Invariants et covariants en mécanique du solide

Boris Kolev*†1, Marc Olive[2], Rodrigue Desmorat[3], Boris Desmorat[4], and Nicolas Auffray[5]

[1]Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT) – Centre National de la Recherche Scientifique : UMR8535, École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, Université Paris-Saclay,Sorbonne Universités – France

[2]LMT-Cachan (LMT-Cachan) – UMR 8535 – École Normale Supérieure de Cachan et LMT-Cachan 61, avenue du Président Wilson 94235 Cachan Cédex, France

[3]Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT) – LMT, ENS Cachan, CNRS, Université Paris Saclay – France

[4]Université Pierre et Marie Curie - Paris 6 (UPMC) – Université Pierre et Marie Curie (UPMC) - Paris VI : UMR7190 – 4 place Jussieu - 75005 Paris, France

[5]Laboratoire de Modélisation et Simulation Multi Echelle (MSME) – Université Paris-Est Marne-la-Vallée (UPEMLV), CNRS : UMR8208, Université Paris-Est Créteil Val-de-Marne (UPEC) – Université Paris-Est, 5 Bd Descartes, 77454 Marne-la-Vallée, Cedex 2, France

Résumé

En mécanique des milieux continus, la notion d'*invariance* des lois de comportements (par rapport à l'observateur) joue un rôle fondamental. Cette objectivité se traduit mathématiquement par l'action du groupe des rotations sur les tenseurs de structure qui apparaisent naturellement dans la modélisation en mécanique.

Le problème mathématique sous-jacent est donc l'étude d'une représentation linéaire du groupe des rotations sur un espace de tenseurs. En pratique, deux questions importantes surgissent: la *description des orbites* (sous l'action du groupe des rotations) de ces tenseurs ainsi que la *description de leurs classe de symétrie*. Si la réponse à ces questions est triviale tant qu'on se limite à des matériaux isotropes, ces descriptions effectives dans le cas anisotrope est beaucoup plus délicate.

C'est la théorie classique des invariants et la géométrie algébrique qui permet de donner des réponses rigoureuses sur le plan mathématique à ces problèmes. Si la description exacte des classes de symétrie du tenseur d'élasticité a été obtenue par Forte-Vianello en 1996, une *base d'intégrité minimale* constituée de 297 invariants n'a été définitivement obtenue qu'en 2017 et une description algébrique complète des classes de symétrie qu'en 2018.

Dans cet exposé, je présenterai les derniers développements sur les outils mathématiques qui ont permis de résoudre ces problèmes. J'introduirai quelques notions comme les *formes binaires* et l'*application de Cartan* qui permettent effectivement de calculer des bases d'invariants de tenseurs. J'étendrai la notion d'algèbre d'invariants à celle d'algèbre de *covariants* d'une

*Intervenant

†Auteur correspondant: boris.kolev@math.cnrs.fr

représentation tensorielle.

Cette notion plus générale de covariant conduit à la définition de nouvelles opérations tensorielles, comme le *produit vectoriel généralisé*, ce qui permet de décrire ces invariants ou covariants sous une forme compacte et lisible.

Ces outils seront utilisés pour décrire de manière algébrique simple les classes de symétrie d'un tenseur de structure. On obtiendra par exemple, la description explicite complète des huit classes de symétrie du tenseur d'élasticité à l'aide de covariants.

Mots-Clés: Géométrie des tenseurs, Classes de symétrie, Invariants, Covariants.