

# Un modèle dispersif pour la simulation numérique des vagues côtières de la zone de levée à la zone de jet de rive

G. L. RICHARD<sup>a</sup>, A. DURAN<sup>b</sup>, M. KAZAKOVA<sup>c</sup>, B. FABRÈGES<sup>d</sup>

a. Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP, LEGI, 38000 Grenoble, France, gael.richard@univ-grenoble-alpes.fr

b. Univ. Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, ICJ, F-69622 Villeurbanne, France, arnaud.duran@univ-lyon1.fr

c. ENSTA ParisTech, POEMS, 91762 Palaiseau, France, maria.kazakova@ensta-paristech.fr

d. Univ. Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, ICJ, F-69622 Villeurbanne, France, fabreges@math.univ-lyon1.fr

## Résumé :

*Un nouveau modèle de vagues côtières est dérivé en prenant la moyenne sur la profondeur des équations de simulation des grandes échelles de la turbulence. La turbulence de grande échelle est résolue et prise en compte par un tenseur anisotrope d'énstrophie. La turbulence de petite échelle est modélisée par une hypothèse de viscosité turbulente. Les propriétés dispersives sont identiques à celles des équations complètement non linéaires de Serre-Green-Naghdi, ce qui permet d'étendre les techniques développées pour leur optimisation ou pour leur résolution numérique. Un schéma de type Galerkin Discontinu est utilisé pour les simulations numériques sur une formulation asymptotiquement équivalente de type diagonale constante. Le modèle est validé sur plusieurs cas-tests expérimentaux. Les simulations numériques de l'évolution de l'énergie turbulente dans le cas de déferlements glissant et plongeant sont présentées et discutées. Un transport d'énergie turbulente vers le large est obtenu pour un déferlement glissant et vers la plage pour un déferlement plongeant.*

## Abstract :

*A new model of coastal waves is derived from the depth-averaged large eddy simulation equations. The large-scale turbulence is resolved and included in an anisotropic enstrophy tensor. The small-scale turbulence is modelled with an eddy viscosity hypothesis. The dispersive properties are identical to those of the fully nonlinear equations of Serre-Green-Naghdi. This gives the possibility to extend the techniques developed for their optimization or for their numerical resolution. A Discontinuous Galerkin scheme is used for the numerical simulations with an asymptotically equivalent formulation of the constant diagonal type. The model is validated with several experimental test cases. The numerical simulations of the evolution of the turbulent energy in the case of a spilling breaker and in the case of a plunging breaker are presented and discussed. A seaward turbulent energy transport is obtained for a spilling breaker whereas it is oriented landward for a plunging breaker.*

**Mots clefs : Ingénierie côtière ; Écoulements à surface libre ; Déferlement.**

# 1 Introduction

La modélisation des vagues côtières présente un intérêt majeur pour la prévision et la prévention des événements extrêmes tels que les grandes tempêtes, et pour la morphodynamique côtière et notamment les problèmes d'érosion des côtes. La difficulté est d'obtenir des modèles prédictifs précis permettant néanmoins une résolution numérique fiable et rapide pour des domaines de calcul étendus, de l'ordre du kilomètre ou plus, et des durées allant de quelques heures à plusieurs jours voire bien davantage. Ces contraintes ont motivé le développement de modèles dits à phases moyennées, dans lesquels les vagues ne sont pas résolues, afin d'augmenter la vitesse de calcul. Les progrès de la puissance de calcul des ordinateurs, des schémas numériques et des techniques de parallélisation permettent d'envisager l'utilisation de modèles à vagues résolues, qui nécessitent des maillages plus fins et qui sont donc plus gourmands en temps de calcul. En contrepartie, la résolution des vagues apporte une plus grande précision et permet de capturer davantage d'effets physiques, notamment en ce qui concerne les effets non linéaires.

La propagation des vagues en zone côtière se caractérise, en se rapprochant de la plage, par un raidissement des vagues dans la zone de levée puis par le phénomène de déferlement et la propagation d'une vague déferlante jusqu'à la côte. La partie de la plage qui n'est pas recouverte en permanence par l'eau est la zone de jet de rive dans laquelle se succèdent alternativement le jet de rive lors de la montée de la vague et le jet de retour lors de sa descente. La zone de levée est dominée par le phénomène de dispersion tandis que la zone de déferlement est dominée par la dissipation. La zone de jet de rive pose des problèmes spécifiques pour la résolution numérique en raison de l'existence de fronts secs.

Les équations de Saint-Venant [2] ne sont pas dispersives et sont donc insuffisantes pour décrire la propagation des vagues dans la zone de levée. Les modèles dispersifs moyennés sur la profondeur sont traditionnellement appelés modèles de type Boussinesq. Les équations de Boussinesq proprement dites [5, 23] sont obtenues avec une hypothèse de faible non-linéarité qui ne permet pas de décrire les forts raidissements dans la zone de levée. Les équations complètement non-linéaires, mieux adaptées aux vagues côtières, ont été dérivées par Serre [31] dans le cas unidimensionnel (1D) et par Green & Naghdi [11] dans le cas bidimensionnel (2D). Ces équations sont cependant faiblement dispersives ce qui a motivé divers travaux pour améliorer leurs propriétés dispersives [42, 4]. La résolution de ces équations fait intervenir une étape elliptique qui nécessite un traitement numérique particulier [18, 17].

Une autre approche consiste à utiliser les équations de Saint-Venant non hydrostatiques [32] dans lesquelles la correction non hydrostatique de la pression constitue une variable supplémentaire vérifiant une équation elliptique de type Poisson. Dans cette approche, le nombre de couches est généralement compris entre un et trois mais deux couches minimum sont nécessaires pour obtenir des résultats satisfaisants.

La prise en compte de la dissipation dans les modèles de type Boussinesq est obtenue par diverses stratégies. Dans les modèles de rouleau, le rouleau turbulent des vagues déferlantes est assimilé à une masse d'eau se propageant à la vitesse de la vague [20]. Cette approche nécessite l'activation d'un critère de déferlement et la calibration d'un assez grand nombre de paramètres. Une autre possibilité consiste à modéliser la turbulence par une hypothèse de viscosité turbulente [43, 22, 16, 44]. Enfin, dans les modèles hybrides ou à commutation, les termes dispersifs des équations de Serre-Green-Naghdi sont supprimés lorsque s'active un critère de déferlement, ce qui ramène le système aux

équations hyperboliques de Saint-Venant [41, 40]. Celles-ci produisent des chocs en temps fini qui dissipent l'énergie. Cependant, la suppression des termes dispersifs produit des instabilités numériques et une sensibilité au maillage [15]. Le critère de déferlement constitue un point faible de ces modèles en raison des problèmes de calibration qu'il nécessite. Dans les approches de type Saint-Venant non-hydrostatique, le déferlement pose également des problèmes en nécessitant de 10 à 20 couches pour être correctement prédits, avec en conséquence une forte augmentation du temps de calcul. Une autre solution est d'introduire un critère de déferlement et de supprimer le terme non-hydrostatique à son activation [30], ce qui présente les mêmes inconvénients que pour les modèles de type Boussinesq.

Dans cet article, l'approche présentée dans Kazakova & Richard [14] et Richard *et al.* [25], essentiellement dans le cas d'une onde solitaire, est étendue au cas des trains de vagues et à l'évolution de l'énergie turbulente moyennée sur la profondeur. Dans cette approche, les équations des grandes échelles de la turbulence sont moyennées sur la profondeur. La turbulence de grande échelle est explicitement résolue tandis que la turbulence de petite échelle est modélisée par une hypothèse de viscosité turbulente. Par rapport aux modèles où toute la turbulence est modélisée par des termes visqueux, cette approche permet de capturer le caractère anisotrope de la turbulence de grande échelle et de décrire avec plus de précision la double structure de la turbulence liée à la coexistence d'une turbulence tridimensionnelle (3D) d'échelle inférieure à la profondeur et d'une turbulence bidimensionnelle correspondant aux grands tourbillons de vorticité verticale et de bien plus grande échelle [21]. La dispersion est traitée de façon similaire aux équations de Serre-Green-Naghdi, ce qui permet d'utiliser les mêmes techniques pour en améliorer les propriétés dispersives ou pour la résolution numérique.

## 2 Équations du modèle

Les équations du modèle sont obtenues en prenant la moyenne sur la profondeur des équations de simulation des grandes échelles de la turbulence. À partir des équations de Navier-Stokes des fluides incompressibles, une procédure de filtrage permet de décomposer les champs de vitesse et de pression en une composante filtrée et une composante résiduelle. La fréquence de coupure est située dans la zone inertielle. Cette procédure classique est détaillée dans de nombreux ouvrages [24].

Le tenseur des contraintes résiduelles est modélisé par une hypothèse de viscosité turbulente. La viscosité turbulente  $\nu_T$ , qui, dans ce cadre, ne prend en compte que la turbulence de petite échelle, est supposée uniforme sur la profondeur. La turbulence de grande échelle, qui contient la quasi-totalité de l'énergie, est explicitement résolue. L'énergie cinétique résiduelle est absorbée dans la pression. La dissipation de l'énergie cinétique résiduelle moyenne peut être confondue avec son taux de production [19, 12].

Les notations utilisées sont données sur la Figure 1. On note  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $h$  la profondeur d'eau,  $h_0$  la profondeur au repos et  $b$  l'élévation de la bathymétrie par rapport à un niveau de référence. Les équations sont dérivées par une méthode asymptotique reposant sur l'existence du petit paramètre de faible profondeur (et de faible dispersion)

$$\mu = \frac{h_0^*}{L} \ll 1 \quad (2.1)$$

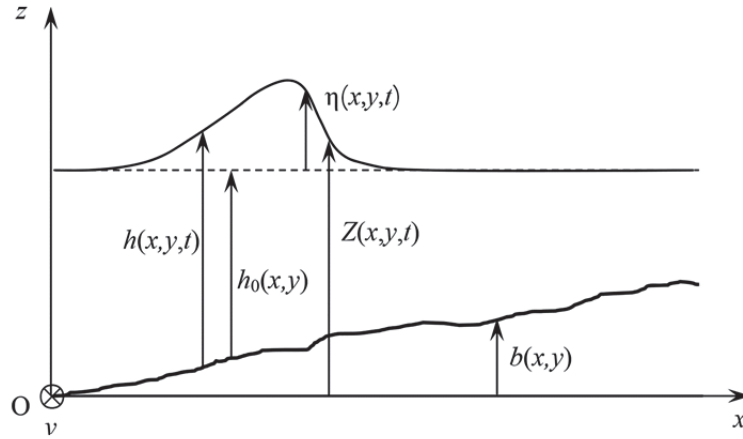


Figure 1. Notations utilisées.

où  $h_0^*$  est une profondeur au repos de référence et  $L$  la longueur typique de variation des grandeurs de l'écoulement dans la direction horizontale. Le nombre de Reynolds est supposé très grand, au moins  $O(\mu^{-3})$ , ce qui permet de négliger tous les termes dus à la viscosité moléculaire. De même que dans tous les travaux théoriques ou expérimentaux [9, 33, 3, 1, 44], la viscosité turbulente est supposée  $O(\mu)$ , c'est-à-dire que le rapport  $v_T / (h_0^* \sqrt{g h_0^*})$  est  $O(\mu)$ . Nous rappelons qu'à la différence des travaux cités, la viscosité turbulente n'est ici relative qu'à la turbulence de petite échelle. La vitesse horizontale filtrée  $\bar{\mathbf{u}}$  est décomposée selon

$$\bar{\mathbf{u}}(x, y, z, t) = \mathbf{U}(x, y, t) + \mathbf{u}'(x, y, z, t) \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{U}$  est la vitesse filtrée moyenne sur la profondeur et  $\mathbf{u}'$  l'écart de la vitesse à cette vitesse moyenne, dû à la turbulence de grande échelle et aux effets de cisaillement. On se place dans l'approximation des écoulements faiblement turbulents et faiblement cisailés, formulée par Teshukov [36] et utilisée par Richard & Gavriljuk [26] ou Castro & Lannes [7], écrite ici  $\mathbf{u}' = O(\mu)$ . Cette hypothèse conduit au même ordre de grandeur de l'énergie turbulente que pour les modèles de vagues côtières à viscosité turbulente et, en dépit de son nom, permet de décrire des vagues déferlantes fortement turbulentes et de modéliser des ressauts hydrauliques fortement turbulents [27].

La moyenne sur la profondeur donne les équations du modèle en tenant compte des conditions aux limites cinématiques et dynamiques. La moyenne d'une grandeur  $A$  quelconque est définie par

$$\langle A \rangle = \frac{1}{h} \int_b^{b+h} A \, dz. \quad (2.3)$$

On note  $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle$ . En notant  $h$  la profondeur d'eau totale, la conservation de la masse conduit à l'équation

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(h\mathbf{U}) = 0. \quad (2.4)$$

La turbulence de grande échelle et les effets de cisaillement sont pris en compte par le tenseur anisotrope

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{h^3} \int_b^{b+h} \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \, dz \quad (2.5)$$

homogène au carré d'une vorticité et appelé tenseur enstrophie. On définit la dérivée particulière

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{grad} h \quad (2.6)$$

et on note  $\ddot{h}$  la dérivée particulaire de  $\dot{h}$ . Le bilan de quantité de mouvement moyenné sur la profondeur s'écrit alors [25]

$$\frac{\partial h \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{div}(h \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + h^3 \boldsymbol{\varphi}) + \mathbf{grad} \left( \frac{gh^2}{2} + \frac{h^2 \ddot{h}}{3} + \Pi' \right) = -gh \mathbf{grad} b + \mathbf{div}(h \mathbf{A}) + \mathbf{f} - \mathbf{f}'. \quad (2.7)$$

La force  $\mathbf{f}$  représente les frottements sur le fond et peut être modélisée par les lois classiques de Chézy, de Manning-Strickler ou de Colebrook-White. Les grandeurs  $\mathbf{f}'$  et  $\Pi'$  sont des termes  $O(\mu^2)$  dus au fond variable et dont les expressions sont

$$\Pi' = \frac{h^2}{2} \frac{D}{Dt} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad} b), \quad (2.8)$$

$$\mathbf{f}' = h \left[ \frac{\ddot{h}}{2} + \frac{D}{Dt} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{grad} b) \right] \mathbf{grad} b. \quad (2.9)$$

Le tenseur  $\mathbf{A}$  est le tenseur des contraintes visqueuses lié à la viscosité turbulente de la turbulence de petite échelle. Le modèle présentant une analogie avec les équations des fluides compressibles, bien repérable sur le bilan de masse (2.4), le tenseur  $\mathbf{A}$  vérifie une relation analogue à la relation constitutive des fluides newtoniens compressibles

$$\mathbf{A} = 2\nu_T \mathbf{S} + 2\nu_T (\mathbf{div} \mathbf{U}) \mathbf{I} \quad (2.10)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité 2D et où

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} [\mathbf{grad} \mathbf{U} + (\mathbf{grad} \mathbf{U})^T] \quad (2.11)$$

est le tenseur des taux de déformation lié au mouvement moyen. La première viscosité est égale à la viscosité turbulente tandis que la seconde viscosité est égale à  $2\nu_T$ . Il est commode de définir le déviateur  $\mathbf{S}_0 = \mathbf{S} - (\mathbf{div} \mathbf{U}) \mathbf{I} / 2$ , ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{A} = 2\nu_T \mathbf{S}_0 + \zeta (\mathbf{div} \mathbf{U}) \mathbf{I} \quad (2.12)$$

où  $\zeta$  est la viscosité de volume, égale à  $3\nu_T$ .

Le modèle est faiblement dispersif mais complètement non-linéaire. Il comporte des dérivées troisièmes mixtes temporelles et spatiales nécessitant un traitement numérique particulier. Les propriétés dispersives sont identiques à celles des équations de Serre-Green-Naghdi.

L'anisotropie de la turbulence de grande échelle est prise en compte par l'anisotropie du tenseur symétrique d'ensrophie. L'approche de simulation des grandes échelles de la turbulence moyennée sur la profondeur permet en outre de décrire les transferts d'énergie dans les deux sens entre les grands tourbillons 2D et les plus petits tourbillons 3D (cascade d'énergie et cascade inverse). En revanche, les petites échelles de la turbulence sont proches de l'isotropie et de l'équilibre et vérifient bien la cascade d'énergie de Richardson [28], ce qui justifie l'hypothèse de viscosité turbulente adoptée pour ces échelles. La fermeture du système nécessite de dériver une équation tensorielle pour l'ensrophie. Celle-ci s'écrit [25]

$$\begin{aligned} \frac{\partial h\boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{div}(h\boldsymbol{\varphi} \otimes \mathbf{U}) - 2h(\mathbf{div} \mathbf{U})\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{grad} \mathbf{U} \cdot h\boldsymbol{\varphi} + h\boldsymbol{\varphi} \cdot (\mathbf{grad} \mathbf{U})^T \\ = \mathbf{grad} \mathbf{U} \cdot \frac{\mathbf{A}}{h} + \frac{\mathbf{A}}{h} \cdot (\mathbf{grad} \mathbf{U})^T - \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{h}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Cette équation ne comprend aucun terme dispersif et aucun terme dû au fond variable. Elle ne présente donc pas de difficulté particulière pour la résolution numérique. Le tenseur  $\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle$  est le tenseur de dissipation. Il est introduit dans le modèle en étendant aux grandeurs tensorielles le résultat de Lilly [19] sur l'égalité, en moyenne, du taux de transfert de l'énergie turbulente des échelles filtrées vers les échelles résiduelles et de la dissipation d'énergie dans les échelles résiduelles.

L'équation du tenseur enstrophie est similaire à l'équation du tenseur de Reynolds mais d'une part, l'approximation des écoulements faiblement turbulents de Teshukov [36] permet de négliger le tenseur d'ordre 3  $\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle$  et d'autre part, il n'y a pas de tenseur de corrélation pression-déformation. L'équation (2.13) est donc beaucoup plus simple. Le tenseur de production comporte deux parties, l'une relative à la turbulence de grande échelle, qui est résolue par l'intermédiaire du tenseur enstrophie, et l'autre relative à la turbulence de petite échelle et qui est modélisée par une viscosité turbulente.

L'énergie turbulente du modèle s'écrit  $h^2 \text{tr} \boldsymbol{\varphi} / 2$ . Elle comprend l'énergie turbulente contenue dans les grandes échelles, c'est-à-dire la quasi-totalité de l'énergie turbulente, mais aussi l'énergie due à la variation de la vitesse moyenne avec la profondeur. L'équation de  $\text{tr} \boldsymbol{\varphi}$ , qui peut s'obtenir en prenant la trace de l'équation (2.13), s'écrit

$$\frac{\partial h \text{tr} \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \mathbf{div}(h \mathbf{U} \text{tr} \boldsymbol{\varphi}) - 2h(\mathbf{div} \mathbf{U}) \text{tr} \boldsymbol{\varphi} + 2h\boldsymbol{\varphi} : \mathbf{grad} \mathbf{U} = \frac{2}{h} \mathbf{A} : \mathbf{grad} \mathbf{U} - \frac{\text{tr} \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle}{h} \quad (2.14)$$

Le terme en  $\mathbf{A} : \mathbf{grad} \mathbf{U}$  (la notation  $:$  indique un produit doublement contracté) est positif et entraîne une production d'énergie turbulente.

La fermeture du modèle nécessite de connaître les expressions de la viscosité turbulente et du tenseur de dissipation. Pour ce dernier, une loi empirique est écrite avec comme contrainte la préservation de la positivité du tenseur enstrophie et donc de son déterminant et de sa trace. En s'inspirant du modèle écrit par Rotta [29], avec une longueur de mélange proportionnelle à la profondeur d'eau, on peut écrire l'expression

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = C_r h^2 \boldsymbol{\varphi} \sqrt{\text{tr} \boldsymbol{\varphi}} \quad (2.15)$$

où  $C_r$  est une grandeur sans dimension. De manière analogue, l'expression de la viscosité turbulente peut être écrite

$$v_T = \frac{h^2}{R} \sqrt{\text{tr} \boldsymbol{\varphi}} \quad (2.16)$$

où  $R$  est une autre grandeur sans dimension, que l'on peut interpréter comme un nombre de Reynolds.

### 3 Schéma numérique

Du point de vue de la résolution numérique, les équations du modèle ne présentent pas plus de difficultés que les équations de Serre-Green-Naghdi. Les techniques mises en œuvre pour résoudre ces équations peuvent être appliquées aux équations du modèle. La prise en compte de la turbulence ne

rajoute que trois équations de transport scalaires, dont le coût numérique est très faible. Dans le cas 1D, le système peut être résolu par la méthode de Le Métayer *et al.* [18], qui comprend une étape elliptique [14]. Dans le cas 2D, la méthode proposée par Bonneton *et al.* [4] et améliorée par Lannes & Marche [17] peut être mise en œuvre. Cette méthode consiste à dériver un modèle asymptotiquement équivalent, possédant des propriétés dispersives identiques ou optimisées, mais dépourvu des dérivées troisièmes du modèle d'origine. La méthode à diagonale constante de Lannes & Marche [17] requiert l'inversion en début de calcul d'un opérateur diagonal indépendant du temps et la résolution, à chaque pas de temps, d'une équation elliptique. L'équation de quantité de mouvement (2.7) peut être reformulée sous la forme asymptotiquement équivalente

$$\frac{\partial h\mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{div}(h\mathbf{U} \otimes \mathbf{U} + h^3\boldsymbol{\varphi}) + gh \mathbf{grad}(h+b) + \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

où l'expression du terme dispersif  $\mathbf{D}$  s'écrit

$$\mathbf{D} = -\frac{gh}{\alpha} \mathbf{grad}(h+b) - \mathbf{div}(h^3\boldsymbol{\varphi}) + (\mathbf{I} + \alpha\mathbf{T})^{-1} \left[ \frac{gh}{\alpha} \mathbf{grad}(h+b) + h\mathbf{Q}_1 + gh\mathbf{Q}_2 + g\mathbf{Q}_3 \right]. \quad (2.18)$$

La constante sans dimension  $\alpha$  permet d'optimiser les propriétés dispersives en prenant  $\alpha = 1,159$  [4]. Sans cette optimisation ( $\alpha = 1$ ), les propriétés dispersives sont les mêmes que celles des équations de Serre-Green-Naghdi et restent valables jusqu'à  $kh_0 \approx 1$  (où  $k$  est le module d'onde). Avec la correction, la vitesse de phase reste précise jusqu'à  $kh_0 \approx 4$ , la vitesse de groupe jusqu'à  $kh_0 \approx 2,5$  et le gradient de levée jusqu'à  $kh_0 \approx 2$  [8]. La résolution numérique implique l'inversion préalable de l'opérateur  $\mathbf{I} + \alpha\mathbf{T}$  où  $\mathbf{I}$  est l'opérateur identité et où  $\mathbf{T}$  est l'opérateur diagonal indépendant du temps défini par

$$\mathbf{T}\mathbf{W} = -\frac{1}{3} \mathbf{div} \left( h_0^3 \mathbf{grad} \frac{\mathbf{W}}{h_0} \right) \quad (2.19)$$

pour tout vecteur  $\mathbf{W}$ . Les expressions (assez lourdes) de  $\mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_2$  et  $\mathbf{Q}_3$  peuvent être trouvées dans Lannes & Marche [17], Duran & Marche [10] ou Richard *et al.* [25].

Le schéma numérique mis en œuvre est une extension directe du schéma de type Galerkin discontinu développé par Duran & Marche [10]. Un schéma équilibré est obtenu en reformulant la pression hydrostatique selon

$$gh \mathbf{grad}(h+b) = \frac{g}{2} \mathbf{grad}(Z^2 - 2Zb) + gZ \mathbf{grad} b \quad (2.20)$$

où  $Z = h+b$ . L'équation de masse effectivement résolue est alors  $\partial Z / \partial t + \mathbf{div}(h\mathbf{U}) = 0$ . Le schéma est adapté à un maillage non structuré.

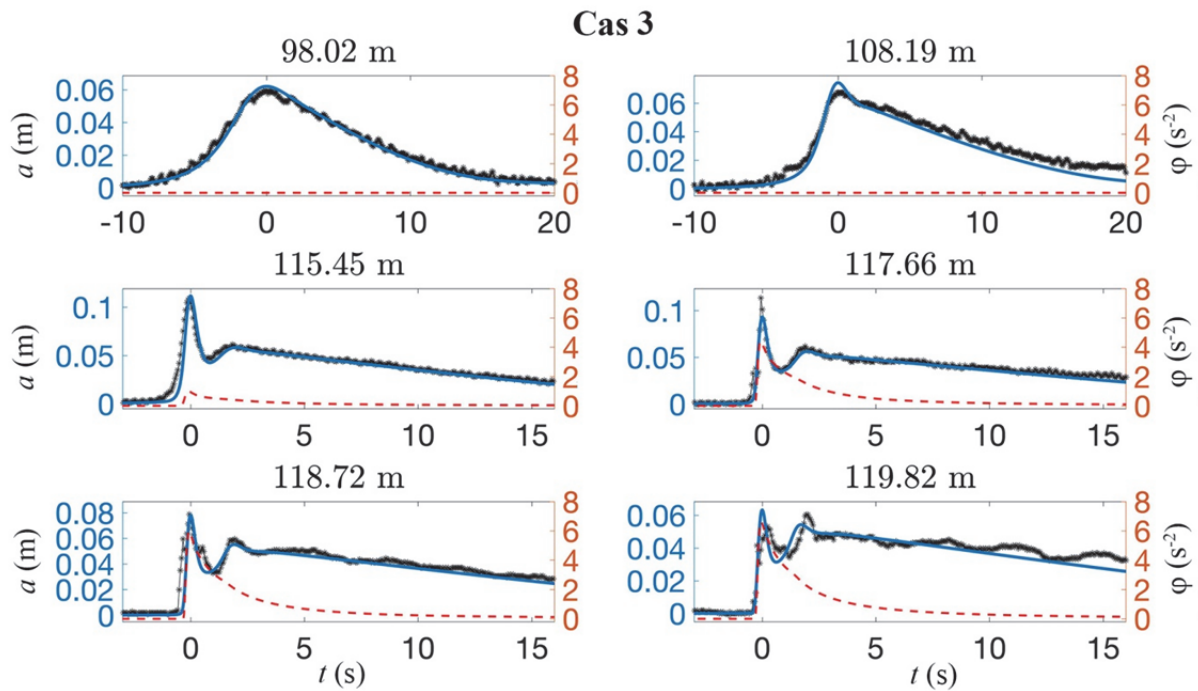


Figure 2. Variations de l'amplitude de la vague avec le temps à différentes abscisses pour le cas 3 des expériences de Hsiao et al. [13]. Noir : résultats expérimentaux ; bleu : résultats numériques. Rouge : variations de l'enstrophie.

## 4 Validation

Le modèle est validé par comparaison avec des résultats expérimentaux. Les expériences de Hsiao *et al.* [13] sur la propagation d'une onde solitaire sur un plan incliné sont les premiers tests de validation du modèle, dans un cas 1D. Dans les expériences, une onde solitaire est générée et envoyée dans un canal de 300 m de long, de 5 m de large et de 5,2 m de profondeur. Un plan incliné de pente 1/60 est installé à une distance de 50 m à partir du générateur de vagues. La non-linéarité est définie par

$$\delta = \frac{a}{h_0^*} \quad (2.21)$$

où  $a$  est l'amplitude de l'onde solitaire et  $h_0^*$  la profondeur au repos avant le plan incliné. Plusieurs séries de mesures ont été effectuées pour des profondeurs au repos avant le plan incliné de 1,2 m, 2,2 m et 2,9 m et des non-linéarités comprises entre 0,019 et 0,338.

Pour les simulations numériques, le domaine de calcul après le plan incliné a été prolongé par une longue partie plate de faible profondeur pour éviter les réflexions et les problèmes de front sec. Les expériences ont été simulées dans 14 cas couvrant tout l'intervalle de non-linéarité et de profondeur. La valeur du paramètre  $C_r$  est la même pour toutes les expériences de Hsiao *et al.* [13] et pour toutes les autres expériences. La valeur  $C_r = 0,48$  semble universelle. Les vagues faiblement non linéaires ( $\delta < 0,05$ ) n'ont nécessité aucun critère de déferlement. La valeur  $R = 6$  a permis de traiter tous ces cas convenablement mais la sensibilité à ce paramètre n'est pas très grande et toute valeur entre 5 et 10 est acceptable. Les résultats dans le cas 3, correspondant à  $h_0^* = 1,2$  m et  $\delta = 0,048$ , sont présentés en Figure 2. Les variations de la profondeur en fonction du temps à différentes abscisses calculées numériquement sont comparées aux mesures expérimentales. Les variations de l'enstrophie sont



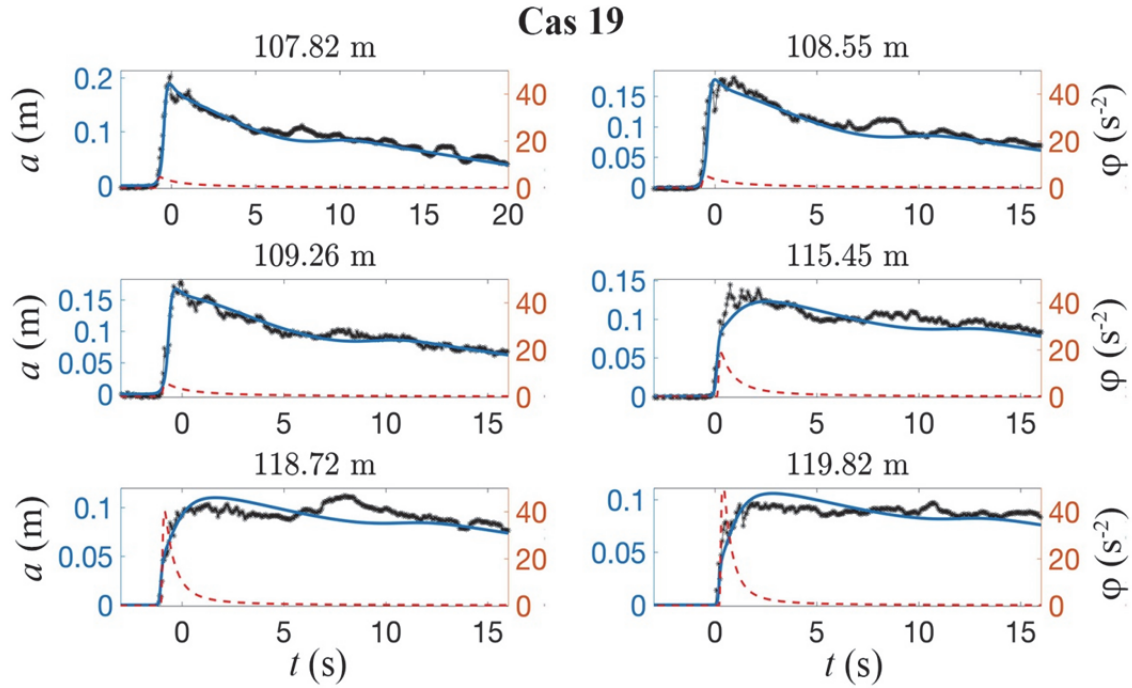


Figure 3. Variations de l'amplitude de la vague avec le temps à différentes abscisses pour le cas 19 des expériences de Hsiao et al. [13]. Noir : résultats expérimentaux ; bleu : résultats numériques. Rouge : variations de l'énstrophie.

également présentées. L'apparition de l'énstrophie est une indication du début du déferlement. Les résultats obtenus sont en bon accord avec l'expérience.

Pour des non-linéarités plus fortes, un critère de déferlement a été utilisé pour éviter une diminution prématurée de l'amplitude de la vague dans la zone de levée. Les critères usuels peuvent être utilisés. Nous avons utilisé un critère basé sur la notion d'énstrophie virtuelle. Une variable supplémentaire est introduite vérifiant exactement la même équation que l'énstrophie. La seule différence est que cette variable, appelée énstrophie virtuelle, n'exerce aucune rétroaction sur l'écoulement. Elle représente la quantité d'énstrophie que l'écoulement est capable de produire mais sans modifier celui-ci. Lorsque l'énstrophie virtuelle (la trace du tenseur dans le cas 2D) dépasse un certain seuil, la viscosité turbulente est activée, ce qui crée l'énstrophie réelle et ce qui représente le début du déferlement. Cette méthode a été utilisée notamment dans le cas 19 des expériences de Hsiao *et al.* [13], pour lequel  $h_0^* = 1,2$  m et  $\delta = 0,338$ . Pour tous les cas de Hsiao *et al.* [13] avec critère, la valeur unique  $R = 1,7$  a été choisie (toute valeur comprise entre 1,6 et 2,0 est acceptable) et le seuil d'énstrophie virtuelle  $\psi_0$  pour l'activation de la viscosité dépend de la non-linéarité selon

$$\tilde{\psi}_0 = 0,1 + \frac{0,031}{\delta} \quad (2.22)$$

où  $\tilde{\psi}_0 = \psi_0 h_0^* / g$ . La valeur de  $C_r$  est toujours de 0,48. Les résultats numériques, présentés sur la Figure 3, sont en bon accord avec l'expérience.

Le modèle a également été testé sur les expériences de Beji & Battjes [3] dans lesquelles un train de vagues sinusoïdales est envoyé sur une barre (Figure 4). Le dispositif comprend un canal de 37,7 m de long avec une barre trapézoïdale d'une pente de 1/20 sur sa face avant et de 1/10 sur sa face arrière. Huit jauges permettent de mesurer l'écoulement à diverses positions dans le canal (Figure 4). Pour l'expérience simulée, la profondeur au repos avant la barre était de  $h_0^* = 0,4$  m, l'amplitude des vagues était de  $a = 0,054$  m et la fréquence du train de vagues de 0,4 Hz. Les vagues déferlent en

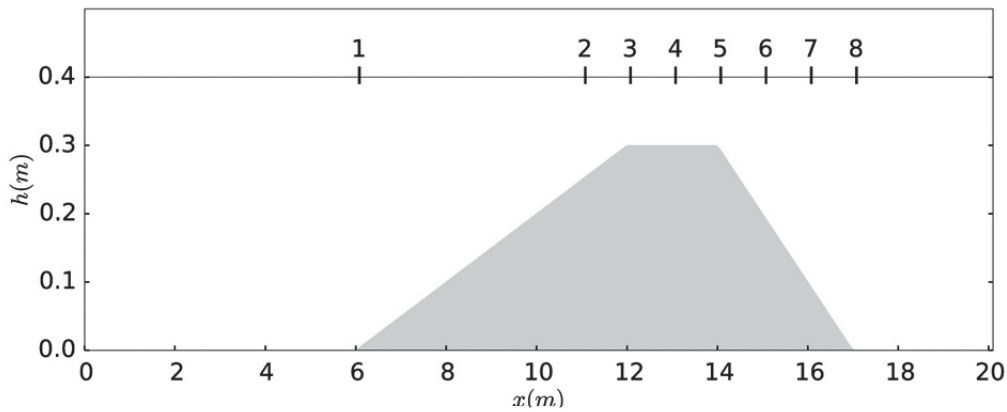


Figure 4. Dispositif expérimental de Beji & Battjes [3] montrant la position des balises.

arrivant au-dessus de la barre. Le déferlement cesse lorsque les vagues arrivent en eau plus profonde après la barre où elles subissent des déformations fortement non linéaires.

Les simulations numériques ont été réalisées avec une couche éponge à gauche et à droite pour la génération des vagues et leur sortie. Aucun critère de déferlement n'est nécessaire pour cette simulation, ni pour initier le déferlement ni pour le terminer. Les résultats numériques sont comparés aux mesures expérimentales de Beji & Battjes [3] sur la Figure 5. L'accord est excellent, aussi bien dans la zone de levée (jauges 1 et 2) qu'au début du déferlement (jauge 3), dans la zone de déferlement (jauges 4 et 5) et après la fin du déferlement (jauges 6, 7 et 8).

Le modèle 2D est testé dans le cas des expériences de Swigler [35]. Une onde solitaire se propage dans un bassin de 48,8 m de long et de 26,5 m de large comprenant une plage et un récif conique. La profondeur au repos au large est de  $h_0^* = 0,78$  m et l'amplitude relative de la vague est de 0,5. La simulation numérique a été obtenue sur maillage non structuré comprenant 200 000 mailles, avec un maillage affiné près du récif. Deux images de la surface libre sont présentées sur la Figure 7, la couleur indiquant la valeur de la trace du tenseur enstrophie. La couleur rouge indique une vague

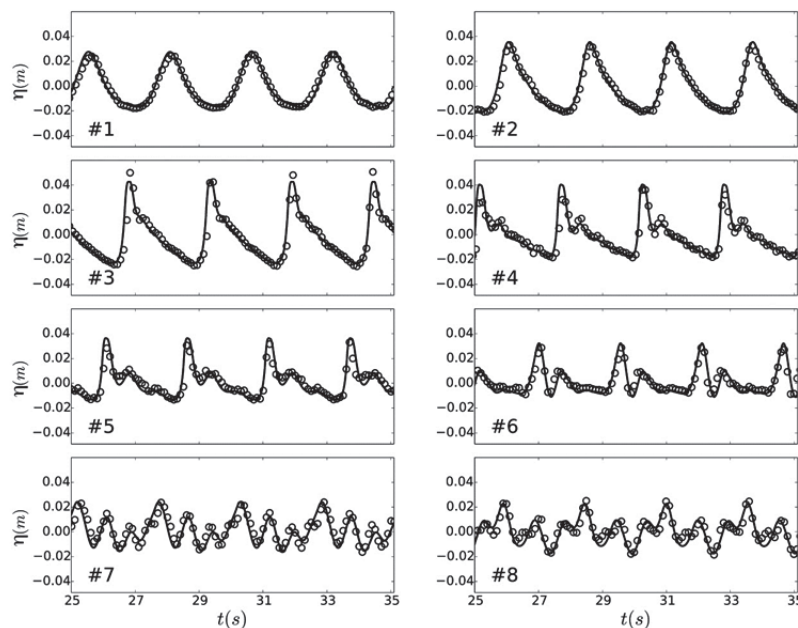


Figure 5. Variation de l'élévation des vagues à chaque jauge. Courbe : résultats numériques ; cercles: résultats expérimentaux de Beji & Battjes [3].

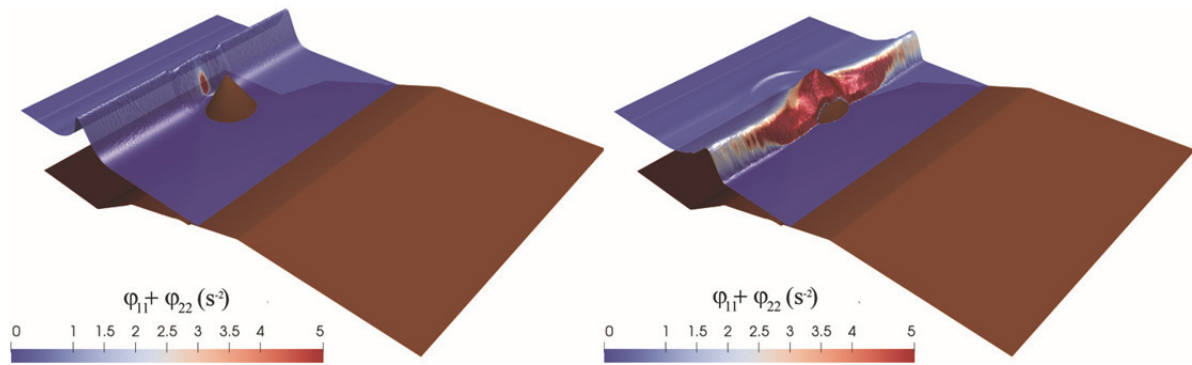


Figure 7. Images de la surface libre pour la simulation des expériences de Swigler [35].

déferlante. La vague déferle en arrivant sur le récif (Figure 7 à gauche), submerge celui-ci, puis le déferlement se propage latéralement (Figure 7 à droite) jusqu'à former un rouleau déferlant sur toute la largeur du bassin. Le modèle capture ensuite le jet de rive, où le déferlement disparaît puis le jet de retour où il réapparaît en formant un ressaut hydraulique au début de la zone de jet de rive. La comparaison des valeurs de profondeur et de vitesse calculées est en bon accord avec les mesures expérimentales sur toutes les jauges [25].

La simulation numérique des expériences de Ting & Kirby [37] permet d'étudier l'évolution de l'énergie turbulente pour deux types de déferlement, le déferlement glissant et le déferlement plongeant. Un train d'ondes cnoïdales est envoyé sur une plage de pente constante égale à 1/35. La profondeur au repos avant le début du plan incliné est de 0,4 m. Dans le cas du déferlement glissant, la période du train de vagues est de 2 s et la hauteur des vagues dans la partie du canal de profondeur constante est de 12,5 cm. Dans le cas du déferlement plongeant, la période est de 5 s et la hauteur des vagues de 12,8 cm.

La variation temporelle de l'énergie turbulente du modèle  $h^2\varphi/2$  (qui comprend aussi la variation sur la profondeur de la vitesse moyenne) adimensionnée par  $gh$  est tracée sur la Figure 6 avec le graphe de la vitesse moyenne, pour une certaine abscisse dans la zone de déferlement. La vitesse moyenne est positive sous les crêtes des vagues mais négative ailleurs en raison du courant de retour.

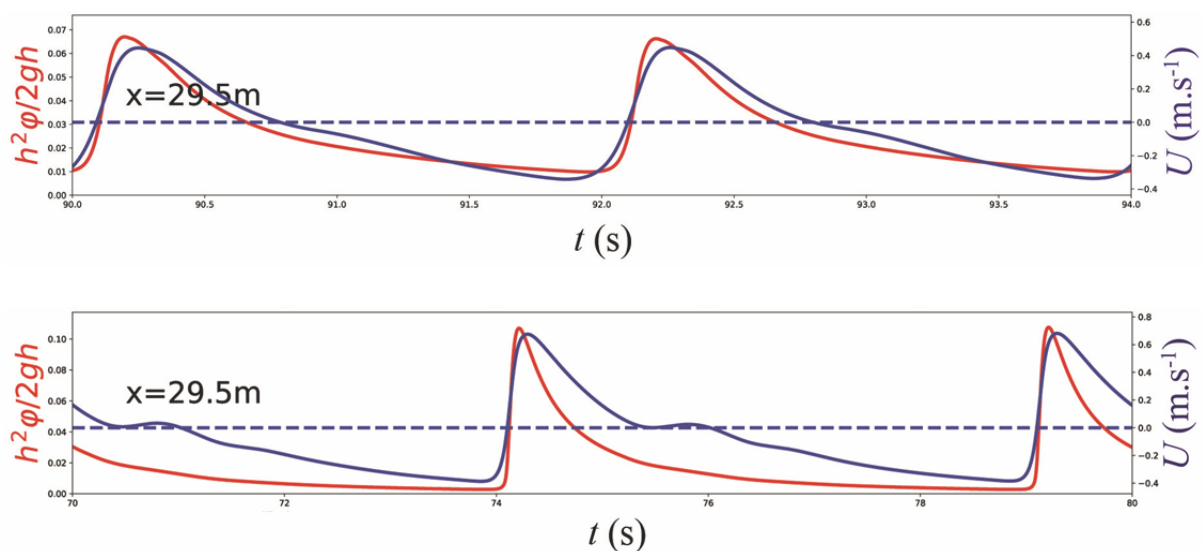


Figure 6. Simulation numérique des expériences de Ting & Kirby [37]. Énergie turbulente adimensionnée (rouge) et vitesse moyenne (bleu) dans le cas d'un déferlement glissant (haut) et d'un déferlement plongeant (bas).

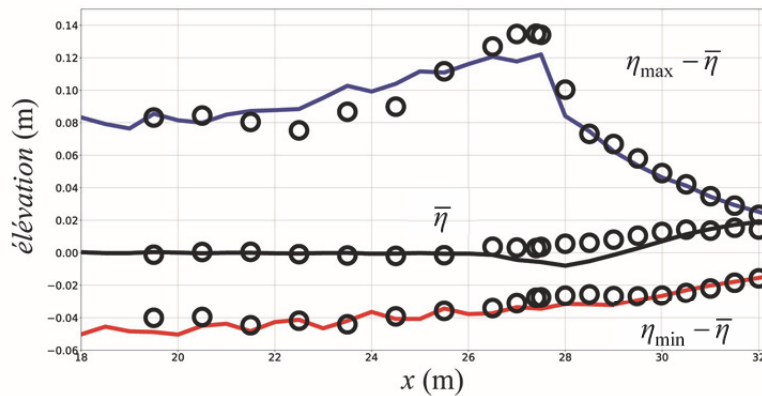


Figure 8. Niveau d'eau moyen (noir), élévation maximale moyenne (bleu) et élévation minimale moyenne (rouge) relativement au niveau d'eau moyen et comparaison avec les mesures expérimentales de Ting & Kirby [37] (cercles) pour un déferlement glissant.

Dans le cas d'un déferlement glissant, il subsiste une énergie turbulente importante aux creux des vagues, lorsque la vague suivante arrive. En raison du courant de retour, il existe donc un transport important d'énergie turbulente vers le large. La Figure 6 montre que, dans toute la partie de la vague où la vitesse moyenne est négative, l'énergie turbulente conserve des valeurs importantes.

Pour un déferlement plongeant au contraire, l'énergie turbulente est négligeable aux creux des vagues. L'énergie turbulente est forte au niveau des crêtes mais la période des vagues est assez grande pour que toute cette énergie ait le temps d'être dissipée avant que la vague suivante arrive. Lorsque la vitesse moyenne est négative, il n'y a quasiment plus d'énergie turbulente, ce qui implique que le transport d'énergie turbulente est dirigé vers la plage.

Ces résultats sont conformes aux conclusions de Ting & Kirby [37]. Quantitativement, l'énergie turbulente du modèle n'est pas directement comparable aux mesures d'énergie turbulente de Ting & Kirby [37, 38, 39] pour deux raisons : d'abord, l'énergie turbulente du modèle est une grandeur moyenne sur la profondeur alors que les mesures expérimentales sont données à une certaine profondeur. Il manque notamment les mesures près de la surface libre où l'énergie turbulente a tendance à être la plus intense. Ensuite, l'énergie turbulente du modèle inclut une composante due aux variations dans la profondeur de la vitesse moyenne (au sens de Reynolds). Cependant, l'allure des graphes obtenus par les simulations numériques est comparable à celle des graphes expérimentaux de l'énergie turbulente notamment en ce qui concerne les taux de variation.

L'élévation maximale moyenne (crêtes) et l'élévation minimale moyenne (creux) le long du canal dans le cas d'un déferlement glissant est tracé sur la Figure 8 relativement au niveau d'eau moyen, qui est mesuré par l'élévation moyenne  $\bar{\eta}$  par rapport au niveau d'eau au repos. Les résultats numériques sont comparés aux mesures expérimentales de Ting & Kirby [37]. On constate un bon accord global avec l'expérience. L'élévation maximale au niveau du point de déferlement est un peu plus petite que pour les mesures. Cet effet est dû aux propriétés faiblement dispersives des équations de Serre-Green-Naghdi, qui produisent des solitons et des ondes cnoïdales moins hautes et moins pointues que dans la réalité. Le niveau d'eau moyen calculé fait apparaître un phénomène de décôte au niveau du point de déferlement, qui n'a pas été mesuré par Ting & Kirby [37] mais qui a été mis en évidence par plusieurs travaux expérimentaux, notamment Bowen *et al.* [6], et qui est causé par les effets dispersifs dans la zone de levée. La simulation numérique capture le phénomène de surcôte dans la zone de

déferlement, c'est-à-dire l'augmentation du niveau moyen concomitant à la diminution de l'amplitude des vagues résultant de la dissipation d'énergie.

## 5 Conclusion

Nous avons dérivé un nouveau modèle pour les vagues côtières dans les zones de levée, de déferlement et de jet de rive, basé sur les équations de simulation des grandes échelles de la turbulence moyennées sur la profondeur. Les propriétés dispersives sont identiques à celles des équations de Serre-Green-Naghdi et peuvent être améliorées par les mêmes techniques, notamment en écrivant un modèle asymptotiquement équivalent selon la méthode de Bonneton *et al.* [4]. La turbulence de grande échelle est résolue et prise en compte, en même temps que les variations dans la profondeur de la vitesse moyenne au sens de Reynolds, dans un tenseur anisotrope d'énstrophie. La turbulence de petite échelle est modélisée par une hypothèse de viscosité turbulente. Les équations du tenseur énstrophie sont de simples équations de transport avec termes sources, sans termes dispersifs, dont le coût numérique est faible. La difficulté numérique principale vient du traitement des effets dispersifs. Les schémas numériques adaptés aux équations de Serre-Green-Naghdi sont adaptables à ce système, en particulier la méthode à diagonale constante de Lannes & Marche [17] et le schéma de type Galerkin Discontinu de Duran & Marche [10]. Le modèle est validé par comparaison avec les résultats de plusieurs expériences, dans les cas 1D et 2D. Le recours à un critère de début de déferlement n'est nécessaire que pour les vagues fortement non linéaires. Il n'y a jamais lieu d'introduire un critère de fin de déferlement. Ce modèle permet de capturer davantage d'effets physiques liés à la turbulence de grande échelle sans accroître significativement la complexité de la résolution numérique.

## Références

- [1] M. Antuono, M. Brocchini, Beyond Boussinesq-type equations: semi-integrated models for coastal dynamics. *Phys. Fluids* 25 (2013) 016603.
- [2] A. J. C. Barré de Saint-Venant, Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *C. R. Acad. Sci. Paris* 73 (1871) 147–154.
- [3] S. Beji, J. A. Battjes, Experimental investigations of wave propagation over a bar. *Coast. Engng* 19 (1993) 151–162.
- [4] P. Bonneton, F. Chazel, D. Lannes, F. Marche, M. Tissier, A splitting approach for the fully nonlinear and weakly dispersive Green–Naghdi model. *J. Comput. Phys.* 230 (2011) 1479–1498.
- [5] J. Boussinesq, Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math Pures et Appl. Deuxième Série* 17 (1872) 55–108.
- [6] A. J. Bowen, D. L., Inman, V. P. Simmons, Wave 'set-down' and set-up. *Journal of Geophysical Research*, 73 (1968) 2569-2577.
- [7] A. Castro, D. Lannes, Fully nonlinear long-waves models in presence of vorticity. *J. Fluid Mech.* 75 (2014) 642–675.
- [8] F. Chazel, D. Lannes, F. Marche, Numerical simulation of strongly nonlinear and dispersive waves using a Green–Naghdi model. *J. Sci. Comput.* 48 (2011) 105–116.

- [9] D. Cox, N. Kobayashi, A. Okayasu, Experimental and numerical modeling of surf zone hydrodynamics. Tech. Rep. No. CACR-95-07 (1995) Center for applied coastal research, University of Delaware, Newark.
- [10] A. Duran, F. Marche, A discontinuous Galerkin method for a new class of Green–Naghdi equations on simplicial unstructured meshes. *Appl. Math. Model.* 45 (2017) 840–864.
- [11] A. E. Green, P. M. Naghdi, A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *J. Fluid Mech.* 78 (1976) 237–246.
- [12] C. Higgins, M. B. Parlange, C. Meneveau, Energy dissipation in large-eddy simulation: dependence on flow structure and effects of eigenvector alignments. In : E. Fedorovich, R. Rotunno & [B. Stevens (ed.), *Atmospheric Turbulence and Mesoscale Meteorology*, Cambridge University Press, 2004, pp. 51–69.
- [13] S. C. Hsiao, T. W. Hsu, T. C. Lin, Y. H. Chang, On the evolution and run-up of breaking solitary waves on a mild sloping beach. *Coast. Engng* 55 (2008) 975–988.
- [14] M. Kazakova, G. L. Richard, A new model of shoaling and breaking waves: onedimensional solitary wave on a mild sloping beach. *J. Fluid Mech.* 862 (2019) 552–591.
- [15] M. Kazolea, M. Ricchiuto, On wave breaking for Boussinesq-type models. *Ocean Model.* 123 (2018) 16–39.
- [16] A. B. Kennedy, Q. Chen, J. T. Kirby, R. A. Dalrymple, Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup. I. 1D. *J. Waterways Port Coast.* 126 (2000) 39–47.
- [17] D. Lannes, F. Marche, A new class of fully nonlinear and weakly dispersive Green–Naghdi models for efficient 2D simulations. *J. Comput. Phys.* 282 (2015) 238–268.
- [18] O. Le Métayer, S. Gavriluk, S. Hank, A numerical scheme for the Green–Naghdi model. *J. Comput. Phys.* 229 (2010) 2034–2045.
- [19] D. K. Lilly, The representation of small-scale turbulence in numerical simulation experiments. In : H. H. Goldstine (ed.), *Proc. IBM Scientific Computing Symp. on Environmental Sciences*, 1967, pp. 195–210, IBM.
- [20] P. A. Madsen, O. R. Sørensen, H. A. Schäffer, Surf zone dynamics simulated by a Boussinesq-type model. Part I. Model description and cross-shore motion of regular waves. *Coast. Engng* 32 (1997) 255–287.
- [21] K. Nadaoka, H. Yagi, Shallow-water turbulence modeling and horizontal large-eddy computation of river flow. *J. Hydraul. Engng ASCE* 124 (1998) 493–500.
- [22] O. K. Nwogu, Numerical prediction of breaking waves and currents with a Boussinesq model. In : L. Billy (ed.), *Coastal Engineering 1996, Proceedings of the 25th International Conference*, 1996, vol. 25, pp. 4807–4820. ASCE.
- [23] D. H. Peregrine, Long waves on a beach. *J. Fluid Mech.* 27 (1967) 815–827.
- [24] S. B. Pope, *Turbulent Flows*, Cambridge University Press, 2000.
- [25] G. L. Richard, A. Duran, B. Fabrèges, A new model of shoaling and breaking waves. Part 2. Run-up and two-dimensional waves, *J. Fluid Mech.*, 867 (2019) 146-194.
- [26] G. L. Richard, S. L. Gavriluk, A new model of roll waves: comparison with Brock’s experiments. *J. Fluid Mech.* 698 (2012) 374–405.
- [27] G. L. Richard, S. L. Gavriluk, The classical hydraulic jump in a model of shear shallow-water flows. *J. Fluid Mech.* 725 (2013) 492–521.
- [28] L. F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, 1922.
- [29] J. C. Rotta, Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. *Z. Phys.* 129 (1951) 547–572.
- [30] P. Smit, M. Zijlema, G. Stelling, Depth-induced wave breaking in a non-hydrostatic, near-shore wave model. *Coast. Engng.* 76 (2011) 1-16.
- [31] F. Serre, Contribution à l’étude des écoulements permanents et variables dans les canaux (fin). *La Houille Blanche* 6 (1953) 830–872.

- [32] G. Stelling, M. Zijlema, An accurate and efficient finite-difference algorithm for nonhydrostatic free-surface flow with application to wave propagation. *Intl J. Numer. Meth. Fluids* 43 (2003) 1–23.
- [33] I. A. Svendsen, Analysis of surf-zone turbulence. *J. Geophys. Res.* 92 (1987) 5115–5124.
- [34] I. A. Svendsen, J. Veeramony, J. Bakunin, J. T. Kirby, The flow in weak turbulent hydraulic jumps. *J. Fluid Mech.* 418 (2000) 25–57.
- [35] D. T. Swigler, Laboratory study investigating the three-dimensional turbulence and kinematic properties associated with a breaking solitary wave, Thèse, Texas A&M University, 2009.
- [36] V. M. Teshukov, Gas-dynamics analogy for vortex free-boundary flows. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 48 (2007) 303–309.
- [37] F. C. K. Ting, J. T. Kirby, Observation of undertow and turbulence in a laboratory surf zone. *Coast. Engng* 24 (1994) 51–80.
- [38] F. C. K. Ting, J. T. Kirby, Dynamics of surf-zone turbulence in a strong plunging breaker. *Coast. Engng* 24 (1995) 177–204.
- [39] F. C. K. Ting, J. T. Kirby, Dynamics of surf-zone turbulence in a spilling breaker. *Coast. Engng* 27 (1996) 131–160.
- [40] M. Tissier, P. Bonneton, F. Marche, F. Chazel, D. Lannes, A new approach to handle wave breaking in fully nonlinear Boussinesq models. *Coast. Engng* 67 (2012) 54–66.
- [41] M. Tonelli, M. Petti, Simulation of wave breaking over complex bathymetries by a Boussinesq model. *J. Hydraul. Res.* 49 (2011) 473–486.
- [42] G. Wei, J. T. Kirby, S. T. Grilli, R. Subramanya, A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part I. Highly nonlinear unsteady waves. *J. Fluid Mech.* 294 (1995) 71–92.
- [43] J. A. Zelt, The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves. *Coast. Engng* 15 (1991) 205–246.
- [44] Y. Zhang, A. B. Kennedy, A. S. Donahue, J. J. Westerink, N. Panda, C. Dawson, Rotational surf zone modeling for Boussinesq–Green–Naghdi systems. *Ocean Model.* 79 (2014) 43–53.