

Solutions périodiques de systèmes à chocs avec couplage fluide-élastique

R. ALCORTA ^{a,b}, S. BAGUET ^a, B. PRABEL ^b

P. PITEAU ^b, G. JACQUET ^a

a. LaMCoS CNRS UMR5259, INSA-Lyon, Université de Lyon, 69621 Villeurbanne cedex, France.

b. DEN-Service d'études mécaniques et thermiques (SEMT), CEA, Université Paris-Saclay, F-91191, Gif-Sur-Yvette, France

Résumé :

L'instabilité fluide-élastique a lieu lorsqu'un écoulement injecte une quantité d'énergie suffisante au système. Celui-ci devient alors linéairement instable, et les grands déplacements qui en découlent sont limités par des effets non-linéaires tels que des chocs avec des butées. La présence de forces de couplage du type fluide-élastique, ajoutée aux non-linéarités, complique la prédiction de régimes dynamiques. Dans le cas présent, on s'intéresse aux vibrations induites par un écoulement transverse sur une poutre encastrée-libre dans un support à jeu. Ce système est représentatif de la problématique des faisceaux de tubes d'échangeurs de chaleur dans un réacteur nucléaire à eau pressurisée. Un modèle pertinent des efforts de couplage est celui proposé par Granger et Païdoussis, où un effet mémoire a été introduit. On propose une démarche numérique alternative pour l'étude de ce système, basée sur la méthode d'équilibrage harmonique (HBM), et on met ainsi en évidence un comportement bi-stable, en accord avec les résultats de la littérature.

Abstract :

Fluid-elastic instability takes place when sufficient energy is furnished to a system by a flow. Linearly unstable motions ensue, whose growing displacement amplitudes must be limited by non-linear effects such as clearances. The presence of so-called fluid-elastic coupling forces as well as non-linearity greatly complicates the prediction of dynamical regimes for such a system. In this contribution, we focus on the vibrations induced by a transverse fluid flow on a cantilever beam in a loose support. This system is representative of the problem found on heat-exchanger tube bundles in nuclear reactors. Thus, a pertinent model for fluid-elastic forces in this case is the one by Granger and Païdoussis, which introduces a memory effect. We propose an alternative numerical procedure for the study of this system which is based on the Harmonic Balance Method (HBM), by which we reveal a bi-stable behaviour in agreement with previously published results.

Mots clefs : couplage fluide-élastique ; chocs ; équilibrage harmonique ; continuation

1 Introduction

Dans l'industrie, il est courant de mettre en place des faisceaux tubulaires pour échanger de la chaleur entre deux fluides, l'un interne et l'autre externe aux tubes, dont au moins un est en mouvement. Les

tubes sont alors excités par différents mécanismes d'interaction fluide-structure [1], dont le plus dangereux est l'*instabilité fluide-élastique* : lorsque la vitesse d'écoulement dépasse une valeur critique, l'énergie apportée à la structure par le fluide devient trop importante pour être compensée par l'amortissement de celle-ci, d'où une augmentation brutale des amplitudes d'oscillation qui ne saurait être freinée que par des effets non-linéaires, e.g. la présence de butées. Les régimes vibratoires résultants sont stables mais comportent des forces de couplage entre fluide et structure, en plus des forces de choc. En raison de la grande importance pratique de ce problème, notamment dans le contexte du génie nucléaire, de nombreux efforts ont été menés pour bien modéliser l'instabilité fluide-élastique et prédire le comportement dynamique des tubes.

Une première tentative de modélisation des forces de couplage pour ce type de problèmes a été réalisée par Connors [2] dans les années 1970, et des efforts dans cette direction continuent jusqu'à nos jours (voir [3] pour un exemple récent). Le modèle proposé par Granger et Païdoussis [4] (GP) a été le premier à introduire un *effet mémoire*, équivalent à la fonction de Wagner dans la théorie de l'aérodynamique, pour remplacer les simples termes de retard des modèles précédents [5]. Ce modèle a été utilisé pour étudier analytiquement un système simplifié dans [6], où les forces de couplage agissaient sur un oscillateur à impacts. Ensuite, ces mêmes chercheurs ont mené des expériences pour un tube flexible dans une butée sous un écoulement transverse [7]; les coefficients du modèle GP ont pu ainsi être obtenus et appliqués à des simulations numériques [8] qui ont démontré la pertinence du dit modèle pour ce cas précis. Quelques résultats contre-intuitifs concernant le rôle des forces fluide-élastiques et turbulentes [9], ainsi que l'importance du jeu [10], ont été mis en évidence à travers ce système qui, malgré sa simplicité, est tout à fait représentatif de la phénoménologie présente dans des systèmes industriels plus complexes. Or, si l'aspect *instabilité fluide-élastique* du système a été beaucoup abordé lors des études citées, il n'en est pas de même pour celui de la *dynamique non-linéaire*. Dans [10] et [11], la coexistence de plusieurs cycles limites sous certaines conditions a été mise en évidence par intégration numérique, mais pas étudiée en détail. Ce type de comportement est classique dans les systèmes avec des chocs ou tout autre type de non-linéarité *raidissante*, et dépend fortement des paramètres du système (voir [12] et ses références). Remarquons que ce phénomène de *bi-stabilité* est d'intérêt particulier dans l'optique d'une prédiction au niveau industriel, car certains régimes s'avèrent souvent plus défavorables que d'autres.

Ce travail a deux objectifs principaux. Premièrement, on propose une démarche nouvelle pour le calcul numérique des solutions périodiques (*cycles limites*, dans l'absence de turbulence), en exploitant les propriétés de la Méthode d'équilibrage Harmonique (HBM) pour le traitement des forces fluide-élastiques définies par un modèle de "type GP". Puis, on présente une application sur le système étudié dans les références [6] à [11].

2 Modélisation

2.1 Structure

La Fig. 1 montre le système étudié, qui est composé d'un unique tube flexible dans un faisceau rigide. Celui-ci est excité par un écoulement transverse d'eau qui induit des vibrations selon sa direction de portance. On se place dans le cadre de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli. Le tube est alors considéré une poutre encastree-libre. De plus, sa géométrie est telle que seuls les mouvements de flexion (hors plan) sont possibles. Ainsi, en considérant un amortissement visqueux, les déplacements temporels du

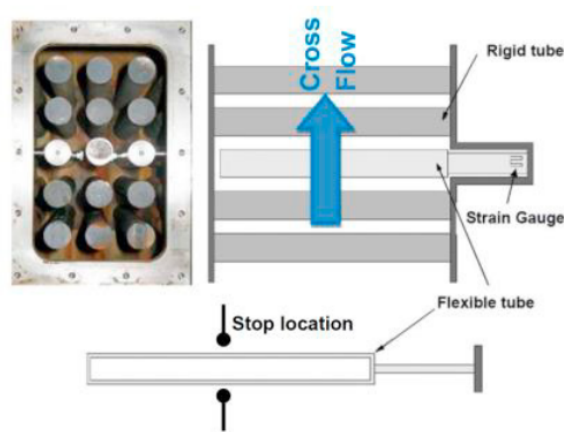


FIGURE 1 – Tube sous écoulement transverse

tube en tout point $x \in [0, L]$ de sa longueur, $Y(x, t)$, sont décrits par :

$$\rho S \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial Y}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} = F_f(x, t) + F_c(Y(x_c, t)) \quad (1)$$

Ci-dessus, la fonction $F_f(x, t)$ contient les efforts fluide-élastiques que l'on détaillera par la suite. D'autre part, $F_c(Y(x_c, t))$ correspond aux forces générées par les impacts contre la butée, localisée en $x = x_c$. On modélisera ces impacts par des chocs parfaitement élastiques (sans dissipation) avec l'introduction d'un coefficient de pénalisation K_c qui correspond physiquement à la raideur d'ovalisation du tube ($K_c \sim O(10^6 N/m)$) :

$$F_c(Y(x_c, t)) = -K_c (|Y(x_c, t)| - h) H(|Y(x_c, t)| - h) \text{sign}(Y(x_c, t)) \delta(x - x_c) \quad (2)$$

où $H(\cdot)$ et $\delta(\cdot)$ sont respectivement la fonction échelon unitaire et la distribution de Dirac. On choisit de discrétiser (1) en utilisant une expansion de $Y(x, t)$ selon ses m premiers modes de poutre :

$$Y(x, t) \approx \sum_{i=1}^m \phi_i^*(x) q_i(t) \equiv \Phi(x) \mathbf{q}(t) \quad (3)$$

La projection des équations de mouvement sur cette base conduit à un système de taille m pour les déplacements modaux :

$$\forall j = 1, \dots, m : \quad m_j \ddot{q}_j(t) + c_j \dot{q}_j(t) + k_j q_j(t) = f_j^f(t) + f_j^c(\mathbf{q}(t)) \quad (4)$$

avec :

$$f_j^f(t) = \int_0^L \phi_j(x) F_f(x, t) dx \quad ; \quad f_j^c(t) = \int_0^L \phi_j(x) F_c(\Phi(x) \mathbf{q}(t)) dx \equiv \phi_c F_c(\mathbf{q}(t))$$

Puisque les forces de contact sont localisées, leur contribution modale est très aisée à calculer, ce qui rend cette approche assez convenable. Ici, on se limitera à étudier le comportement du système selon son premier mode de flexion :

$$m_1 \ddot{q}_1(t) + c_1 \dot{q}_1(t) + k_1 q_1(t) = f_1^f(t) + f_1^c(q_1(t))$$

2.2 Couplage fluide-élastique

Dans le modèle "quasi-stationnaire" GP, un produit de convolution prend en compte l'histoire du mouvement et affecte au déplacement en chaque instant passé un poids dont l'importance diminue avec le temps. Autrement dit, le noyau de la convolution est une combinaison de fonctions exponentielles décroissantes :

$$g(t) = -\frac{1}{2} \frac{\rho V^3}{D} \frac{\partial C_L}{\partial y} \left[\sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_i e^{-\delta_i \frac{V}{D} t} H(t) + \alpha_0 \frac{D}{V} \delta(t) \right] = -\hat{g}(t) - \frac{1}{2} \alpha_0 \rho V^2 \frac{\partial C_L}{\partial y} \delta(t) \quad (5)$$

Dans cette expression, le tube est caractérisé par son diamètre D et la dérivée de son coefficient de portance $\frac{\partial C_L}{\partial y}$ tandis que la masse volumique ρ , la vitesse V et les constantes (empiriques) α_i , δ_i décrivent l'écoulement, avec : $\alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i$. D'autre part, le modèle rajoute un amortissement visqueux dû à la force de traînée. Remarquons, finalement, que l'on néglige l'action de la turbulence dans cette modélisation. Ainsi, l'expression complète des efforts est donnée par :

$$F_f(x, t) = \frac{1}{2} \rho V D C_D \dot{Y}(x, t) + \int_{-\infty}^t g(t - \tau) Y(x, \tau) d\tau \quad (6)$$

En remplaçant (5) dans (6), on remarque que le deuxième terme fait apparaître un terme de raideur supplémentaire :

$$F_{k,f}(x, t) = -\frac{1}{2} \alpha_0 \rho V^2 \frac{\partial C_L}{\partial y} Y(x, t)$$

Projetées sur la base modale, ces forces deviennent :

$$\mathbf{f}^f(t) = -\frac{1}{2} \alpha_0 \rho V^2 \frac{\partial C_L}{\partial y} \mathbf{L} \mathbf{q}(t) + \frac{1}{2} \rho V D C_D \mathbf{L} \dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{L} \int_{-\infty}^t \hat{g}(t - \tau) \mathbf{q}(\tau) d\tau$$

où la matrice diagonale $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ contient les coefficients modaux :

$$L_{jj} = \int_0^L \phi_j^2(x) dx$$

On peut maintenant écrire la forme explicite de l'équation pour le premier mode, en abandonnant les sous-indices "1" pour alléger l'écriture ($q \equiv q_1$) :

$$m\ddot{q}(t) + c_T \dot{q}(t) + k_T q(t) = -g_1(t) + f_1^c(q(t)) \quad (7)$$

où :

$$\begin{cases} k_T = k_1 + \frac{1}{2} \alpha_0 \rho V^2 \frac{\partial C_L}{\partial y} L_{11} \\ c_T = c_1 - \frac{1}{2} \rho V D C_D L_{11} \end{cases}$$

et :

$$g_1(t) = \frac{1}{2} \frac{\rho V^3}{D} \frac{\partial C_L}{\partial y} L_{11} \sum_{i=1}^N \int_{-\infty}^t \alpha_i \delta_i e^{-\delta_i \frac{V}{D} (t-\tau)} H(t - \tau) q(\tau) d\tau \quad (8)$$

Maintenant, on propose une ré-écriture de (7) afin de nous affranchir du produit de convolution et de la mettre sous une forme mieux adaptée à l'équilibrage harmonique. Suivant [14], on remplace chacun des N termes de convolution de (8) par une *variable interne* définie par :

$$v_i(t) = L_{11} \int_0^t e^{\delta_i \frac{V}{D}(t-\tau)} q_1(\tau) d\tau \quad (9)$$

Ainsi, (7) devient :

$$m\ddot{q}(t) + c_T \dot{q}(t) + k_T q(t) = - \sum_{i=1}^N \lambda_i v_i(t) + f_1^c(q(t)) \quad (10)$$

où :

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \frac{\rho V^3}{D} \frac{\partial C_L}{\partial y} L_{11} \alpha_i \delta_i$$

N équations supplémentaires sont nécessaires pour avoir un système fermé; elles sont obtenues par dérivation de (9) à l'aide de la règle de Leibniz :

$$\dot{v}_i(t) = -\beta_i v_i(t) + q_1(t) \quad (11)$$

$$\beta_i = \delta_i \frac{V}{D}$$

Les conditions initiales associées aux variables internes sont connues car, $\forall i = 1, \dots, N$, $v_i(0) = 0$ par définition. Les Eq. (10) et (11) constituent le système à résoudre, que l'on peut ré-écrire sous la forme non-dimensionnelle suivante :

$$\boxed{\begin{cases} x''(\tau) + \xi x'(\tau) + x(\tau) = - \sum_{i=1}^N z_i(\tau) + F_{nl}(x(\tau)) \\ z_i'(\tau) = -b_i z_i(\tau) + a_i x(\tau) \\ x(0) = x_0 ; \dot{x}(0) = \dot{x}_0 ; v_i(0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N \end{cases}} \quad (12)$$

où ξ , b_i et a_i dépendent de V .

3 Résolution numérique

3.1 Équilibrage harmonique

On développe les termes de (12) en série de Fourier de pulsation ω jusqu'à la H -ième harmonique.

$$\begin{aligned} x(\tau) &= [\mathbf{T}(\omega\tau)] \mathbf{X} ; x'(\tau) = \omega [\mathbf{T}(\omega\tau)\nabla] \mathbf{X} ; x''(\tau) = \omega^2 [\mathbf{T}(\omega\tau)\nabla^2] \mathbf{X} \\ z_i(\tau) &= [\mathbf{T}(\omega\tau)] \mathbf{V}_i ; z_i'(\tau) = \omega [\mathbf{T}(\omega\tau)\nabla] \mathbf{V}_i \\ F_{NL}(x(\tau)) &= [\mathbf{T}(\omega\tau)] \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}) \\ \mathbf{T}(\omega\tau) &= [1, \cos(\omega\tau), \sin(\omega\tau), \dots, \cos(H\omega\tau), \sin(H\omega\tau)] \end{aligned}$$

avec $\nabla \in \mathbb{R}^{m(2H+1) \times m(2H+1)}$ l'opérateur différentiel. En remplaçant ces expressions dans (12) et en projetant les équations sur la base de Fourier par produit scalaire avec $\mathbf{T}(\omega\tau)$, il vient :

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}, \omega) = [\mathbf{Z}(\omega)] \mathbf{X} + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (13)$$

3.2 Cycles : équation de conservation

Les $(2H + 1)$ équations (13) sont toujours non-linéaires mais elles sont désormais algébriques, elles se prêtent donc aisément à une résolution numérique par une méthode de type Newton. Or, la pulsation ω des cycles est, à ce stade, une inconnue du problème. Ainsi, une équation supplémentaire fixant sa valeur est nécessaire.

Elle est obtenue en imposant la conservation de l'énergie sur une période. La méthode de Newton classique est ensuite appliquée pour obtenir une solution. Les coefficients de Fourier des efforts non-linéaires, ainsi que ceux de leurs dérivées, sont obtenus par la méthode de *bascule temps-fréquence* (AFT) [13].

3.3 Stabilité

Une analyse de stabilité locale (linéarisée) est réalisée pour les cycles calculés. On applique une petite perturbation sur une solution des équations de mouvement. Cela conduit à un système d'équations linéaires à coefficients périodiques permettant le calcul de la *matrice de monodromie*, dont les valeurs propres correspondent aux *multiplicateurs de Floquet*. Ceux-ci régissent l'évolution de la perturbation et donc la stabilité locale du cycle : si tous les multiplicateurs sont inférieurs à 1 en magnitude, son amplitude décroît avec le temps et la réponse est dite *stable* ; elle est *instable* dans le cas contraire. Même si les deux types de cycles peuvent satisfaire aux équations de mouvement, seules ceux qui sont stables sont observables expérimentalement ou par intégration temporelle, d'où l'intérêt de faire la distinction entre les deux.

4 Résultats

4.1 Établissement des cycles : bifurcation de Hopf primaire

Dans un premier temps, on cherche les points fixes de (12) avec $N = 2$. Pour cela, on ré-écrit les équations sous la forme d'un système du premier ordre en posant $y(\tau) = x'(\tau)$. Ainsi :

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -\xi & -1 & -1 \\ a_1 & 0 & -b_1 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & -b_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f_{nl}(x(\tau)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\iff \mathbf{W}' = \mathbf{A}\mathbf{W} - \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{W})$$

où $\mathbf{W} \equiv [x, y, z_1, z_2]^T$. Un état \mathbf{W}_0 tel que $\mathbf{W}'(\mathbf{W}_0) = \mathbf{0}$ correspond à un point fixe. Un calcul simple montre que l'origine, $\mathbf{W} = \mathbf{0}$, est le seul point fixe dans notre cas. La stabilité de ce point est donnée par la partie réelle des valeurs propres du système linéarisé. Or, en raison de la définition de (2), la dérivée des efforts non-linéaires s'annule à l'origine et il suffit donc d'étudier le polynôme caractéristique issu de la partie linéaire du système. Il faut remarquer, pourtant, que les paramètres $[a_1, a_2, b_1, b_2]$ sont des fonctions de la vitesse d'écoulement V : il en est de même pour les valeurs propres et donc pour la stabilité du point fixe.

La Fig. 2 montre l'évolution des valeurs propres principales avec V . Visiblement, une perte de stabilité a lieu pour la vitesse critique $V_c \approx 2.05m/s$, correspondant à une bifurcation de Hopf et à la naissance d'(au moins) un cycle limite.

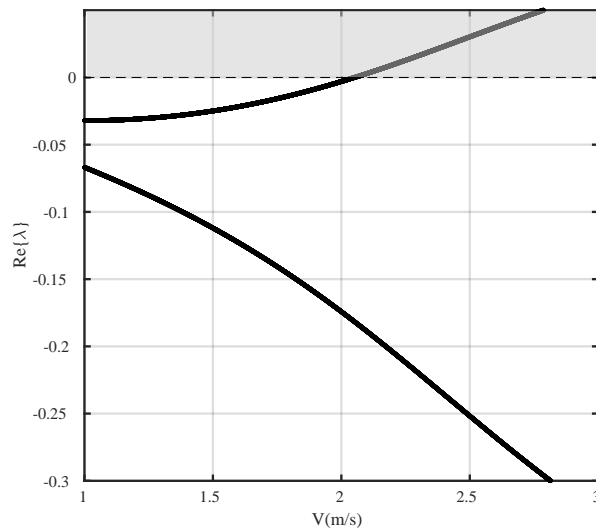


FIGURE 2 – Partie réelle des valeur propres pour le point fixe $\mathbf{W}_0 = \mathbf{0}$. Gris : zone d'instabilité.

4.2 Solution pour une vitesse d'écoulement donnée

On pose $V = 3.4\text{ m/s}$, ce qui est bien au-delà de la vitesse critique. Les valeurs correspondants des paramètres du système sont données dans le Tableau 1. Pour tous les calculs réalisés, on a choisi $h = 1.5 \times 10^{-3}\text{ m}$ pour le jeu. En définissant une "pulsation propre de contact" $\omega_c = \sqrt{Kc/m_T}$, on remarque que $\omega_c \gg \omega_T$. Le problème en question est alors assez raide et, en conséquence, un nombre important d'harmoniques est nécessaire pour avoir une représentation adéquate des forces de choc ; après expérimentation, on a choisi $H = 50$ pour cette étude avec $n_{FFT} = 2^8$ points de discrétisation pour la AFT. Tous les algorithmes nécessaires pour les calculs présentés par la suite ont été implémentés dans MATLAB.

ξ	a_1	a_2	b_1	b_2
0.0405	0.0457	-11.9265	0.0877	12.7510

TABLE 1 – Paramètres sans dimension pour $V = 3.4\text{ m/s}$

Borsoi et al. [9], en étudiant ce système, ont fixé cette valeur et observé l'existence de trois cycles distincts en intégrant numériquement à partir de trois conditions initiales différentes. De la même manière, la résolution numérique de (13) plus l'équation de conservation pour trois approximations initiales du vecteur \mathbf{X} fournit les trois cycles de la Fig. 3.

On observe un régime *bi-impact* symétrique, noté S , et deux régimes asymétriques A^+ , A^- à un seul impact par période. La Fig. 4 montre le contenu fréquentiel de S et A^+ . Celui de A^- est exactement le même que celui de A^+ au signe près ; en effet, ces deux cycles correspondent à la même solution, ce qui était prévisible en raison de la symétrie du système. Physiquement, le régime qui s'établit dépend du sens de la perturbation initiale, à la manière d'une poutre en flambage. La stabilité de ces cycles était donnée par le fait qu'ils avaient été observés par intégration temporelle ; elle a été confirmée en analysant leurs multiplicateurs de Floquet comme le montre la Fig 5.

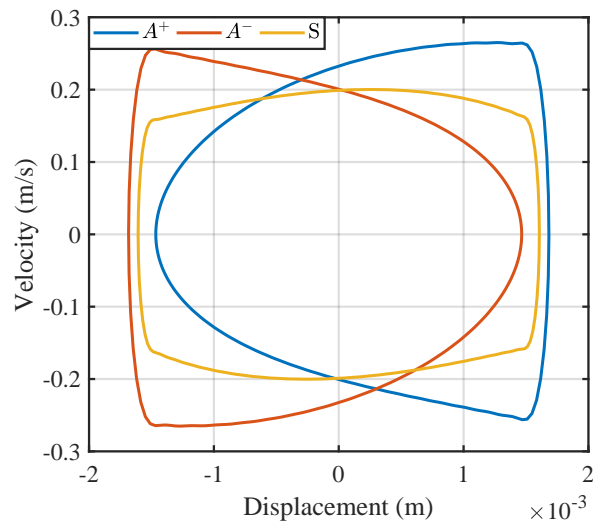


FIGURE 3 – Cycles coexistants pour $V = 3.4 \text{ m/s}$.

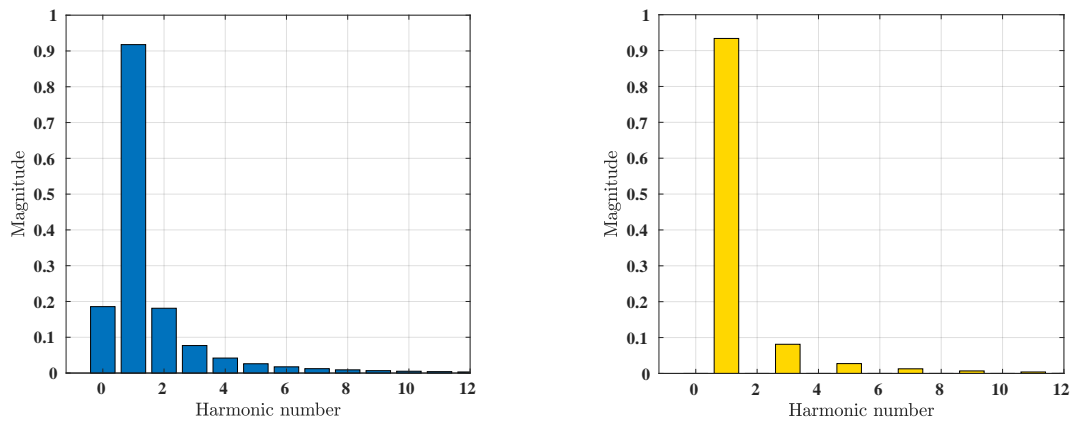


FIGURE 4 – Contenu fréquentiel des cycles. Gauche : A^+ , droite : S .

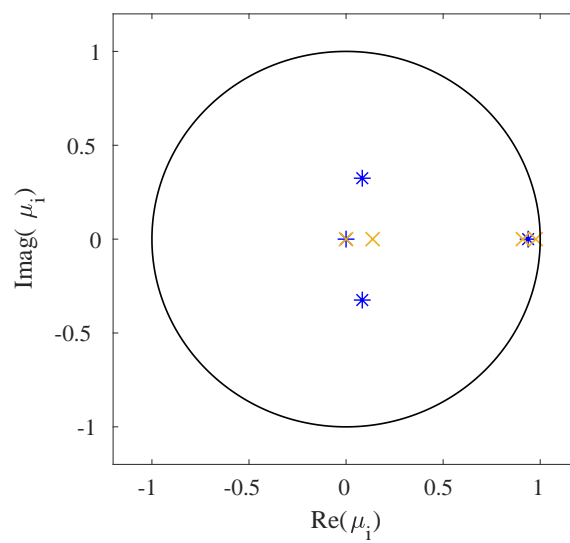


FIGURE 5 – Multiplicateurs de Floquet pour $V = 3.4 \text{ m/s}$. \times (jaune) : cycle S , $*$ (bleu) : cycle A .

5 Conclusions

Dans ce travail, la méthode d'équilibrage harmonique a été utilisée pour traiter un problème bien connu de vibrations sous écoulement. Celle-ci permet, d'une part, un traitement simple des forces de couplage fluide-élastiques, et d'autre part une implémentation numérique très efficace. Des cycles limites coexistants ont été trouvés et continués par rapport à la vitesse du fluide. Tandis que ici un système simple a été étudié, la démarche présentée est clairement générique et applicable à tout problème où des fonctions de Wagner modélisent les forces de couplage, ainsi compliquée soient la géométrie ou les conditions de contact. Parmi les perspectives ouvertes, on peut nommer l'étude de ce même système avec plusieurs modes, ainsi que la continuation des solutions par rapport à des paramètres influents du système tel que la vitesse d'écoulement.

Références

- [1] F. Axisa, J. Antunes, *Modelling of Mechanical Systems, Vol. 4 : Flow-Induced Vibrations*, Kogan Page Science, 2005.
- [2] H.J. Connors, Fluidelastic vibration of tube arrays excited by cross flow, In : *Proceedings of the ASME Winter Annual Meet*, 1970.
- [3] H. Li, N. Mureithi, Development of a time delay formulation for fluidelastic instability model, *Journal of Fluids and Structures*, 70 (2017) 346–359.
- [4] S. Granger, M.P. Païdoussis, An improvement to the quasi-steady model with application to cross-flow-induced vibration of tube arrays, *Journal of Fluid Mechanics*, 320 (1996) 163–184.
- [5] S.J. Price, A Review of Theoretical Models for Fluidelastic Instability of Cylinder Arrays in Cross-Flow, *Journal of Fluids and Structures*, 9(5) (1995) 463–518.
- [6] L. Borsoi, P. Piteau, X. Delaune, J. Antunes, Simple shock oscillator for modelling a loosely supported tube subjected to turbulence and fluid-elastic forces, *10th International Conference on Flow Induced Vibration*, Dublin, Ireland, 3-6 July 2012, (FIV 2012).
- [7] P. Piteau, X. Delaune, J. Antunes, L. Borsoi, Experiments and computations of a loosely supported tube in a rigid bundle subjected to single-phase flow, *Journal of Fluids and Structures*, 28 (2012) 56–71.
- [8] P. Piteau, L. Borsoi, X. Delaune, I. Politopoulos, J. Antunes, Computation of a Loosely Supported Tube Under Cross-Flow by a Hybrid Time-Frequency Method, *Proceedings of the ASME Pressure Vessels & Piping Conference, Volume 4 : Fluid-Structure Interaction*, Boston, USA, 2015.
- [9] L. Borsoi, P. Piteau, X. Delaune, J. Antunes, Competition between Turbulence and Fluid-Elastic Forces in the Response of a Loosely Supported Tube under Cross-Flow, *Procedia Engineering, X International Conference on Structural Dynamics, EURO-DYN 2017*, 199 (2017) 1282–1289.
- [10] L. Borsoi, P. Piteau, X. Delaune, J. Antunes, Gap Effect on the Random and Fluid-Elastic Forces Acting in the Vibration of a Loosely Supported Tube Under Cross-Flow, *Proceedings of the ASME Pressure Vessels & Piping Conference, Volume 4 : Fluid-Structure Interaction*, Waikoloa, Hawaii, USA, 2017.
- [11] P. Piteau, L. Borsoi, X. Delaune, J. Antunes, Time-domain numerical simulations of a loosely supported tube subjected to frequency-dependent fluid-elastic forces, *Journal of Fluids and Structures*, 81 (2018) 383–398.

- [12] M. Elmegård, B. Krauskopf, H.M. Osinga, J. Starke, J.J. Thomsen, Bifurcation analysis of a smoothed model of a forced impacting beam and comparison with an experiment, *Nonlinear Dynamics*, 77(3) (2014) 951–966.
- [13] T. M. Cameron, J. H. Griffin, An Alternating Frequency/Time Domain Method for Calculating the Steady-State Response of Nonlinear Dynamic Systems, *Journal of Applied Mechanics*, 56 (1989) 149–154.
- [14] A. Domoshnitsky, Y. M. Golster, Approach to Study Bifurcations and Stability of Integro-Differential Equations, *J. of Mathematical and Computer Modelling*, 36(6) (2002) 663–678.