

# Etude théorique de nouvel actionneur en utilisant l'algorithme génétique et les réseaux de neurones couplés avec la modélisation par éléments finis piézoélectriques.

**A. Jhonson Harilaza Ramihajamanana<sup>a</sup>, B. Julio Stéphan Randriatahina<sup>a</sup>,  
C. Faliniaina Rasoanoavy<sup>a</sup>**

a. ECOLE SUPERIEURE POLYTECHNIQUE D'ANTANANARIVO  
UNIVERSITE D'ANTANANARIVO  
BP 1500, Ankatso ANTANANARIVO 101, MADAGASCAR  
espa.tana@gmail.com

## Résumé :

*Au cours des dernières années, de nouveaux développements sur des actionneurs entraînés par une tension électrique ont été étudiés par des chercheurs et des ingénieurs. La difficulté de créer un potentiel magnétique dans le système intelligent a réduit le développement d'actionneur basé sur le champ magnétique. Notre but de ce travail est de réaliser un outil numérique pour extraire le champ électrique induit par la contrainte mécanique externe de la poutre monoencastré. Dans la première étape, nous avons proposé un algorithme spécifique pour l'assemblage de la matrice de rigidité de l'équation différentielle partielle définissant le couplage électromécanique, en utilisant Matlab. Une première étude de la poutre monoencastré a été fait, et la norme des champs électriques induites a également été calculée et ensuite comparée avec des extraits dans la littérature. Un bon accord des résultats obtenus est observé, ce qui nous permet de valider notre méthode. Enfin, le programme d'éléments finis développés étaient associés à des méthodes d'optimisation métaheuristique pour l'étude de la constante piézoélectrique d'un matériau artificiel. Nous avons intégré ces nouveaux paramètres et vérifier le champ électrique induit. Encore un nouvel accord de résultats constitutifs a été obtenu.*

## Abstract :

*In recent year, new development on actuator driven by electrical voltage were investigated by researcher and engineer. The difficulty of creation magnetic potential in smart system reduced the development of actuator based on magnetic field. Our aim of this work is to perform a numerical tool to extract the electrical field induced by mechanical external stress of monolayer beam. On the first stage, we have proposed specific algorithm for the stiffness matrix assembling of the partial differential equation defining the electromechanical coupling, using Matlab. A first study of monolayer beam were done, and the norm of electric field induced were also calculated and then compared with the extracted in the literature. Good agreement of the obtained results are observed, allows us to validate our method. Finally, the developed finite element program were associated with*

*metaheuristic optimization for the investigation of piezoelectric constant of artificial material. We have integrated these new parameters and verify the induced electric field. Again new agreement of constitutive results are obtained.*

**Mots clefs : Système électromécanique ; Piézoélectricité ; Modélisation par éléments finis ; Optimisation Métaheuristique ; Réseau de neurones ; Algorithme génétique ; Poutre monoencasté**

## 1 Introduction

L'essor important des besoins en systèmes électroniques et électriques au cours de ces dernières décennies a fait émerger de nouvelles contraintes pour les concepteurs de dispositifs électriques et électroniques. Les actionneurs mécaniques d'aujourd'hui doivent s'adapter aux nouveaux besoins du marché tout en présentant des performances accrues en termes de miniaturisation, de consommation. Des solutions basées sur l'utilisation des matériaux piézoélectriques, dits matériaux agiles ont explorées dans les laboratoires afin de répondre à ces nouveaux besoins. L'utilisation des matériaux piézoélectriques a montré des potentialités intéressantes en termes d'efficacité et de tenue mécanique dans le développement d'actionneur mécanique. Ainsi, nous nous sommes intéressés, dans cet article à l'élaboration d'un programme spécifique, basé sur la méthode des éléments finis, permettant de coupler des phénomènes mécaniques et électriques. La nouvelle polarisation induite sous l'effet de la contrainte mécanique peut être déduite du modèle choisit. Enfin l'association du programme avec un autre programme d'optimisation moderne (Algorithme Génétique), nous a permis d'entretenir la recherche optimale de la matrice de couplage électromécanique. Les différentes étapes et résultats obtenus seront présentés dans ce travail.

## 2 METHODOLOGIE

### 2.1 Etude théorique

Partant d'une approche énergétique, et après quelques transformations mathématiques, l'équation de la piézoélectricité prend forme sous les expressions tensorielles suivantes :

$$\begin{aligned} C_{ijkl}S_{kl,j} + e_{kij}\phi_{,ij} &= 0 \\ e_{ikl}S_{kl,i} + \epsilon_{ik}\phi_{,ik} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

où  $S$  et  $\phi$  correspondent respectivement à la déformation, le champ électrique.  $C$  est la constante élastique,  $e$  la constante piézoélectrique et  $\epsilon$  la matrice de permittivité.

Pour la formulation en élément fini de (1), une deuxième transformation mathématique a été conduite et on a les équations suivantes :

$$\begin{aligned} [C] \frac{\partial^2 [N_u]}{\partial x_i^2} \{u\} + [e] \frac{\partial^2 [N_\phi]}{\partial x_i^2} \{\phi\} &= R_u \\ [e] \frac{\partial^2 [N_u]}{\partial x_i^2} \{u\} - [\epsilon] \frac{\partial^2 [N_\phi]}{\partial x_i^2} \{\phi\} &= R_\phi \end{aligned} \quad (2)$$

où  $N$  représentent les fonctions de formes.

Par la suite, afin de simplifier cette expression, nous avons utilisé la formule de Green Gauss, pour réduire l'ordre supérieure de la dérivée en ordre 1. Nous avons alors le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 & \int_S \left( \frac{\partial [N_u]^T}{\partial x_i} [C] \frac{\partial [N_u]}{\partial x_i} \{u\} + \frac{\partial [N_u]^T}{\partial x_i} [e] \frac{\partial [N_\phi]}{\partial x_i} \{\phi\} \right) dS \\
 & \quad = \int_L \left( [N_u]^T [C] \frac{\partial [N_u]}{\partial x_i} \{u\} + [N_u]^T [e] \frac{\partial [N_\phi]}{\partial x_i} \{\phi\} \right) dL \\
 & \int_S \left( \frac{\partial [N_\phi]^T}{\partial x_i} [e] \frac{\partial [N_u]}{\partial x_i} \{u\} - \frac{\partial [N_\phi]^T}{\partial x_i} [\epsilon] \frac{\partial [N_\phi]}{\partial x_i} \{\phi\} \right) dS \\
 & \quad = \int_L \left( [N_\phi]^T [e] \frac{\partial [N_u]}{\partial x_i} \{u\} - [N_\phi]^T [\epsilon] \frac{\partial [N_\phi]}{\partial x_i} \{\phi\} \right) dL
 \end{aligned} \tag{3}$$

$\int_S$  : Intégrale surfacique

$\int_L$  : Intégrale linéaire

Dans le tableau suivant, on a premièrement les algorithmes d'assemblage des quatre matrices en bloc, à savoir la matrice d'élasticité, la matrice de couplage électromécanique et son transposé et la matrice de permittivité. Deuxièmement, nous avons l'algorithme d'assemblage du second membre, à savoir, les contraintes mécaniques extérieures et les potentielles imposées.

**Tableau 1** Bloc d'enchaînement d'un programme en éléments finis

Lecture, vérification, organisation des données
Lire et imprimer
- Les coordonnées des nœuds
- Les connectivités des éléments
- Les paramètres physiques
- Les sollicitations
- Les conditions aux limites
Construction de la matrice et du vecteur globaux $[K]$ et $\{F\}$ ,
Pour chaque élément :
- extraire les informations liées à cet élément
- construire la matrice et le vecteur élémentaires $[k]$ et $\{f\}$
- assembler $[k]$ et $\{f\}$ dans $[K]$ et $\{F\}$
Résolution du système d'équations $[K]\{U\} = \{F\}$
- modifier $[K]$ et $\{F\}$ pour prendre en compte les conditions aux limites
- triangulariser $[K]$
- calculer la solution $\{U\}$ ( $\{U\}$ étant composé de $\{u\}$ et $\{\phi\}$ )
Impression des résultats
- calculer les variables additionnelles
- imprimer les résultats

L'équation finale étant :

$$\begin{aligned}
 & [K_{uu}]\{u\} + [K_{u\phi}]\{\phi\} = \{\bar{e}\} \\
 & [K_{u\phi}]^T \{u\} - [K_{\phi\phi}]\{\phi\} = \{\bar{d}\}
 \end{aligned} \tag{4}$$

où

$$[K_{uu}] = \int_S ([B_u]^T [C] [B_u]) dS$$

$$[K_{\phi\phi}] = \int_S ([B_\phi]^T [\epsilon] [B_\phi]) dS$$

$$[K_{u\phi}] = \int_S ([B_u]^T [e] [B_\phi]) dS$$

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ [K_{u\phi}]^T & [-K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{t}} \\ \bar{\mathbf{d}} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$[K]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (6)$$

## 2.2 Technique d'optimisation algorithme génétique couplé avec le modèle en élément finis de la piézoélectricité

Une fois le système linéaire défini précédemment construit, le champ électrique induit sous application d'une contrainte mécanique, dans le cas d'une poutre monoencasté est extrait. En parallèle, le champ de déformation peut être aussi déduit du programme ainsi développé.

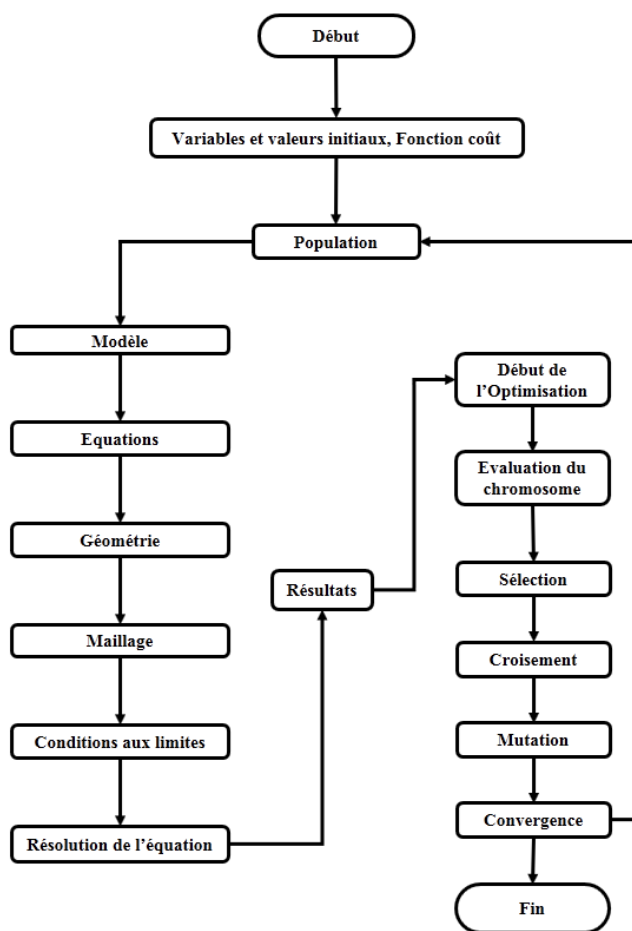
Notre idée dans la suite de notre étude est de déterminer les constantes piézoélectriques optimales pour un matériau artificiel pour des applications spécifiques (médicale, aéronautique, etc ...).

Pour ce faire, nous avons associé le programme en élément fini de la piézoélectricité avec un programme d'algorithme génétique.

Mais pour commencer voici, tout d'abord une brève introduction et la présentation de l'algorithme correspondant de l'optimisation par algorithme génétique. Globalement c'est une technique servant de méthodes analogues à la division et multiplication des chromosomes dont l'objectif final est de chercher une population meilleur. Les différentes étapes de l'optimisation par algorithme comprennent :

- une création de la population initiale juste à faire évoluer, elle peut être créée de manière aléatoire, pour avoir une grande diversité.
- une fois la population initiale créée, nous allons en sortir les individus les plus prometteurs, ceux qui vont participer à l'amélioration de notre population. Nous allons donc attribuer une note ou un indice de qualité à chacun de nos individus.
- création de nouveaux chromosomes, dont la technique consiste à générer un grand nombre d'individus (ou encore solutions) et l'algorithme les fait évoluer en trois phases : reproduction, croisement, et mutation. La procédure de sélection est basée sur une fonction d'évaluation (ou fonction objectif) qui correspond à une performance de l'individu. On en déduit une probabilité, appelée encore fitness, pour la reproduction de chaque individu.

En associant cette technique d'optimisation avec le modèle en élément finis de la piézoélectricité, nous avons dressé l'organigramme suivant. ;



*Figure 1* Procédure de l'optimisation

Dans notre simulation, nous avons considéré une poutre piézoélectrique monoencastré. Une force verticale dirigée vers le bas est appliquée à l'extrémité de la poutre. Cette dernière engendre une déformation de la poutre et induit un champ électrique dans la structure via le couplage piézoélectrique



*Figure 2* Poutre piézoélectrique monoencastré sous contrainte mécanique extérieure

### 3 RESULTATS

Dans le tableau ci-après est cité les propriétés de trois matériaux piézoélectriques issues d'un logiciel commercial dont on va prendre comme exemple.

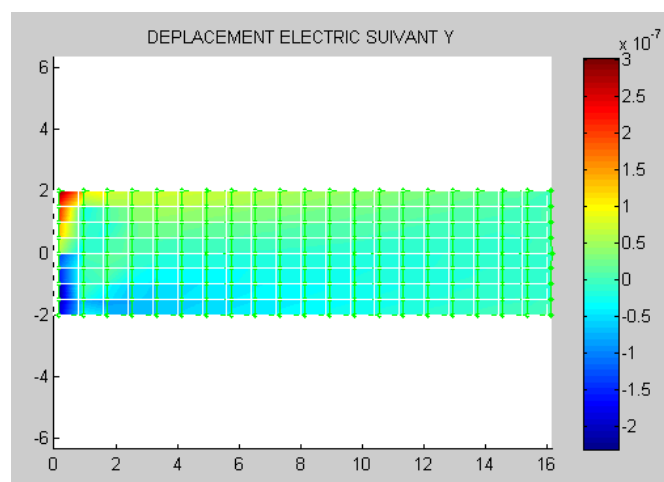
**Tableau 2** Les valeurs des propriétés de quelques matériaux piézoélectriques

	<b>Lead Zirconate Titanate (PZT-8)</b>	<b>Lithium Niobate</b>	<b>Barium Titanate</b>
Constante d'Elasticité $C^E$	{1.46876e+011[Pa], 8.1087e+010[Pa], 1.46876e+011[Pa], 8.10537e+010[Pa], 8.10537e+010[Pa], 1.31712e+011[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 3.1348e+010[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 3.1348e+010[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 3.28947e+010[Pa]}	{2.02897e+011[Pa], 5.29177e+010[Pa], 2.02897e+011[Pa], 7.49098e+010[Pa], 7.49098e+010[Pa], 2.43075e+011[Pa], 8.99874e+009[Pa], - 8.99874e+009[Pa], 0[Pa], 5.99034e+010[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 5.99018e+010[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 8.98526e+009[Pa], 7.48772e+010[Pa]}	{2.75121e+011[Pa], 1.78967e+011[Pa], 2.75121e+011[Pa], 1.51555e+011[Pa], 1.51555e+011[Pa], 1.6486e+011[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 5.43478e+010[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 5.43478e+010[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 0[Pa], 1.13122e+011[Pa]}
Coefficient piézoélectrique $e^S$	{0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], - 3.87538[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], - 3.87538[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 13.9108[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 10.3448[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 10.3448[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ]} 0[C/m <sup>2</sup> ]	{0[C/m <sup>2</sup> ], - 2.53764[C/m <sup>2</sup> ], 0.193644[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 2.53764[C/m <sup>2</sup> ], 0.193644[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 1.30863[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 3.69548[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 3.69594[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], - 2.53384[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ]} 0[C/m <sup>2</sup> ]	{0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], - 2.69289[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], - 2.69289[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 3.65468[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 21.3043[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 21.3043[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ], 0[C/m <sup>2</sup> ]} 0[C/m <sup>2</sup> ]
Permittivité Relative $\epsilon_r^S$	{904.4, 904.4, 561.6}	{43.6, 43.6, 29.16}	{1976.8, 1976.8, 111.7}

Dans un premier temps, nous avons lancé quelques simulations sur ces trois matériaux piézoélectrique sous forme de poutre monoencastré (à l'extrémité gauche). Les résultats suivants représentent les moyennes des champs électriques induits et des champs de déformations calculées par le programme développé en éléments finis.

**Tableau 3** Résultat de programme en éléments finis

Type de calcul	Variables calculés	Lead Zirconate Titanate PZT-8	Lithium Niobate	Barium Titanate
FEM (programme spécifique)	Moyenne de champ de déformation	-3.3890e-006 m	-1.1168e-006 m	-7.5352e-7 m
	Moyenne de champ électrique induit	2.0363e-008 V/m	2.4220e-007 V/m	3.5276e-9 V/m
Logiciel commercial	Moyenne de champ de déformation	-3.5770e-006 m	-1.0926e-006 m	-8.3110e-006 m
	Moyenne de champ électrique induit	2.5145e-008 V/m	3.6109e-008 V/m	3.1845e-008 V/m

**Figure 3** Déplacement électrique pour le Lithium Niobate

Ces valeurs sont en bonne cohérence avec celles calculées par des logiciels commerciaux en éléments finis, permettant de valider partiellement notre programme développé.

Les différences entre les valeurs calculées issues des deux méthodes restent aux alentours de 10%.

Nous pouvons par la suite utiliser la forte potentialité de ce programme via l'association de ce dernier avec un programme d'optimisation. Ici les variables sont les constantes piézoélectriques, et l'organigramme correspondant est présenté par la figure 1. Le critère de test est défini par la valeur moyenne maximale du champ électrique induit calculé par le programme en éléments finis.

La structure en poutre monoencasté est toujours retenue, ceci afin de répondre les critères sur l'aspect expérimental, dans une proche perspective.

Le tableau suivant regroupe les valeurs obtenues à la fin de la simulation. Notons tout de même qu'une vérification avec un logiciel commercial, des champs électriques et de déformation obtenue après optimisation a été entretenue.

**Tableau 4** Résultats obtenus après l'optimisation

	Valeurs issu du programme d'optimisation	Vérification et comparaison des valeurs avec du logiciel commercial
Coefficient piézoélectrique (Paramètre 1) $e_{13}^S$	<b>-13.7451</b>	-13.7451
Coefficient piézoélectrique (Paramètre 2) $e_{33}^S$	<b>10.8535</b>	10.8535
Moyenne de la Déformation	<b>-1.1168e-006 m</b>	<b>-1.3228e-006 m</b>
Moyenne du Champ électrique induit	<b>0.00012482 V/m</b>	<b>0.00009756 V/m</b>

Après vérification des valeurs calculées issues des deux méthodes, nous avons constaté une différence de 10% à 20% environ. Ceci est expliqué par la qualité de maillage.

## 4 CONCLUSION

Afin d'ajouter une pierre à l'édifice qu'est la résolution de la problématique liée au développement d'actionneur mécanique sous commande électrique, nous avons présenté ici un modèle permettant de prédire le champ électrique induit d'un matériau piézoélectrique sous une contrainte mécanique extérieure. L'originalité de notre étude réside aussi sur la détermination des constantes piézoélectriques d'un matériau artificiel pour des applications bien spécifiques, via le couplage du programme en éléments finis avec l'algorithme génétique. L'établissement d'un protocole expérimental correspondant à cette étude purement théorique constitue notre perspective. Enfin une prolongation des équations de la piézoélectricité jusqu'à la prise en compte des phénomènes non-linéaires électrique et mécanique reste encore une tâche incontournable.

## Références

- [1] F. Rasoanoavy, V. Laur, R. Smaali, P. Queffelec, Modelling of Magnetolectric effect in magnetostrictive-piezoelectric multilayers using multiphysics simulator - Conference Comsol, Session AC/DC system I – France, Paris 2010
- [2] George R. Buchanan, Finite element analysis, USA, 1995, pp. 163-166
- [3] Won Young Yang, Wenwu Cao, Tae-Sang Chung, John Morris, Applied numerical methods using Matlab, 2005, pp. 338-343