWang, Zhihua Wang, and Xi Zuo, ont développé une solution approximative d'une poutre encastree attaché par une masse en considérant le moment rotatif d'inertie généré par la masse supplémentaire.

## 2- Rappel théorique :

L'équation différentielle du mouvement pour la vibration d'une poutre d'Euler-Bernoulli est donnée par :

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} = \rho A \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (1)$$

Où

A : L'aire de la section transversale,

I : Le moment d'inertie de l'aire de la section transversale,

E : Le module d'élasticité,

$\rho$  : La masse volumique

$y(x,t)$  : déplacement du a la flexion à la position axiale x et à l'instant t.

La résolution de cette équation se fait en effectuant une séparation de variable en posant l'hypothèse que la solution prendra la forme :

$$y(x,t) = W(x)q(t) \quad (2)$$

Avec

$W(x)$  : appelé mode normal ou fonction caractéristique du faisceau.

Par conséquent, l'Eq. (1) est écrit comme :

$$-\frac{1}{q(t)} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{W(x)} \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} = \omega^2 \quad (3) \quad \text{Avec } c = \sqrt{EI / \rho A}$$

A partir de l'équation précédente on obtient 2 équations suivant :

$$\frac{dW(x)^4}{dx^4} - \beta^2 W(x) = 0 \quad (4); \quad \beta = \sqrt{\omega / c}$$

$$\frac{dq(t)^4}{dt^4} + \omega^2 q(t) = 0 \quad (5)$$

$\omega$  : déduire les fréquences propres.

$\beta$  : est la valeur propre du mode normal  $W(x)$ .

En déduire les fréquences propres en fonction des  $\beta_n$  déterminés ci-haut :

$$\omega_n = \beta_n^2 c = \beta_n^2 \sqrt{EI / \rho A} \quad (6)$$

La solution générale de l'équation (4) s'écrit sous la forme :

$$W(x) = A_1 \sin(\beta x) + A_2 \cos(\beta x) + A_3 \sinh(\beta x) + A_4 \cosh(\beta x) \quad (7)$$

Pour les constantes  $A_1$  à  $A_4$  sont déterminés à partir des conditions aux limites.

### 3-Présentation de Problème

Comme il a été mentionné précédemment, dans cette étude, un modèle de poutre avec supports élastiques en extrémité qui est couplé par un système masse-ressort linéaire-ressort rotationnel, la figure 1 illustre ce système mécanique.


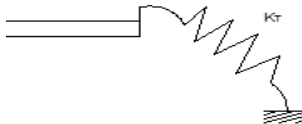
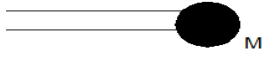


Figure 1: Modèle de système Proposé.

Chacune des conditions aux limites (tab.1) fournit deux équations nécessaires pour déterminer les constantes inconnues  $A_1$  à  $A_4$  et les valeurs  $\beta$  de dans Eq. (7). Ils sont généralement classés en deux

groupes: les limites classique et non classique. Les conditions aux limites classiques sont les plus courantes dans l'analyse des vibrations dans les poutres et sont généralement classées en extrémités libres (appui simple, encastre, libre, articulé .....)

Conditions aux limites non classiques sont moins courantes, mais leur importance est identique à celle des conditions classiques (ressort linéaire, ressort de torsion, masse ; amortisseur .....).

Cas	Condition aux limites	Equation	Model
1	ressort linéaire	$EI \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = K_L y(x,t)$	
2	ressort rotationnel	$EI \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = K_T \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$	
3	Masse	$EI \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = M \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$	

Tab 1: Non-classique condition aux limites

Au niveau d'encastrement ( $x=0$ ) on a :

Fleche nulle :  $W(x)=0$  ;

Rotation nulle :  $\frac{dW(x)}{dx} = 0$

En appliquant ces conditions aux limites on obtient  $A_2 = -A_4$  ;  $A_1 = -A_3$  ; Eq . 7 réduit à :

$$W(x) = A_1(\sin(x) - \sinh(x)) + A_2(\cos(x) - \cosh(x)) \quad (8)$$

Au niveau de l'extrémité ( $x=L$ ) on a :

$$\text{Effort Tranchant de système : } EI \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial^3 x} = K_L y(x,t) + M \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad (9)$$

$$\text{Moment fléchissant de système : } EI \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial^3 x} = K_T \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \quad (10)$$

En appliquant ces conditions aux limites dans l' Eq .2 on obtient :

$$A_1((K_L - M\omega^2)(\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)) - EI\beta^3(\cos(\beta l) - \cosh(\beta l))) + A_2((K_L - m\omega^2)(\cos(\beta l) - \cosh(\beta l)) - EI\beta^3(\sin(\beta l) - \sinh(\beta l))) =$$

$$A_1(-EI\beta^2(\sin(\beta l) + \sinh(\beta l)) - K_T\beta(\cos(\beta l) - \cosh(\beta l))) - A_2(EI\beta^2(\cos(\beta l) + \cosh(\beta l)) + K_T\beta(\sin(\beta l) + \sinh(\beta l))) = 0 \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} (K_L - M\omega^2)(\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)) - EI\beta^3(\cos(\beta l) - \cosh(\beta l)) & (K_L - M\omega^2)(\cos(\beta l) - \cosh(\beta l)) - EI\beta^3(\sin(\beta l) - \sinh(\beta l)) \\ -EI\beta^2(\sin(\beta l) + \sinh(\beta l)) - K_T\beta(\cos(\beta l) - \cosh(\beta l)) & -EI\beta^2(\cos(\beta l) + \cosh(\beta l)) + K_T\beta(\sin(\beta l) + \sinh(\beta l)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Le déterminant de la matrice précédente représente l'équation de la fréquence de système étudié, ensuite en déduire les équations de fréquence des systèmes sont également obtenus à partir de l'expression générale en utilisant des processus limitants et les conditions au limite citée dans le Tab 2.

On note  $R = M / m$ , le rapport de masse attaché et la masse de poutre.

Condition aux limites
1-un ressort linéaire, rotationnel et masse fixé à l'extrémité
2-un ressort linéaire et rotationnel fixé à l'extrémité (R=0)
3-un ressort rotationnel et masse fixé à l'extrémité (K <sub>L</sub> =0)
4-un ressort Linéaire et masse fixé à l'extrémité (K <sub>T</sub> =0)
5-un ressort rotationnel fixé à l'extrémité (R=0, K <sub>L</sub> =0)
6-un ressort Linéaire fixé à l'extrémité (R=0, K <sub>T</sub> =0)
7-masse fixé à l'extrémité (K <sub>L</sub> =0, K <sub>T</sub> =0)
8-encasté-libre (R=0, K <sub>T</sub> =0, K <sub>L</sub> =0)

Tab 2: Les équations de fréquence

D'après la détermination les équations des fréquences, les équations sont **non-linéaire** pour le résoudre en utilise la méthode de **Newton-Raphson** avec le code de Programmation **MATLAB**, pour trouver les racines des équations.

L(m)	I(m <sup>4</sup> )	K <sub>L</sub> (N/m)	K <sub>T</sub> (N.m/rad)	b(cm)	h(cm)	E (GPa)	R	ρ (Kg/m <sup>3</sup> )
1m	3.125 10 <sup>-10</sup>	1000	1000	3	0.5	200	1.50	7850

Tab 3: Propriété mécanique et géométrique de système

#### 4-Résultats et discussions :

		Cas 1	Cas 2	Cas 3	Cas 4	Cas 5	Cas 6	Cas 7	Cas 8
<b>Mode 1</b> <b>n=1</b>	$\beta_1$	2.00218	2.89745	1.67020	1.81734	2.42671	2.85788	1.14644	1.87510
	$f_1$	4.64834	9.73473	3.23466	3.82969	6.82855	9.47066	1.52402	4.07700
<b>Mode 2</b> <b>n=2</b>	$\beta_2$	5.26835	5.74040	5.26726	4.00237	5.71382	4.85558	3.99951	4.69409
	$f_2$	32.18411	38.2099	32.17079	18.57491	37.85693	27.33849	18.54837	25.55024
<b>Mode 3</b> <b>n=3</b>	$\beta_3$	8.76164	9.01666	8.76159	7.11359	9.01291	11.00768	7.11341	7.85475
	$f_3$	89.01498	94.2722	89.01396	58.67727	94.19381	140.50245	58.67430	71.54133

Tab 4: Les valeurs Propres et les fréquences propres

D'après l'Eq.12 les expressions de mode propre  $w(x)$  est déterminé, pour chaque système, pour les rotations de chaque système est déterminé par le dérivé de mode  $W(x)$ .

Les trois modes Propres pour chaque cas :

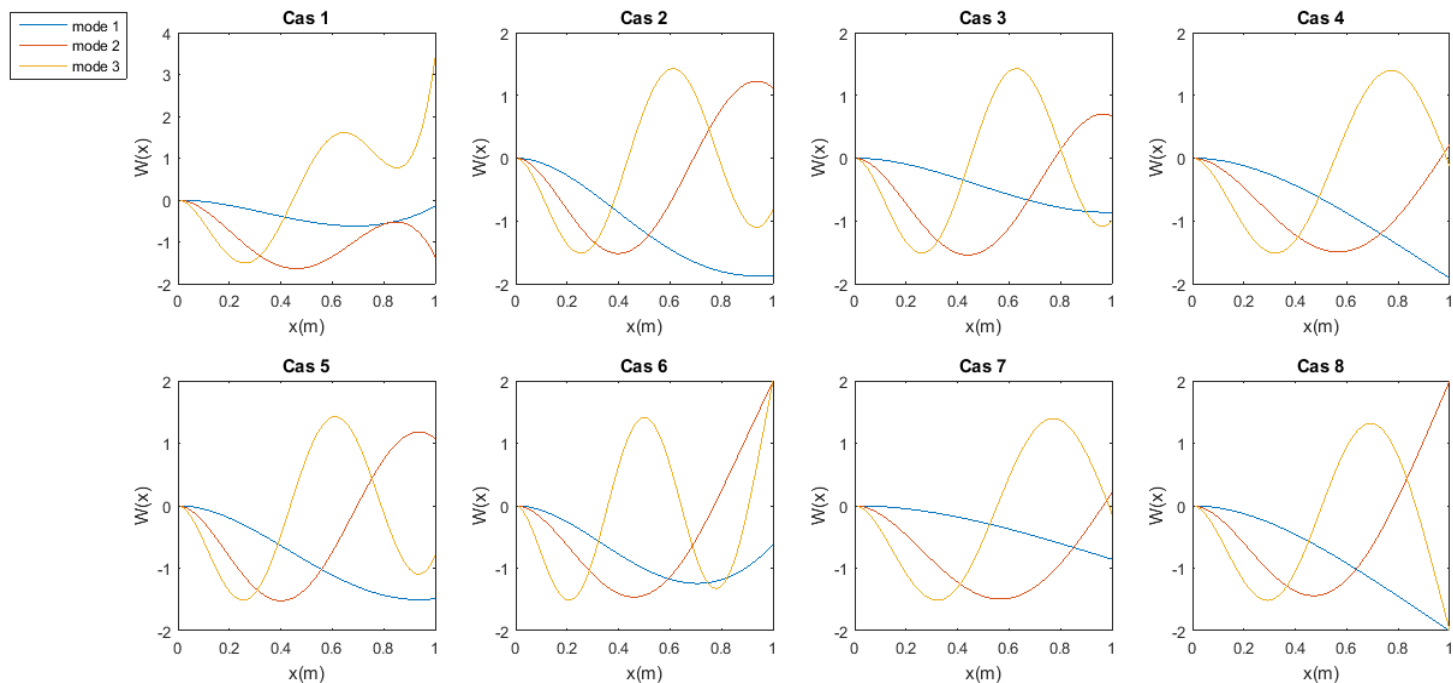


Figure 2 : Les Modes Propre en flexion

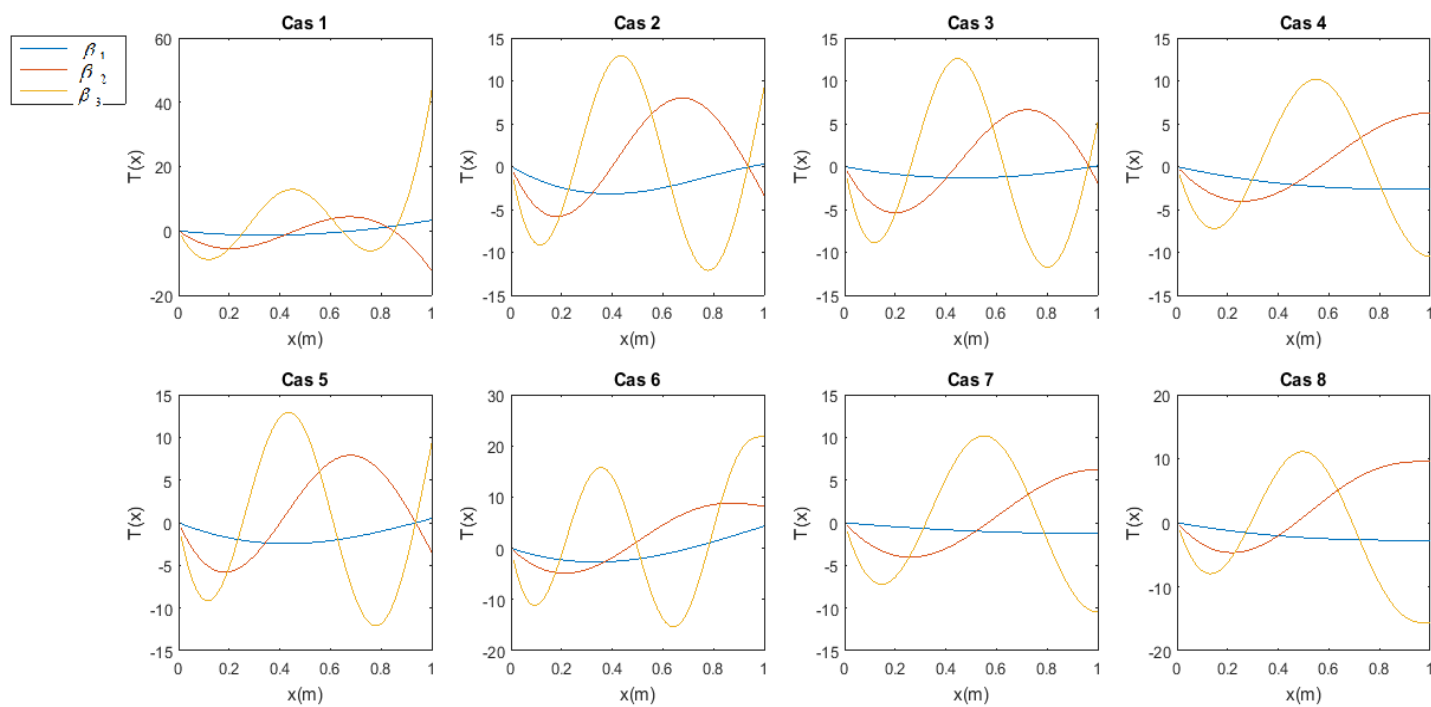
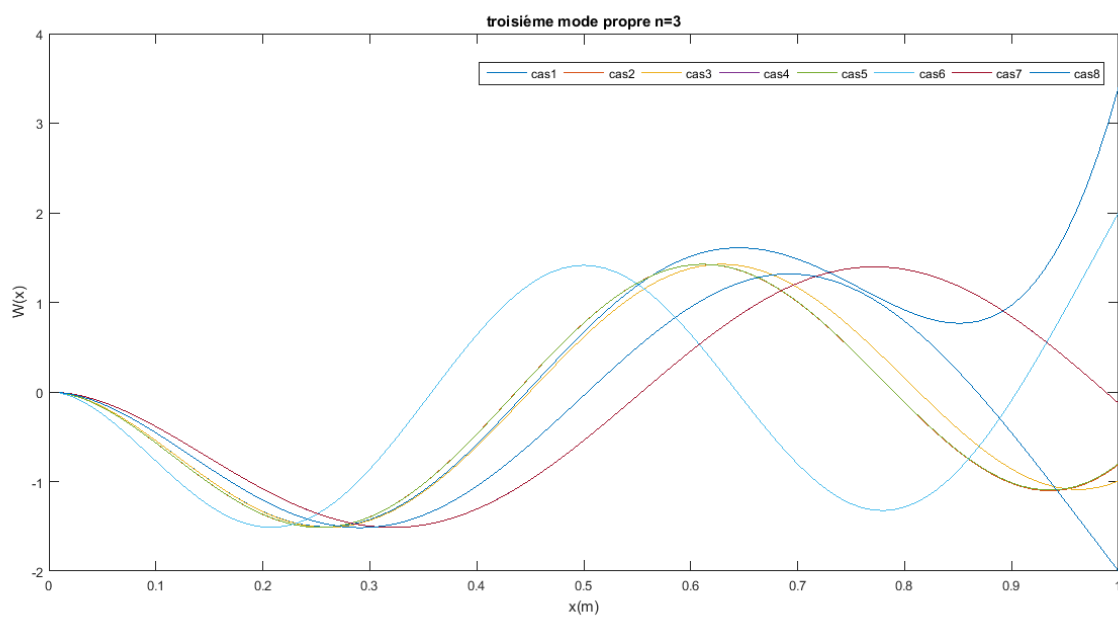
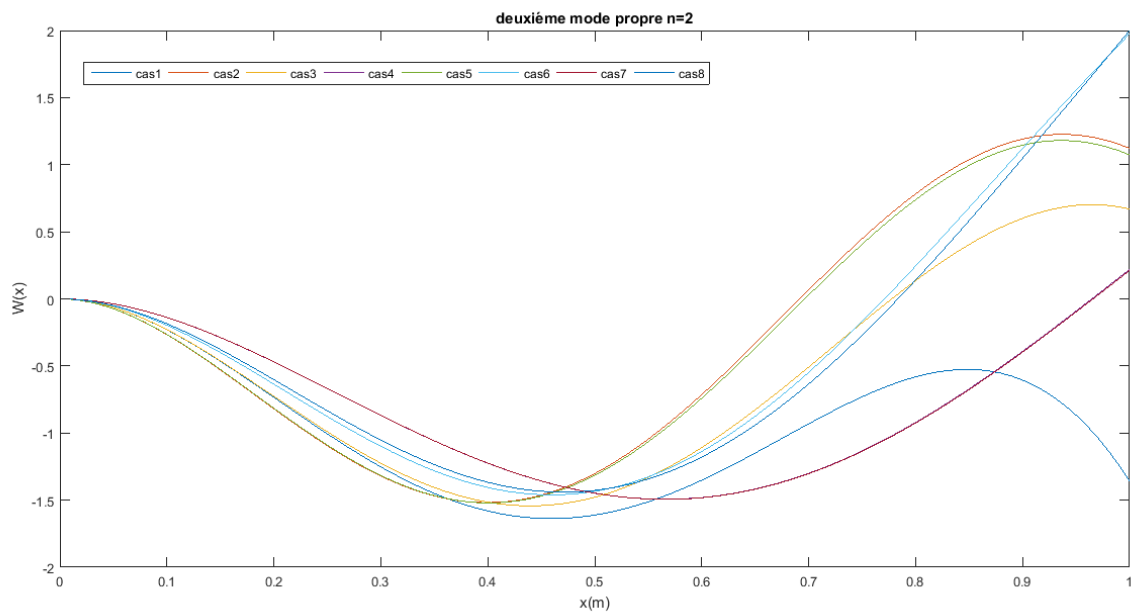
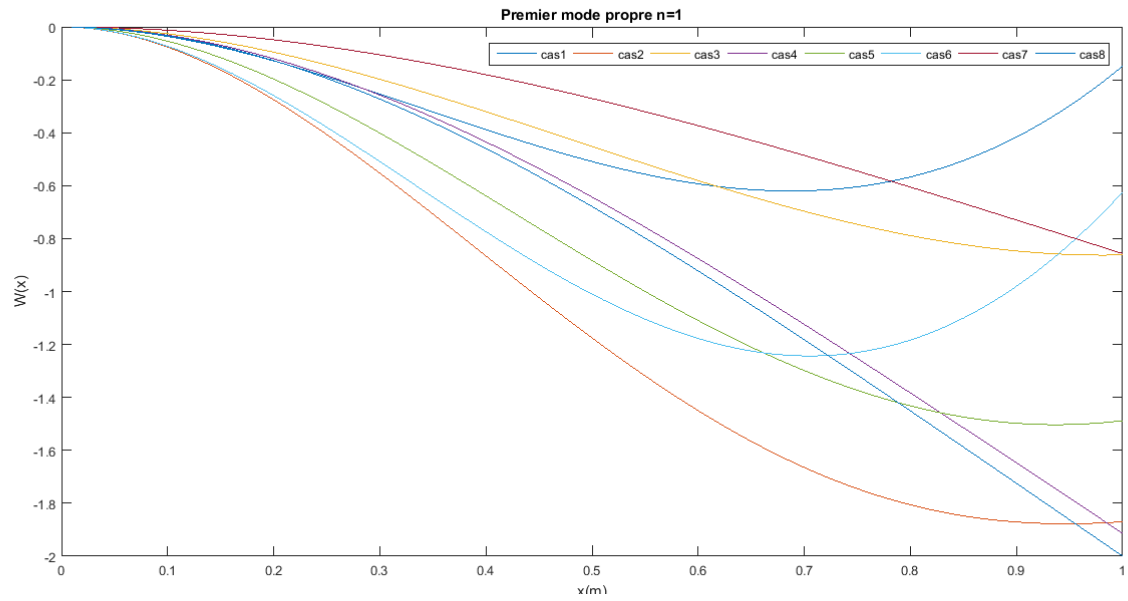


Figure 3 : Rotation de poutre pour les 3 valeurs Propres  $\beta_{n=1,2,3}$



Cas	$K_T$	$K_L$		R=0.5	R=1	R=1.5
CAS 1	500	500	$\beta_1$	2.29963	2.08275	1.94096
			$f_1$	6.13208	5.02998	4.36843
				5.98844	5.97693	5.97204
			$\beta_2$	41.58342	41.42368	41.35597
			$f_2$	9.59408	9.59167	9.59079
			$\beta_3$	106.73310	106.67963	106.65993
	1000	1000	$\beta_1$	2.40135	2.15774	2.00218
			$f_1$	668656	5.39871	4.64834
				5.38743	5.30500	5.26835
			$\beta_2$	33.65547	32.63351	32.18411
			$f_2$	8.80769	8.78698	8.76164
			$\beta_3$	89.95316	89.53063	89.01498
	1500	1500	$\beta_1$	2.5351	2.27505	2.10945
			$f_1$	7.45216	6.00169	5.15977
				5.23874	5.13891	5.09540
			$\beta_2$	31.82343	30.62207	30.11719
			$f_2$	8.49028	8.42826	8.40296
			$\beta_3$	83.58663	82.40125	81.90729
	2000	2000	$\beta_1$	2.65587	2.38301	2.20908
			$f_1$	8.17910	6.58482	5.65868
				5.17772	5.06992	5.02361
			$\beta_2$	31.08640	29.80542	29.26286
			$f_2$	8.35525	8.28257	8.25321
			$\beta_3$	80.94896	79.54679	79.01395
CAS 3	500	-	$\beta_1$	2.11954	1.92054	1.79009
			$f_1$	5.20925	4.27699	3.71571
				5.98820	5.97684	5.97200
			$\beta_2$	41.58011	41.42249	41.37114
			$f_2$	9.594073	9.59167	9.59079
			$\beta_3$	106.73292	106.67958	106.70057
	1000	-	$\beta_1$	2.00452	1.80026	1.67020
			$f_1$	4.65921	3.75805	3.23466
				5.38244	5.30298	5.26726
			$\beta_2$			
			$f_2$			
			$\beta_3$			



		$f_2$	33.59324	32.60863	32.17079
			8.80739	8.77488	8.76159
		$\beta_3$			
		$f_3$	89.94705	89.28426	89.01396
1500	-	$\beta_1$	1.97459	1.76990	1.64044
		$f_1$	4.52112	3.6323	3.12042
			5.22862	5.13483	5.093224
		$\beta_2$			
		$f_2$	31.70060	30.57350	30.08000
			8.48930	8.427921	8.40279
		$\beta_3$			
		$f_3$	83.56729	82.36320	81.87283
2000	-	$\beta_1$	1.96081	1.75604	1.62691
		$f_1$	4.45823	3.57570	3.06915
			5.16251	5.06384	5.02038
		$\beta_2$			
		$f_2$	30.90407	11.87756	29.23688
			8.35360	8.282005	8.25293
		$\beta_3$			
		$f_3$	80.91715	79.56626	79.00859
	-	$\beta_1$	1.96081	1.72558	1.52567
	500	$f_1$	4.45823	3.45276	2.70009
			4.11932	4.03395	4.00091
		$\beta_2$			
		$f_2$	19.67629	18.86921	18.56844
			7.19096	7.13431	7.11350
		$\beta_3$			
		$f_3$	59.96065	59.01976	58.69818
	-	$\beta_1$	2.24288	1.97672	1.81734
	1000	$f_1$	5.83316	4.53088	3.82969
			4.12810	4.03690	4.00237
		$\beta_2$			
		$f_2$	19.7603	18.8968	18.57491
			7.19159	7.13450	7.11359
		$\beta_3$			
		$f_3$	59.97121	59.02288	58.67727
	-	$\beta_1$	2.443	2.15651	1.98344
	1500	$f_1$	6.92052	5.39256	4.56173
			4.13754	4.04000	4.003878
		$\beta_2$			
		$f_2$	19.850	18.92584	18.58891
			7.19223	7.13469	7.11368
		$\beta_3$			
		$f_3$	59.98187	59.02601	58.67885

CAS 4

CAS 7	2000	$\beta_1$	2.60011	2.29914	2.11553
		$f_1$	7.83927	6.12947	5.18956
			4.14767	3.93766	4.00544
		$\beta_2$			
		$f_2$	19.94806	17.97920	18.603447
			7.19288	7.08156	7.113775

CAS 2	$K_T$	$K_L$	Valeur Propre $\beta_1$ , fréquence propre $f_1$	
	500	500	$\beta_1$	1.66868
			$f_1$	3.228779
			$\beta_2$	2.62060
			$f_2$	7.963329
			$\beta_3$	6.04991
			$f_3$	42.44154
	1000	1000	$\beta_1$	1.76388
			$f_1$	3.60769
			$\beta_2$	2.78414
			$f_2$	8.98826
			$\beta_3$	5.74138
			$f_3$	38.22313
1500	1500	$\beta_1$	1.80092	
		$f_1$	3.76080	
		$\beta_2$	2.95347	
		$f_2$	10.11482	
		$\beta_3$	5.68467	
		$f_3$	37.47171	
2000	2000	$\beta_1$	1.81984	
		$f_1$	3.84024	
		$\beta_2$	3.10203	
		$f_2$	11.15795	
			$\beta_3$	5.67429

Tab.6 les Valeur Propre et fréquence Propre

			$f_3$	37.33501
<b>CAS 5</b>	500	-	$\beta_1$	2.5068
			$f_1$	7.28671
			$\beta_2$	6.04725
			$f_2$	42.40422
			$\beta_3$	9.62502
			$f_3$	107.42266
	1000	-	$\beta_1$	2.42671
			$f_1$	6.82854
			$\beta_2$	5.71382
			$f_2$	37.85700
			$\beta_3$	9.01291
			$f_3$	94.19401
	1500	-	$\beta_1$	2.40444
			$f_1$	6.70378
			$\beta_2$	5.63127
			$f_2$	36.77103
			$\beta_3$	8.86196
			$f_3$	91.06518
2000	-	$\beta_1$	2.39398	
		$f_1$	6.64558	
		$\beta_2$	5.63127	
		$f_2$	36.77103	
		$\beta_3$	8.86196	
		$f_3$	91.06518	
<b>CAS 6</b>	-	500	$\beta_1$	2.54374
			$f_1$	7.50304
			$\beta_2$	4.77343
			$f_2$	26.4212
			$\beta_3$	11.00158
			$f_3$	140.34689
	-	1000	$\beta_1$	2.85788
			$f_1$	9.47066
			$\beta_2$	4.85558
			$f_2$	27.33849
			$\beta_3$	11.00768
			$f_3$	140.50245
-	1500	$\beta_1$	3.05798	
		$f_1$	10.84330	
		$\beta_2$	4.93885	
		$f_2$	28.28426	

		$\beta_3$	11.01383
		$\beta_1$	3.19882
-	2000	$f_1$	11.86964
		$\beta_2$	5.02173
		$f_2$	29.24146
		$\beta_3$	11.02003
		$f_3$	140.8179694

Les résultats

ci-dessus

défini clairement l'influence de type d'appui (condition aux limites) sur  
d'une poutre encastré :

la réponse vibration

cas	paramètre	Fréquence Propre
1	$K_L; K_T, R$ ↗	↗
2	$K_L; K_T$ ↗	↗
3	$K_T, R$ ↗	↘
4	$K_L, R$ ↗	↘
5	$K_T$ ↗	↘
6	$K_L$ ↗	↗
7	$R$ ↗	↘

Tab.7 Variation de fréquence propre

Les systèmes pour cas 3, 4, 5 et 7 sont des structures où les fréquences propres et les formes de mode peuvent être modifiées de manière significative afin d'éviter résonance et autres phénomènes dynamiques indésirables du point de vue de la stabilité.

## 5-Conclusions

Dans cet article, l'analyse de vibration d'une poutre encastré reposé sur plusieurs type d'appui a été étudiée analytiquement selon la méthode d'Euler-Bernoulli, l'influence des conditions aux limites non-classique sur la fréquence est bien déterminées, de plus, Les différentes équations de mouvement et les équations caractéristiques des fréquences ont été déduire et résolus.

## 6-References

- [1] S.I. Alvarez G. M.Ficcadenti de Iglesias P.A.A. Laura Journal of Sound and Vibration , Vibrations of an elastically restrained non-uniform beam with translational and rotational springs and with a tip mass 1988..
- [2] M.Gurgoze, "On the eigenfrequencies of a cantilever beam with attached tip mass and a spring-mass system," Journal of Sound and Vibration, vol. 190, no. 2, pp. 149–162, 1996.

- [3] Zhou, “The vibrations of a cantilever beam carrying a heavy tip mass with elastic supports ,  
”*J. Sound Vibration*, Vol. 206, No. 2, pp. 275–279 (1997).
- [4] Seon M. Han, Haym Benaroya , Timothy Wei, Chapter 5; and S. M. Han, H. Benaroya, and T. Wei,  
“Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories,” *J. Sound Vibration*,  
Vol. 225, No. 5, pp. 935–988 (1999).
- [5] Binghui Wang, Zhihua Wang, and Xi Zuo Frequency Equation of Flexural Vibrating Cantilever Beam  
Considering the Rotary Inertial Moment of an Attached Mass *Mathematical Problems in Engineering* 2016.
- [6] L. Meirovitch, *Elements of vibration analysis*, McGraw-Hill, New York, (1986).
- [7] J.P. Den Hartog-*Mechanical Vibrations*-Crastré Press (2008).