Réponse dynamique d'une cavité circulaire double dans un milieu rocheux infini

H. BOUARE^a, A. MESGOUEZ^b et G. LEFEUVE-MESGOUEZ^c

- a. Avignon Université, UMR EMMAH, hamed.bouare@univ-avignon.fr
- b. Avignon Université, UMR EMMAH, arnaud.mesgouez@univ-avignon.fr
- c. Avignon Université, UMR EMMAH, gaelle.mesgouez@univ-avignon.fr

Résumé:

Les auteurs proposent dans cette communication une approche théorique qui prédit la réponse dynamique d'un tunnel circulaire intégré dans un massif karstique hétérogène et soumis à l'influence d'une onde mécanique longitudinale. L'approche théorique présentée ici repose sur un développement semi analytique où la décomposition d'Helmholtz est utilisée pour la séparation du mouvement des ondes et les solutions des équations d'onde sont écrites à l'aide de la méthode d'expansion en séries de Bessel-Fourier. Un contact imparfait est utilisé pour prendre en compte les discontinuités aux interfaces entre les différents milieux. Les résultats obtenus illustrent la répartition polaire des champs de contraintes-déplacements le long de la surface libre du tunnel.

Abstract:

The authors propose in this paper a theoretical approach that predicts the dynamic response of a circular tunnel embedded in an heterogeneous karstic rock mass and impacted by a P-wave. The theoretical approach presented here is based on a semi-analytical approach in which the Helmholtz decomposition is used for the separation of wave motion and the solutions of wave equations are written using the Bessel-Fourier serie expansion method. An imperfect contact is used to take into account the discontinuities at the interfaces between the different media. The results obtained illustrate the polar distribution of the stress-displacement fields along the tunnel free surface.

Mots clefs : Ondes mécaniques, regime harmonique, milieu élastique et hétérogène, contact imparfait.

1 Introduction

L'étude de la réponse dynamique des structures souterraines a une importance significative dans la conception des tunnels, notamment dans le domaine du génie civil. Ces travaux présentés ici s'inscrivent dans l'étude de la propagation d'ondes mécaniques dans l'environnement du Laboratoire Souterrain à Bas Bruit (LSBB). Le LSBB est une plateforme interdisciplinaire pour la recherche, localisée à Rustrel (Vaucluse, France) et possède un réseau enterré de plusieurs galeries avec ou sans revêtement béton. Ces galeries sont situées dans un massif karstique fortement hétérogène présentant des profils différents

de vitesses de propagation des ondes mécaniques, impactant la distribution des champs de contraintesdéplacements autour du tunnel.

Une étude bibliographique a été menée pour recenser les articles pertinents proches de la géométrie du site d'étude. Cao et al. [1] étudient la propagation d'une onde plane longitudinale dans un canyon de forme cylindrique en effectuant une analyse particulière sur l'influence de la profondeur du canyon par rapport à sa largeur dans un milieu infini élastique, homogène et isotrope. Ils remarquent que l'amplitude de déplacement et la phase trouvées dépendent essentiellement de l'angle d'incidence, du coefficient de poisson, de la fréquence de l'onde incidente et de la valeur du rapport profondeur-largeur du canyon. Fang et al. [2] analysent la réponse dynamique d'un tunnel non circulaire soumis à des ondes sismiques. Ils proposent une interface viscoélastique pour modéliser le contact entre le massif rocheux et le tunnel. Ils observent que la viscosité de l'interface a une faible influence sur la contrainte dynamique dans les zones de hautes fréquences comparéees aux zones de basses fréquences. Zhang et al. [3] étudient la diffusion d'ondes élastiques dans une fibre circulaire intégrée dans une matrice. Ils utilisent une interface hétérogène (imparfaite et parfaite) pour modéliser le contact entre les deux milieux supposés élastiques. Le modèle proposé dans cette communication s'inscrit dans la continuité des travaux de Yi et al. [4] qui étudient la réponse dynamique d'un tunnel circulaire intégré dans un massif rocheux et soumis à l'influence d'une onde plane longitudinale. Les auteurs considèrent que le tunnel et le massif rocheux sont élastiques et utilisent un contact imparfait possédant deux paramètres de raideurs, Achenbach et Zhu [5], pour prendre en compte les discontinuités à l'interface entre les deux milieux. Un premier modèle [6] dans lequel nous analysons les champs de déplacements et de contrainte orthoradiale a été présenté durant la conférence Inter-Disciplinary Underground Science and Technology (IDUST 2018) où une conifguration homogène du massif karstique a été considérée.

Dans cette communication nous proposons une approche multicouche cylindrique pour décrire l'environnement hétérogène (autour des galeries) dans une géométrie 2D, supposée élastique. En utilisant de la décomposition de Helmholtz pour la résolution de l'équation d'onde basée sur la méthode de séparation et l'extension des solutions sous la forme des fonctions de Bessel dans le domaine harmonique, nous étudions la réponse dynamique des galeries en utilisant un modèle de contact imparfait pour chaque interface. Les résultats obtenus en champs de contraintes et déplacements en régime harmonique sont présentés pour une configuration donnée.

2 Approche théorique

Considérons une onde incidente plane harmonique et longitudinale se propageant à l'infini dans un massif karstique (k=1) élastique, homogène et uniforme perpendiculairement à la section transversale du tunnel (Figure 1). Une approche à double couche cylindrique (k=2,3) est utilisée pour modéliser la zone hétérogène entourant le tunnel (k=4). Nous supposons également que le tunnel et la zone hétérogène sont élastiques et isotropes. Compte tenu de ces hypothèses, l'équation du mouvement des ondes s'écrit :

$$\mu_k \nabla^2 \mathbf{u}_k + (\lambda_k + \mu_k) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}_k = \rho_k \ddot{\mathbf{u}}_k , \quad k = \{1, 2, 3, 4\}$$
 (1)

L'indice k indique le numéro de la couche, ρ_k la densité, λ_k et μ_k sont les coefficient de Lamé, \mathbf{u}_k est le vecteur déplacement et $\ddot{\mathbf{u}}_k$ est sa seconde dérivée par rapport au temps.

Pour étudier séparément le mouvement des ondes, le théorème fondamental du calcul vectoriel connu sous le nom de la décomposition d'Helmholtz-Hodge est utilisé. Ce théorème indique qu'un champ de

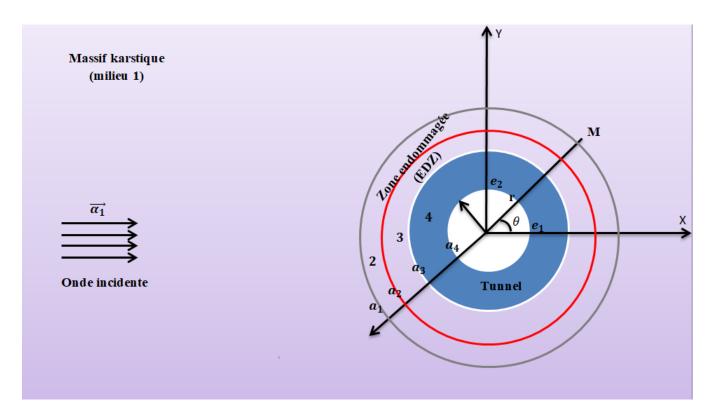


Figure 1 – Géométrie du problème à 4 couches

vecteur peut se décomposer en une composante longitudinale $\nabla \phi$ (irrotationnelle) et une composante transversale $\nabla \times \Psi$ (solénoïdale ou champ à divergence nulle), soit la somme du gradient d'un champ scalaire et du rotationnel d'un champ vectoriel. Le vecteur déplacement $\mathbf{u_k}$ dans une couche donnée s'écrit :

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \nabla \phi_{\mathbf{k}} + \nabla \times \mathbf{\Psi}_{\mathbf{k}} \tag{2}$$

Dans le cadre de nos études, nous travaillerons en systèmes de coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Faran [7] montre que le potentiel vecteur Ψ n'a pas de composantes suivant les directions radiale et angulaire (r, θ) . Il est uniquement fonction de la composante dans la direction z ($\Psi_k = \psi_{zk} = \psi_k \mathbf{e_z}$). En injectant l'équation (2) dans (1), on obtient deux équations découplées. L'équation (3) décrit le mouvement des ondes primaires P (longitudinale ou compression) et (4) le mouvement des ondes secondaires S (transversale ou cisaillement):

$$\nabla^2 \phi_k - \frac{1}{C_{pk}^2} \partial_t^2 \phi_k = 0 \tag{3}$$

$$\nabla^2 \psi_k - \frac{1}{C_{sk}^2} \partial_t^2 \psi_k = 0 \tag{4}$$

Avec $C_{pk}=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ la vitesse des ondes primaires et $C_{sk}=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ la vitesse des ondes secondaires dans la couche k donnée. ∇^2 est l'opérateur laplacien en coordonnée cylindrique.

Nous supposons que le tunnel a une longueur infinie dans la direction z. Sous cette hypothèse, le mouvement de l'onde plane incidente devient invariant par translation suivant z et a pour expression :

$$\phi_{1i} = \varphi_0 e^{i[\alpha_1 \cdot \mathbf{OM} - \omega \mathbf{t}]} = \varphi_0 e^{i[\alpha_1 \cdot x - \omega t]} = \varphi_0 e^{i[\alpha_1 r \cos(\theta) - \omega t]}$$
(5)

OM est le vecteur position de coordonnées cartésiennes ($\mathbf{OM} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2}$) et $\alpha_1 = \alpha_1\mathbf{e_1}$ est le vecteur d'onde longitudinale dans le milieu 1.

i est le nombre complexe imaginaire $(i^2=-1)$, ω est la pulsation $(\omega=2\pi f)$ avec f la fréquence de l'onde incidente, φ_0 est l'amplitude de l'onde incidente, α_1 est le nombre d'onde longitudinal dans le massif karstique et en coordonnée polaire, $x=r\cos\theta$.

Mei [8] montre que le terme $e^{i\alpha_1 r \cos(\theta)}$ dans l'équation (5) peut être réécrit à l'aide de la série de Bessel-Fourier :

$$e^{i\alpha_1 r \cos(\theta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_0 \epsilon_n i^n J_n(\alpha_1 r) \cos(n\theta)$$
 (6)

 J_n est la fonction de Bessel de premier type d'ordre n, et ϵ_n le symbole de Jacobi :

$$\epsilon_n = 1$$
 si $n = 0$ et $\epsilon_n = 2$ si $n > 0$

L'expression (5) s'écrit finalement :

$$\phi_{1i} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_0 \epsilon_n i^n J_n(\alpha_1 r) \cos(n\theta) e^{-i\omega t}$$
(7)

L'onde incidente est réfléchie à l'interface (localisée à $r=a_1$) sur la première couche de la zone hétérogène, laquelle est décrite par un modèle double couche cylindrique possédant des propriétés mécaniques différentes. La réflexion engendre une onde primaire et secondaire dans le massif karstique. Le déplacement total s'écrit à l'aide des potentiels scalaires et vecteurs suivants :

$$\phi_{1t} = \sum_{n=0}^{\infty} [\varphi_0 \epsilon_n i^n J_n(\alpha_1 r) + E_n H_n^{(1)}(\alpha_1 r)] \cos(n\theta) e^{-i\omega t}$$
(8)

$$\psi_{1t} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n H_n^{(1)}(\beta_1 r) \sin(n\theta) e^{-i\omega t}$$
(9)

 E_n et F_n sont les coefficients d'expansion par mode des séries de Bessel-Fourier. $H_n^{(1)}$ est la fonction de Hankel de premier type d'ordre n et β est le nombre d'onde transversale.

Dans la première couche de la zone hétérogène, nous aurons deux ondes transmises (une longitudinale et une transversale à l'interface localisée au rayon $r=a_1$) et deux ondes réfléchies (une longitudinale et une transversale à l'interface localisée au rayon $r=a_2$). Nous aurons la même chose dans le tunnel et dans la deuxième couche de la zone hétérogène (deux réflexions et deux transmissions). Le déplacement total dans chaque couche (k=2,3,4) en potentiel scalaire et vecteur d'Helmholtz s'écrit :

$$\phi_{kt} = \sum_{n=0}^{\infty} [L_{nk} H_n^{(2)}(\alpha_k r) + P_{nk} H_n^{(1)}(\alpha_k r)] cos(n\theta)$$
(10)

$$\psi_{kt} = \sum_{n=0}^{\infty} [Q_{nk} H_n^{(2)}(\beta_k r) + Z_{nk} H_n^{(1)}(\beta_k r)] sin(n\theta)$$
(11)

 L_{kn} , P_{kn} , Q_{kn} et Z_{kn} sont les coefficients d'expansion par mode pour une couche k donnée. $H_n^{(2)}$ fonction de Hankel de deuxième type d'ordre n.

Les déplacements radial u_{rk} et angulaire $u_{\theta k}$ dans une couche (k=1,2,3,4) donnée s'écrivent :

$$u_{r_k} = \frac{\partial \phi_{kt}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_{kt}}{\partial \theta} \qquad u_{\theta_k} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_{kt}}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_{kt}}{\partial r}$$
 (12)

A l'aide u_{rk} et $u_{\theta k}$, les déformations radiale (ε_{rr}) , angulaire $(\varepsilon_{\theta \theta})$ et tangentielle $(\varepsilon_{r\theta})$ sont calculées dans chaque milieu :

$$\varepsilon_{rr_k} = \frac{\partial u_{r_k}}{\partial r} \qquad \varepsilon_{\theta\theta_k} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta_k}}{\partial \theta} + \frac{u_{r_k}}{r} \qquad \varepsilon_{r\theta_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\theta_k}}{\partial r} - \frac{u_{\theta_k}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{r_k}}{\partial \theta} \right) \tag{13}$$

On peut déduire à partir de la loi de Hooke (élastique et isotrope), les composantes radiale (σ_{rr}) , orthoradiale $(\sigma_{\theta\theta})$ et tangentielle $(\sigma_{r\theta})$ du champ de contraintes dans chaque milieu :

$$\sigma_{rr_k} = \lambda_k (\varepsilon_{rr_k} + \varepsilon_{\theta\theta_k}) + 2\mu_k \varepsilon_{rr_k} \qquad \sigma_{\theta\theta_k} = \lambda_k (\varepsilon_{rr_k} + \varepsilon_{\theta\theta_k}) + 2\mu_k \varepsilon_{\theta\theta_k} \qquad \sigma_{r\theta_k} = 2\mu_k \varepsilon_{r\theta_k}$$
 (14)

3 Conditions aux limites

Les propriétés mécaniques et hydrauliques des roches sont très affectées par l'existence de fractures. En présence de discontinuités, les vitesses des ondes primaire et secondaire sont atténuées. La zone hétérogène entourant les galeries contient essentiellement des fractures majeures et mineures. Plusieurs méthodes de modélisation des failles existent dans la littérature. White[9] analyse la vitesse des ondes sismiques dans un massif rocheux contenant des fractures parallèles. Il considère deux plans d'extensions infinis séparé par un contact hertzien pour modéliser les fractures et dérive dans des conditions de chargement statique des modules d'anisotropies effectives. Pyrak Nolte et al. [10] utilisent un contact imparfait pour modéliser une discontinuité et observent l'apparition de nouveaux types d'ondes qui se propagent à l'interface de la discontinuité. Ils associent à leur étude théorique une étude expérimentale pour valider l'existence de nouvelles ondes d'interfaces dispersives dépendant de la polarisation. Nous avons choisi un modèle de contact proposé par Achenbach et al. [5] développé dans le cadre de l'étude de l'effet de la zone interfaciale sur la défaillance et le comportement mécanique des composites renforcés en fibres. Dans notre étude, nous considérons qu'une fracture de forme circulaire (de dimensions petites devant les longueurs d'ondes sismiques considérées) sépare deux couches successives. Deux constantes de raideurs $(k_{rk}, k_{\theta k})$ sont utiles pour modéliser la fracture dans les directions radiales et angulaires à l'interface entre deux couches successives. La constante k_{rk} modélise la fracture dans la direction radiale et la constante k_{θ_k} dans la direction circonférentielle.

Pour chacune des interfaces $(R=a_k)$, avec (k=1,2,3), nous avons une continuité des contraintes et une discontinuité des déplacements qui sont traduites par les équations mathématiques (15-18). Physiquement pour de très faibles valeurs de raideurs (k_{rk}, k_{θ_k}) , deux couches successives sont complètement détachées avec des conditions de traction identiques sur chaque couche. Par contre, pour de très grandes valeurs (k_{rk}, k_{θ_k}) nous avons le cas classique de contact parfait à l'interface entre deux couches successives avec une continuité des contraintes et une continuité des déplacements

$$\sigma_{rr_k} = \sigma_{rr_{k+1}} \tag{15}$$

$$\sigma_{r\theta_k} = \sigma_{r\theta_{k+1}} \tag{16}$$

$$u_{r_k} - \frac{1}{k_{r_k}} \sigma_{rr_k} = u_{r_{k+1}} \tag{17}$$

$$u_{\theta_k} - \frac{1}{k_{\theta_k}} \sigma_{r\theta_k} = u_{\theta_{k+1}} \tag{18}$$

Sur la surface inférieure du tunnel à $(R = a_4)$, (k = 4) nous avons une surface libre d'efforts.

$$\sigma_{rrk} = 0 \tag{19}$$

$$\sigma_{r\theta k} = 0 \tag{20}$$

En appliquant les relations d'orthogonalité aux équations aux limites (15-20), on obtient le système matriciel dont le motif, avec \times pour des termes non nuls, est le suivant :

Valeurs adimensionnées	
ν_1	0.35
ν_2	0.3
ν_3	0.25
ν_4	0.20
μ_1/μ_2	3.20
μ_2/μ_3	3.10
μ_3/μ_4	2.90
C_{p1}/C_{p2}	1.1
C_{p2}/C_{p3}	1.30
C_{p3}/C_{p4}	1.50

Table 1 – Paramètres mécaniques

4 Résultats

La concentration de contraintes correspond à l'accroissement localisé des contraintes dans l'élément structural du à des discontinuités géométriques telles que des trous, des cavités, des encoches, des rainures, des angles et des modifications soudaines de la section transversale. Le rapport de la contrainte maximale dans la région de discontinuité sur la contrainte locale nominale est évalué par le facteur de concentration dynamique ou contrainte orthoradiale adimensionnée, en anglais Dynamic Stress Concentration Factor (DSCF). L'analyse de la DSFC est très importante dans les problèmes d'interaction d'onde plane avec des géométries circulaires, elle rapporte de précieuses informations sur la distribution du champ de contrainte maximale le long de la surface de la cavité.

Nous présentons ici les résultats de la contrainte orthoradiale, des déplacements orthoradiaux et radiaux pour une configuration donnée. Ces résultats sont respectivement représentés sous forme adimensionnés par σ_0 pour la contrainte orthoradiale et par $\frac{\zeta}{\varphi_0}$ pour les déplacements radiaux et orthoradiaux (voir Pao et al. [11]), soit :

$$\sigma_{\theta\theta k}^* = \mid \frac{\sigma_{\theta\theta k}}{\sigma_0} \mid \tag{22}$$

Avec $\sigma_0 = \mu_1 \beta_1^2 \varphi_0$ l'intensité de la contrainte de l'onde incidente dans le massif karstique (milieu 1). Elle représente ici la contrainte nominale locale et $\sigma_{\theta\theta k}^*$ est la contrainte orthoradiale adimensionnée dans la couche k.

$$u_{rk}^* = \frac{u_r \zeta}{\varphi_0}$$
 and $u_{\theta k}^* = \frac{u_{\theta} \zeta}{\varphi_0}$ (23)

 ζ a la dimension d'une longueur (m) et est pris égale à 0.1, u_{rk}^* et $u_{\theta k}^*$ sont les déplacements radiaux et orhtoradiaux adimensionnés dans la couche k.

Les valeurs numériques utilisées sont dans les **tables** 1 et 2. Pour calculer numériquement les champs de contrainte-déplacement, les sommations infinies des séries de Bessel-Fourier doivent être tronquées. Pour un nombre de modes n très grand, nous remarquons l'apparition d'instabilités numériques pouvant entacher les solutions numériques d'erreur ou bien les faire diverger.

	rayons des interfaces $\times (10^{-3} m)$
a_4	10.38
a_3	12.45
a_2	17.64
a_1	22.83

Table 2 – Coordonnées géométriques des points d'interface

Nous retenons 4 modes pour notre étude et nous utilisons 1000 points de discrétisation pour le traçage des diagrammes polaires respectifs en partant d'une fréquence incidente de $f=700\,\mathrm{Hz}$. Une vérification est effectuée pour la validation du modèle développé. Sur la figure 1, nous supposons que les couches 2 et 3 ont des propriétés mécaniques identiques à la couche 1 (même paramètres physiques que le massif karstique). Nous considérons également un contact parfait $(k_{r1},k_{r2},k_{\theta1})$ et $k_{\theta2}$ vers l'infini) aux rayons d'interface $r=a_1$ et $r=a_2$. En choisissant un contact imparfait à l'interface localisée à $r=a_3$ et une surface libre sur a_4 , nous retrouvons la configuration d'étude de Yi et al. [4]. En prenant les mêmes paramètres mécaniques et géométriques que Yi et al. [4], un bon accord est obtenu à la suite d'une comparaison des résultats en contrainte orthoradiale adimensionnée, (Figure 2). L'écart entre les deux résultats est expliqué dans Bouare et al [6].

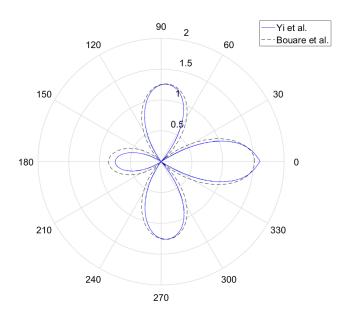


FIGURE 2 – Contrainte orthoradiale adimensionnée (DSCF) sur la surface intérieure du tunnel à $r=a_4$, comparaison avec les resultats de Yi et al. [4]

Nous supposons dans la suite que $(k_{r1}=k_{r2}=k_{r3}=k_r)$, $(k_{\theta 1}=k_{\theta 1}=k_{\theta 1}=k_{\theta})$ et nous considérons que les légendes, $k_r=k_{\theta}=0.1\mu_3/a_3$ (rouge) représente un contact imparfait, $k_r=k_{\theta}=10.0\mu_3/a_3$ (noire) represente un contact parfait et $k_r=k_{\theta}=1.0\mu_3/a_3$ (bleu) est une valeur intermédiaire entre le contact parfait et imparfait.

La figure 3 montre les déplacements radial et orthoradial adimensionnés sur la surface intérieure du tunnel à $r=a_4$. Le déplacement radial est symétrique par rapport à $(\theta=\pi/2)$ et sa valeur maximale est localisée à l'angle $(\theta=0)$ pour les trois types de contact proposés. La plus grande distribution en

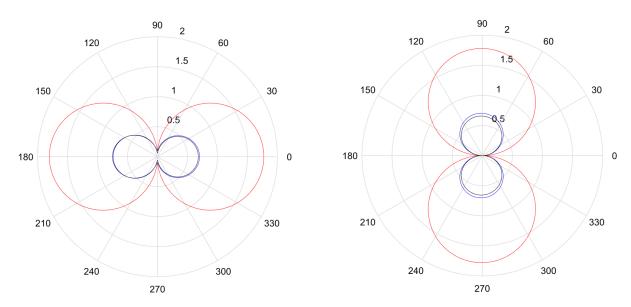


Figure 3 – Déplacement adimensionné sur la surface intérieure du tunnel à $r=a_4$, à gauche, **cas radial** et à droite, **cas orthoradial**.

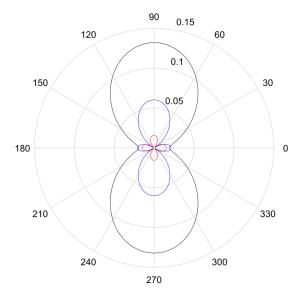


FIGURE 4 – Contrainte orthoradiale adimensionnée (DSCF) sur la surface intérieure du tunnel à $r=a_4$.

déplacement est obtenue pour le contact imparfait. La distribution intermédiaire correspond à la qualité de contact comprise entre les cas parfait et imparfait et la plus faible distribution en déplacement est obtenue pour le contact parfait.

La valeur maximale du déplacement orthoradial est localisée à $(\theta=\pi/2)$ et est symétrique par rapport à $(\theta=0)$ pour le contact imparfait. Nous avons la même chose pour une valeur intermédiaire entre le contact parfait-imparfait et également pour le contact parfait. L'amplitude du déplacement orthoradial dans le cas parfait est moindre par rapport au cas intermédiaire parfait-imparfait.

La figure 4 représente la contrainte orthoradiale adimensionnée (DSCF) sur la surface intérieure du tunnel à $r=a_4$. La contrainte orthoradiale est symétrique par rapport à $(\theta=0)$ et sa valeur maximale est obtenue à $(\theta=\pi/2)$ pour le contact parfait. Les autres contraintes orthoradiales (symetrique à $\theta=0$) pour le cas parfait et le cas intermédiaire entre parfait-imparfait sont quasiment nulles.

5 Conclusion

En régime harmonique, un modèle décrivant la propagation d'ondes mécaniques dans la zone hétérogène entourant la galerie du LSBB est développé. Dans cette approche, le massif karstique et le tunnel sont supposés élastiques et une description bicouche cylindrique (élastique) est proposée pour modéliser la zone hétérogène autour du tunnel. Les fractures existantes dans les couches hétérogènes sont prises en compte à l'aide du contact imparfait. Dans une approche simplifiée, les résultats sont comparées à ceux de Yi et al. [4] et un bon accord est obtenu. D'autres résultats illustrant la répartition du champ de déplacement radial, orthoradial et la DFSC sur la surface intérieure du tunnel sont proposés.

Références

- [1] H. Cao, V.W. Lee. Scattering and diffraction of plane P waves by circular cylindrical canyons with variable depth-to width ratio. Soil Dynamics and Earthquake Engineering 93 141-150 1990.
- [2] X.Q. Fang, H.X. Jin. Visco-elastic imperfect bonding effect on dynamic response of a non circular lined tunnel subjected to P and SV waves. Soil Dynamics and Earthquake Engineering 88 1-7 2016.
- [3] J. Zhang, L. Zeng, C. Hu, W. Yan. Study on the single scattering of elastic waves by a cylindrical fiber with a partially imperfect bonding using the collocation point method. Shock and Vibration 2-14 2018.
- [4] C.P. Yi, W.b. Lu, P. Zhang, D. Johansson, U. Nyberg. Effect of imperfect interface on the dynamic response of a circular lined tunnel impacted by plane P-waves. Tunnelling and Underground Space Technology 21 68-74 2016.
- [5] J.D. Achenbach, H. Zhu. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber reinforced composites. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 37 381–393 1989.
- [6] H. Bouare, A. Mesgouez, G. Lefeuve-Mesgouez. Contribution to the modeling and the mechanical characterization of the subsoil in the LSBB environment. Idust, Avignon 4-5 June 2018.
- [7] J.J. Faran. Sound scattering by solid cylinders and spheres. The Journal of the Acoustical Society of America 23 406-418 1951.
- [8] C.C. Mei. Wave Propagation. Fall, 2004 MIT.
- [9] J.E. White. Underground sound: application of seismic waves. 83-183 Elsevier, New York, 1983.
- [10] L.J. Pyrak Nolte, J. Xu, G.M. Haley. Elastic interface waves propagating in a fracture. Physical Review Letters 68 15-24 1992.
- [11] Y.H. Pao, C.C Mow. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. Rand, Crane Russak, New York, 1971.