

Expressions analytiques des champs mécaniques pour les modèles de type Gurson

C. Sartori, S. Mercier, A. Molinari

Université de Lorraine, CNRS, Arts et Métiers ParisTech, LEM3, F-57000 Metz,
cedric.sartori@univ-lorraine.fr, sebastien.mercier@univ-lorraine.fr,
alain.molinari@univ-lorraine.fr

Résumé :

Ce travail a pour cadre l'étude des matériaux poreux décrits par des modèles de type Gurson (Gurson (1977), Gologanu et al. (1997), etc...). L'objectif est de présenter des solutions analytiques pour les grandeurs mécaniques du problème (à savoir la vitesse de déformation équivalente dans la matrice, le multiplicateur plastique et le tenseur des contraintes) lors d'un chargement en vitesse de déformation imposée. La méthode s'applique aux matériaux viscoplastiques contenant des vides sphéroïdaux et/ou en présence d'anisotropie, d'effet de température et d'écrouissage. Afin d'illustrer la démarche, le cas d'un matériau poreux viscoplastique contenant des vides sphériques est abordé. D'autres exemples seront traités lors de l'exposé.

Abstract:

This work deals with Gurson type models for porous materials (Gurson (1977), Gologanu et al. (1997), etc...). We propose analytical solutions for the plastic multiplier, the equivalent plastic strain rate and the components of the macroscopic stress. The method is also valid for viscoplastic materials containing spheroidal voids where matrix anisotropy, temperature effect and strain hardening may be accounted for. To illustrate this work, a viscoplastic material containing spheroidal voids is considered. Results are compared with those of the literature.

Mots clefs : Matériaux poreux, Modèle de Gurson, Solutions analytiques, Anisotropie, Viscoplasticité.

1 Introduction

L'endommagement des matériaux ductiles est source d'études depuis de nombreuses années. Parmi les premiers travaux sur le sujet, Gurson [1] a analysé le cas des matériaux poreux, à matrice parfaitement plastique, contenant des vides sphériques ou cylindriques. Cette approche initiale a été progressivement étendue, par de nombreux auteurs, pour prendre par exemple en compte des vides sphéroïdaux sous chargement axisymétrique (Gologanu et al. [2]), l'anisotropie de la matrice (Cazacu et Barlat [3]), des chargements généraux Madou et Leblond ([4]), etc... De plus, ces approches ont aussi été établies pour des lois de comportement de la matrice plus complexes. Ainsi, la viscoplasticité, l'écrouissage ou les effets thermiques peuvent être considérés. Dans ces cas, la résolution du problème mécanique repose sur des méthodes numériques (Aravas [5]).

Récemment, Sartori et al. [6] ont mis en évidence la possibilité d'obtenir des solutions analytiques pour les grandeurs mécaniques du problème (la vitesse de déformation équivalente dans la matrice, le multiplicateur plastique et le tenseur des contraintes macroscopiques) lorsque le matériau poreux est soumis à un chargement en vitesse de déformation.

Après avoir rappelé la méthodologie nous en illustrons l'efficacité par quelques exemples fréquemment considérés dans la littérature (matrice viscoplastique, vides sphéroïdaux). Pour le traitement du problème en présence d'anisotropie et/ou avec une loi de comportement plus complexe, on pourra se reporter à [6].

2 Position du problème

On considère un matériau poreux, de porosité f contenant des vides sphéroïdaux. Le volume élémentaire représentatif (VER) du matériau est défini en figure 1, comme dans Gologanu et al. [2].

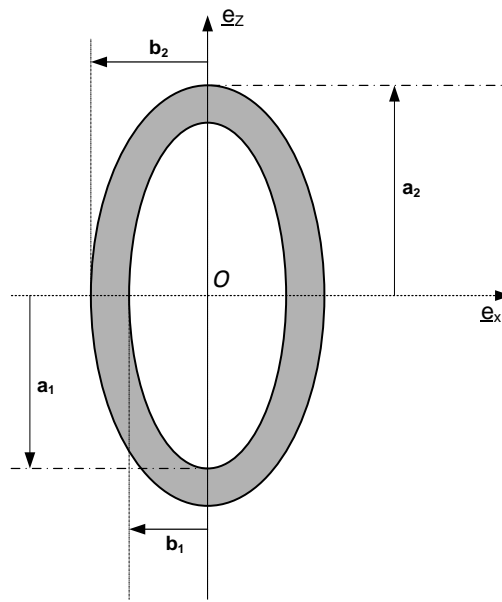


FIG. 1 – Configuration du VER : un vide sphéroïdal allongé de demi axes a_1 et b_1 est imbriqué dans un sphéroïde confocal de demi axes a_2 et b_2 . L'axe de symétrie est $(O; \underline{e}_z)$.

Le VER est soumis à un chargement en vitesse de déformation homogène à la frontière extérieure :

$$\underline{v} = \underline{D} \cdot \underline{x} \text{ avec } \underline{D} = \begin{bmatrix} D_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & D_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & D_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (1)$$

On note $\underline{\underline{\Sigma}}$ le tenseur des contraintes macroscopiques à la frontière extérieure du VER. Considérant des vides sphéroïdaux dont les axes principaux sont alignés avec les directions $(\underline{e}_x; \underline{e}_y; \underline{e}_z)$ on a :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{bmatrix} \Sigma_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma_{ZZ} \end{bmatrix} \quad (2)$$

La matrice est viscoplastique (on néglige l'élasticité) avec $\tilde{\sigma}_0$ la contrainte d'écoulement de la matrice.:

$$\tilde{\sigma}_0 = F(d_{eq}) \quad (3)$$

d_{eq} est la vitesse de déformation équivalente, au sens de von Mises.

On adopte le modèle de Gologanu et al. [2] pour décrire le comportement du matériau poreux contenant des vides sphéroïdaux allongés ou aplatis. La surface de charge adoptée est donc :

$$\Phi = \frac{c}{\tilde{\sigma}_0^2} (\Sigma_{ZZ} - \Sigma_{XX} + \eta \Sigma_h)^2 + 2(g+1)(g+f) \cosh\left(k \frac{\Sigma_h}{\tilde{\sigma}_0}\right) - (g+1)^2 - (g+f)^2 = 0 \quad (4)$$

Avec $\Sigma_h = 2\alpha_2 \Sigma_{XX} + (1 - 2\alpha_2) \Sigma_{ZZ}$. (α_2, C, η, g, k) sont des paramètres détaillés dans Gologanu et al. [2] pour un matériau parfaitement plastique. Dans cette approche proposée par Gologanu et al. [2] la distance focale c est constante $c = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{a_2^2 - b_2^2}$ et la porosité s'écrit $f = \frac{a_1 b_1^2}{a_2 b_2^2}$ (avec les notations de la figure 1). On note aussi $e_2 = \frac{1}{\cosh(\lambda_2)}$ l'excentricité de la surface extérieure du VER et $e_1 = \frac{1}{\cosh(\lambda_1)}$ l'excentricité de la surface du vide. La définition de λ_2 dépend de la forme de vide, $\lambda_2 = \operatorname{arctanh}\left(\frac{b_2}{a_2}\right)$ pour un vide aplati et $\lambda_2 = \operatorname{arctanh}\left(\frac{a_2}{b_2}\right)$ pour un vide allongé.

La loi d'écoulement associée conduit à :

$$\underline{\underline{D}} = \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\Sigma}}} \quad (5)$$

Λ est le multiplicateur plastique qui vérifie les conditions de Kuhn-Tucker ($\Lambda \geq 0, \Phi \leq 0$ et $\Lambda \Phi = 0$). Dans le cadre des matériaux visqueux, l'équivalence entre le travail plastique macroscopique et microscopique :

$$\underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{D}} = (1-f) \tilde{\sigma}_0 d_{eq} \quad (6)$$

permet alors de relier heuristiquement quantités macroscopiques et locales au niveau de la matrice.

Notons que dans le cas d'un matériau rigide parfaitement plastique, des solutions analytiques ont déjà été proposés dans la littérature (par exemple Gologanu et al. [2], Leblond [8], Gologanu [9]). On se propose dans la partie suivante d'illustrer, sur un exemple, la résolution du système d'équations (1-6).

Afin d'illustrer la méthode et de présenter les principaux résultats on se limite ici au cas d'un chargement axisymétrique. Dans ce cas on a $D_{XX} = D_{YY}$ et $\Sigma_{XX} = \Sigma_{YY}$. Le système à résoudre peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \Phi = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{XX}} D_{ZZ} - \frac{\partial \Phi}{\partial \Sigma_{ZZ}} D_{XX} = 0 \\ 2\Sigma_{XX} D_{XX} + \Sigma_{ZZ} D_{ZZ} = (1-f) \tilde{\sigma}_0 d_{eq} \\ \Lambda > 0 \end{cases} \quad (7)$$

La résolution du système (7) a été proposée dans Sartori et al. [6]. On obtient :

$$\begin{cases} \Sigma_{XX} = \tilde{\sigma}_0 (\beta_1 + (2\alpha_2 - 1)\beta_2) \\ \Sigma_{ZZ} = \tilde{\sigma}_0 (\beta_1 + 2\alpha_2 \beta_2) \\ \Lambda = -\frac{\Pi_1 \tilde{\sigma}_0}{(g+1)(g+f)k \sinh(k\beta_1)} \\ d_{eq} = \frac{\beta_1 \operatorname{tr}(\underline{\underline{D}}) + 2\beta_2 \Pi_2}{1-f} \end{cases} \quad (8)$$

avec :

$$\begin{cases} \Pi_1 = (-1 + 2\eta\alpha_2) \frac{D_{ZZ}}{2} + (-1 - \eta + 2\eta\alpha_2) D_{XX} \\ \Pi_2 = \alpha_2 D_{ZZ} - (1 - 2\alpha_2) D_{XX} \end{cases} \quad (9)$$

Les coefficients β_1 et β_2 sont donnés par :

$$\begin{cases} \beta_1 = -\frac{1}{k} \ln(X + \sqrt{X^2 - 1}) \operatorname{sgn}(\Pi_1) \\ \beta_2 = -\eta\beta_1 - \frac{\Pi_2 k}{\Pi_1 C} (g + 1)(g + f) \sinh(k\beta_1) \end{cases} \quad (10)$$

où :

$$X = -\frac{2\delta_3}{\delta_2 + \sqrt{\delta_2^2 - 4\delta_1\delta_3}} \quad (11)$$

et

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{\Pi_2^2 k^2}{\Pi_1^2 C} (g + 1)^2 (g + f)^2 \\ \delta_2 = 2(g + 1)(g + f) \\ \delta_3 = -(g + 1)^2 - (g + f)^2 - \frac{\Pi_2^2 k^2}{\Pi_1^2 C} (g + 1)^2 (g + f)^2 \end{cases} \quad (12)$$

Les cas $\Pi_1 = 0$ et $\Pi_2 = 0$ sont étudiés dans [6]. Il faut aussi noter que les trois premières relations du système (8) ont déjà été obtenues, en utilisant une approche différente, par Gologanu et al. [9] dans le cas d'une matrice parfaitement plastique. Dans notre approche, la connaissance supplémentaire de d_{eq} (Eq. (8)) nous permet d'élargir le domaine d'utilisation des expressions analytiques à des comportements de la matrice plus complexes, notamment viscoplastique. Dans le cas d'une matrice viscoplastique en loi puissance ($\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 d_{eq}^m$), on obtient directement :

$$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 \left(\frac{\beta_1 \operatorname{tr}(\underline{D}) + 2\beta_2 \Pi_2}{1-f} \right)^m \quad (13)$$

Avec m la sensibilité à la vitesse de déformation. L'expression du tenseur des contraintes macroscopiques pour un matériau poreux soumis à un tenseur des vitesses de déformation homogène en chargement axisymétrique est alors complètement analytique, donnée par les Eqs. (8) et (13).

Finalement, la connaissance d'expressions analytiques pour les quantités suivantes : tenseur des contraintes, vitesse de déformation équivalente dans la matrice et multiplicateur plastique, permet de réduire la complexité de mise en œuvre numérique, notamment lors de l'implémentation de ces modèles dans des codes EF, voir Sartori et al. [6] pour plus de détails.

3 Matériau poreux viscoplastique avec vides sphériques

Le modèle de Gologanu et al. [2] contient le modèle de Gurson avec vide sphérique en adoptant les coefficients suivants : $C = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{3}$, $\eta = 0$, $g = 0$, $k = \frac{3}{2}$. Dans ce cas, on $\Pi_1 = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\underline{D})$,

$$\Pi_2 = \frac{1}{3} (D_{ZZ} - D_{XX}) \text{ et } X = \frac{-2 + \sqrt{4 - 9 \frac{\Pi_2^2}{\Pi_1^2} \left(-1 - f^2 - \frac{9 \Pi_2^2}{4 \Pi_1^2} f^2 \right)}}{\frac{9 \Pi_2^2}{2 \Pi_1^2} f}$$

Dans le cas d'une matrice viscoplastique sous chargement sphérique, le système d'équations (8) conduit à :

$$\begin{cases} d_{eq} = \frac{\frac{2}{3} \ln\left(\frac{1}{f}\right) |tr(\underline{D})|}{1-f} \\ \tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 \left(\frac{\frac{2}{3} \ln\left(\frac{1}{f}\right) |tr(\underline{D})|}{1-f} \right)^m \\ \Sigma_{XX} = \Sigma_{ZZ} = \frac{2}{3} \tilde{\sigma}_0 \ln\left(\frac{1}{f}\right) sgn\left(tr(\underline{D})\right) \\ \Lambda = \frac{2\tilde{\sigma}_0 |tr(\underline{D})|}{3(1-f^2)} \end{cases} \quad (14)$$

La partie sphérique du tenseur des contraintes issue du modèle de Gurson Σ_m^{Gu} pour un matériau viscoplastique vaut alors :

$$\Sigma_m^{Gu} = \frac{2}{3} \sigma_0 \left(\frac{2}{3} \frac{|tr(\underline{D})|}{1-f} \right)^m \left(\ln \frac{1}{f} \right)^{m+1} sgn\left(tr(\underline{D})\right) \quad (15)$$

Il est alors intéressant de comparer ce résultat à la solution exacte Σ_m^{Ex} obtenue, dans ce cas particulier, par Michel et Suquet [7] ou Leblond et Suquet [10] :

$$\Sigma_m^{Ex} = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{m} \left(\frac{1}{f^m} - 1 \right) \left(\frac{2}{3} |tr(\underline{D})| \right)^m sgn\left(tr(\underline{D})\right) \quad (16)$$

Pour ce faire on définit le rapport suivant :

$$R^{sph} = \frac{\Sigma_m^{Ex}}{\Sigma_m^{Gu}} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{f^m} - 1 \right) \frac{(1-f)^m}{\left(\ln\left(\frac{1}{f}\right) \right)^{m+1}} \quad (17)$$

Les évolutions du rapport R^{sph} pour quatre valeurs différentes de la porosité f et pour une sensibilité à la vitesse de déformation m qui varie de 0 à 1, sont données en figure 2. Dans le cas $m=0$, on note que les deux expressions sont équivalentes, conduisant à $R^{sph} = 1$. Pour des faibles valeurs de m et des porosités f plus importantes, les deux expressions sont équivalentes. Par contre, les deux modèles divergent dès que la porosité diminue et que la sensibilité à la vitesse de déformation augmente. Ainsi pour une sensibilité de $m=0.05$ et une porosité de $f = 10^{-3}$ on a 8% d'écart entre les deux approches. Cet écart pouvant atteindre près de 31% pour $f = 10^{-3}$ lorsque $m=0.15$.

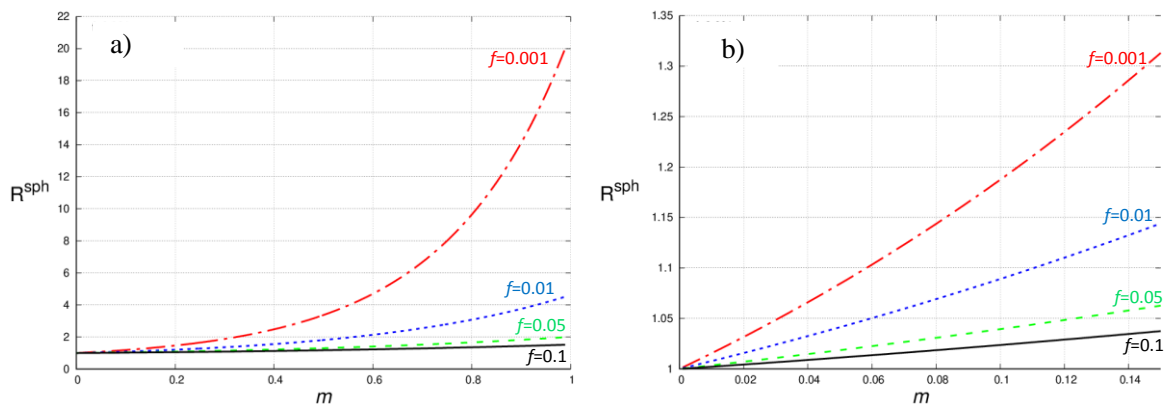


FIG. 2 – Evolution du rapport R^{sph} en fonction de m pour 4 valeurs de la porosité f . a) m varie de 0 à 1.0. b) m varie de 0 à 0.15. La matrice est viscoplastique (loi puissance) et les vides sont sphériques.

Dans le cas du vide cylindrique dans une matrice viscoplastique en déformation plane, on peut de la même façon comparer la solution de Gurson Σ_m^{Cyl-Gu} et la solution exacte Σ_m^{Ex-Cyl} proposée par Leblond et Suquet [10].

$$\Sigma_m^{Gu-Cyl} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}} \left(\frac{tr(\underline{D})}{\sqrt{3}(1-f)} \right)^m \left(\ln \frac{1}{f} \right)^{m+1} \quad (18)$$

$$\Sigma_m^{Ex-Cyl} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_o}{m} \left(\frac{1}{f^m} - 1 \right) \left(\frac{tr(\underline{D})}{\sqrt{3}} \right)^m \quad (19)$$

En définissant le rapport $R^{Cyl} = \frac{\Sigma_m^{Ex-Cyl}}{\Sigma_m^{Gu-Cyl}}$, on constate que $R^{Cyl} = R^{sph}$. Ceci nous permet d'étendre les conclusions précédentes effectuées à partir de l'étude des évolutions de R^{sph} en fonction de f et de m .

4 Conclusion

Une méthode permettant de déterminer les expressions analytiques du tenseur des contraintes, de la vitesse de déformation équivalente dans la matrice et du multiplicateur plastique pour les modèles de type Gurson est présentée. Cette méthode, développée dans Sartori et al. [6], est appliquée dans le cas d'un matériau poreux viscoplastique contenant des vides sphériques. Dans ce cas particulier, la solution obtenue est comparée à la solution exacte de la littérature. Il est montré que les deux solutions coïncident uniquement pour un matériau parfaitement plastique ($m=0$).

La méthode exposée est aussi valide pour les chargements non axisymétriques (pour peu que les axes de chargement et les axes du vide ellipsoïdal coïncident) et avec des matériaux anisotropes. Lors de l'implémentation des modèles dans des codes de calculs (élasticité prise en compte en plus), les schémas numériques habituellement utilisés dans la littérature bénéficient aussi de la méthode proposée qui permet de réduire le nombre d'équations non linéaires à résoudre, voir Sartori et al. [6].

Références

- [1] A. L. Gurson, Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: part I – yield criteria and flow rules for porous ductile media, J. Eng. Mater. Technol. 99 (1977), p 2-15
- [2] M. Gologanu, J.-B. Leblond, G. Perrin, J. Devaux, Recent extensions of Gurson's model for porous ductile metals, In: Suquet, P. (Ed.) Continuum Micromechanics, International Centre for Mechanical Sciences Courses and Lectures n°377. Springer-Verlag Vienna, pp 61-130, 1997
- [3] O. Cazacu, F. Barlat, Application of the theory of representation to describe yielding of anisotropic aluminium alloys, Int. J. Eng. Sci. 41 (2003), 1367-1385
- [4] K. Madou, J.-B. Leblond, A Gurson-type criterion for porous ductile solids containing arbitrary ellipsoidal voids – I: limit-analysis of some representative cell, J. Mech. Phys. Mater. 40 (2012), 783-812
- [5] N. Aravas, On the numerical integration of a class of pressure-dependent plasticity models, Int. J. Numer. Methods Eng. 24 (1987), 1395-1416
- [6] S. Sartori, S. Mercier, A. Molinari, Analytical expression of mechanical fields for Gurson type porous models, International Journal of Solids and Structures 163 (2019), pp 25-39
- [7] J.C. Michel, P. Suquet, The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials, Journal of the Mechanics and Physics of Materials 40 (1992), 783-812.
- [8] J.-B. Leblond, Mécanique de la rupture fragile et ductile, Etudes en mécanique des matériaux et structures, Hermes Science Publications
- [9] M. Gologanu, Etudes de quelques problèmes de rupture ductile des métaux, Ph. D. (1997), Université de Paris VI, Paris, France
- [10] J.-B. Leblond, P. Suquet, Exact results and approximate models for porous viscoplastic solids, International Journal of Plasticity 10 (1994), 213-235