Le principe fondamental de la dynamique revisité

Alexandre WATZKY

Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, MSME UMR 8208 CNRS
Université Paris-Est Créteil — Faculté des Sciences & Technologie
61 avenue du Général de Gaulle, 94010 CRÉTEIL Cedex

watzky@u-pec.fr

Résumé : *On propose de réexaminer le principe fondamental de la dynamique (PFD) de Newton en en exhibant les dessous afin d'en préciser le mode d'emploi en fonction du contexte. Celui-ci ne semble jamais explicité et passe ici par une reconstruction du PFD pour des systèmes étendus. S'appuyant sur les concepts intuitifs de masse et force et, invoquant tout l'Univers, on aboutit à sa forme habituelle dans un Monde qui ne peut être choisi arbitrairement et où le sens des différentes grandeurs se trouve précisé.*

Cette approche se révélera particulièrement féconde puisqu'en découlent d'importants résultats généralement posés a priori, et que les interrogations habituelles n'ont plus lieu d'être.

Abstract : *We revisit Newton's laws of motion by resting on the basic concepts of mass and forces, and considering the whole Universe. This work aims at clarify their "user manual" and explain it. The arising general questions disappear or are answered, and classical assumptions reduce to theorems.*

Mots-clés : Newton, principe de Mach, actions réciproques, principe d'équivalence, référentiel inertiel, indifférence matérielle.

« La Mécanique Rationnelle sera la Science du Mouvement qui résulte de forces quelconques, et des forces nécessaires pour engendrer un mouvement quelconque, précisément proposée et démontrée. »

Isaac NEWTON, 1686 [1, Préface]

Introduction

La Mécanique classique repose sur les trois axiomes (lois) du mouvement, ou *principe fondamental de la dynamique* (PFD), de NEWTON posés en tête de ses *Principia* [1] pour des *points matériels* et assortis de définitions préliminaires et de commentaires.

Au-delà de l'aspect formel sur le modèle grec ouvrant la voie à une Mécanique déductive, ils constituent une synthèse des résultats antérieurs des *« géants »* GALILÉE (chute des corps, relativité du mouvement), DESCARTES (principe d'inertie, chocs), HUYGENS (chocs, force centrifuge), qui fit que ces lois furent généralement admises à l'époque pour la mécanique "terrestre", avant d'être généralisées aux milieux continus (MMC) (les BERNOULLI, EULER, NAVIER, CAUCHY...), avec des outils *ad hoc* et un cadre mathématique que les progrès de ces dernières permettront de préciser, et dont l'aboutissement pourrait être la reformulation axiomatique de TRUESDELL et NOLL [2].

L'autre apport majeur de NEWTON fut d'unifier ces résultats avec la mécanique "céleste", en rendant ses lois compatibles avec les observations de l'autre *« géant »* qu'était KEPLER *via* sa *loi universelle de la gravitation* (LUG). Cependant, pour y parvenir, bien conscient du problème que constitue la prise en compte de l'ensemble de l'Univers, il réussit à s'en débarrasser à l'aide de son *théorème des coques* [1, L. I, Sect. 12] moyennant des hypothèses cosmologiques très fortes l'amenant à devoir *postuler* l'existence d'un *« espace absolu, sans relation aux choses externes »* [1, *Scholie* aux *Définitions*]. Ce dernier point fut immédiatement dénoncé, freinant notamment l'acceptation de la LUG, mais dès lors que les lois de NEWTON eurent fait leurs preuves, la question de son *existence*, et donc de son *essence*, est devenue principalement philosophique [3, 4]. Il n'en demeure pas moins que, puisqu'avec le théorème des coques, une rotation du reste de l'Univers serait indifférente, le recours à un repère attaché aux étoiles dites *fixes* (dans lequel étaient justement formulées les lois de KEPLER) serait une heureuse, mais surtout bien *curieuse coïncidence !* Et le recours systématique, et dès le départ, à des référentiels dits *inertiels* (qui s'en déduiraient éventuellement) ruine *de facto* toute tentative d'approche alternative.

D'autre part, le délicat concept de *force*, dont le qualificatif le plus fréquent est *« obscur »* [5], a été critiqué par de nombreux auteurs (*e.g.* [6, 4]). Et si les *forces d'inertie* seraient dues aux actions de tout l'Univers (voir entre autres [3] et [7, 8]), ce n'est qu'une *interprétation* courante et elles devraient naturellement apparaître en prenant ce dernier en compte. Cet aspect nous permettra en particulier de mettre en évidence la problématique du choix du contexte et du référentiel adapté.

Enfin, le fait de recourir à des *points matériels* (ou des *corps*, sous-entendus "inertes"), qui contient implicitement le *principe des actions réciproques*, perdurera de même. D'ALEMBERT [5] et LAPLACE [9] étaient d'ailleurs gênés sur ce point puisque jugeant nécessaire de préciser qu'*« un corps est incapable de se donner un mouvement à lui-même »*, ce qui paraît un peu "léger" s'agissant d'un *principe fondamental*... Il nous semble que l'approche classique par des *points matériels*, injustifiée *a priori* autrement que par une représentation mentale, est justement responsable de nombreuses interrogations et mauvaises solutions.

Les problèmes posés par le PFD, la plupart identifiés par NEWTON lui-même dans ses remarques très fouillées, ont déjà largement été discutés et critiqués, notamment par MACH [3], POINCARÉ [4] et TRUESDELL [2] sans que ne soient apportées de réponses totalement satisfaisantes.

Si l'application du PFD ne pose pas de problèmes en pratique puisque, en fonction du contexte, on "sait" *a priori* quelles forces prendre en compte et dans quel référentiel travailler, elle apparaît *dogmatique* dans la mesure où ces modalités sont implicites et ne reposent pas sur un "mode d'emploi" général et *explicite*. On pourra consulter les remarquables réflexions d'EULER [10] sur ces questions.

Ce travail est dans l'esprit d'une précédente communication [11], dont il conserve l'approche et le formalisme, qui contenait une grossière erreur § 3.2 (éq. (3.4) *et seq.*) et est donc dispensable, mais qui peut néanmoins être qualifiée d'heuristique puisque ce fut une étape nécessaire au présent texte sur ce sujet délicat. La discussion sur la *forme* de la *relation fondamentale de la dynamique* (RFD) reste valable, ce qui permet de se concentrer ici sur le reste, et donc de circonscrire et clarifier le propos. Le présent document se voulant autonome, on y trouvera des redites. Certaines notations ont été revues.

Nous allons voir qu'en abordant d'emblée des systèmes étendus, le recours à des points matériels se révélera *justifié* puisque le *principe des actions réciproques* se réduira à un *théorème*. Concernant l'*« espace absolu »*, notre approche intégrant tout l'Univers permettra de régler cette question et de retrouver *par construction* le *principe d'équivalence* d'EINSTEIN [12, 13], la notion de *repère inertiel* (dont il semble avoir été particulièrement difficile de s'abstraire), et expliquera l'origine des forces dites *d'inertie* en aboutissant à la forme habituelle de la RFD dans une classe de référentiels privilégiés. L'*objectivité des forces* et donc l'*indifférence matérielle* [2, 14] sera une conséquence immédiate de notre *relation constitutive*. Autant de résultats qui découleront d'une stratégie visant à éliminer du problème les inconnues inaccessibles en ne faisant que le minimum d'hypothèses nécessaires.

Ce travail, qui demandera au lecteur un effort d'abstraction par rapport aux idées reçues, ne prétend pas à l'universalité, et en particulier n'abordera pas les phénomènes électromagnétiques, mais pourrait néanmoins contribuer à asseoir la Mécanique classique sur des bases moins dogmatiques que telle qu'elle est généralement présentée et, s'il ne les rend pas caduques, devrait apporter des éléments de réponses aux interrogations induites.

0 Entrée en matière

La Physique s'intéresse au tangible et donc à des *objets matériels*, c'est-à-dire composés de *matière*. Ce que nous appelons *matière* n'est alors autre que *« ce dont une chose est faite, un corps est constitué »*.[1] Bien qu'au cœur du sujet, nous ne tenterons pas d'en dire plus, et notamment de la caractériser plus précisément, ce qui serait vain et surtout inutile ici.

[1] [*Dictionnaire de l'Académie française*, 9e édition, T. 3, Fayard, Paris, 2011]

1 Préliminaires

1.1 Système, Monde, Univers

La première chose consiste à définir l'objet auquel on s'intéresse, et par là-même le reste, ou son environnement. On appellera *système matériel* Σ une portion de l'Univers $\Sigma^\star$ définie par la *matière* qui le constitue. L'Univers est alors décomposé en le système Σ étudié et le reste $\overline{\Sigma}_\star$,[2] aussi appelé *extérieur* et tel que $\Sigma^\star = \Sigma \cup \overline{\Sigma}_\star$ (avec $\Sigma \cap \overline{\Sigma}_\star = \emptyset$), susceptibles d'interagir (fig. 1).

Cependant, outre Σ, on ne peut pratiquement que considérer une partie *finie* de l'Univers que l'on notera $\overline{\Sigma}_\circ$ (*e.g.* selon le problème, l'environnement immédiat, la Terre, Mars, le reste du système solaire...). On définit ainsi le *Monde* $\Sigma^\circ = \Sigma \cup \overline{\Sigma}_\circ$ (avec $\Sigma \cap \overline{\Sigma}_\circ = \emptyset$) qui regroupe l'ensemble des objets avec lesquels on travaille, de sorte que $\overline{\Sigma}_\star = \overline{\Sigma}_\circ \cup \overline{\Sigma}^\circ_\star$ (avec $\overline{\Sigma}_\circ \cap \overline{\Sigma}^\circ_\star = \emptyset$) où $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ représente la partie généralement ignorée (volontairement, mais dont la motivation réside dans le manque de connaissance et, comme nous le verrons, l'inaccessibilité) de l'extérieur, mais qui existe néanmoins, telle que $\Sigma^\star = \Sigma \cup \overline{\Sigma}_\circ \cup \overline{\Sigma}^\circ_\star = \Sigma^\circ \cup \overline{\Sigma}^\circ_\star$ (avec $\Sigma^\circ \cap \overline{\Sigma}^\circ_\star = \emptyset$).

Un autre point de vue, équivalent mais adapté à une classe donnée de problèmes, consiste à commencer par définir le Monde Σ° puis d'y choisir la partie Σ que l'on étudie.

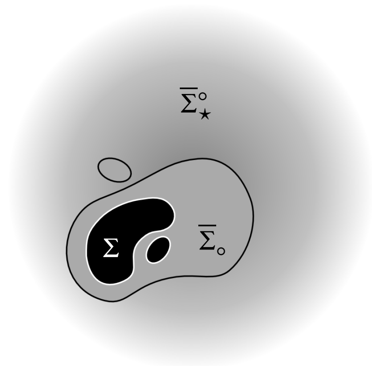

FIG. 1 – *Un système* Σ *et un Monde* $\Sigma^\circ = \Sigma \cup \overline{\Sigma}_\circ$ *dans l'Univers* $\Sigma^\star$.

L'idée directrice des raisonnements qui suivent repose sur ce découpage de l'Univers $\Sigma^\star \supsetneqq \Sigma^\circ \supset \Sigma$ et la mise en évidence, dans un Monde Σ°, des contributions et des effets sur un système Σ des interactions avec lui-même, le reste du Monde $\overline{\Sigma}_\circ$, et le reste de l'Univers $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ ($\neq \emptyset$). L'objectif sera de voir *comment* on pourra se dispenser de ces dernières, *a priori* inaccessibles (voir aussi [2, p. 64]).

1.2 Espace, temps, référentiel

La description d'un système matériel passe par sa représentation dans un espace physique. On se place alors, comme il est fait habituellement, dans un espace affine euclidien tridimensionnel $\mathcal{E}^3$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}$ d'origine O, et l'on se dote d'une chronologie $\mathcal{I}$. Un événement est alors associé à une position et une date dans un référentiel $\mathscr{R}$ de $\mathcal{E}^3 \times \mathcal{I}$ donné, où $\mathcal{I}$ est supposée *partagée par tous les référentiels.* (Voir [2].)

Les vecteurs seront implicitement définis dans un espace vectoriel associé à $\mathcal{E}^3$ selon le référentiel $\mathscr{R}$, et donc relatifs à un espace assimilable à un solide rigide.

2 Liminaires

Tout système matériel Σ est défini par la matière qui le constitue et est susceptible d'interagir avec l'ensemble $\Sigma^\star$ de l'Univers. Commençons par envisager les ingrédients *a priori* nécessaires, en ne précisant que le *minimum*, posé comme axiomes,[3] sans préjuger de la suite.

2.1 Masse

Axiome 1 : *Existence de la masse* — *On suppose que pour tout système matériel* Σ*, il existe une mesure scalaire strictement positive de sa quantité de matière.* Celle-ci sera notée m et appelée *masse.* Elle est

[2] Les barres identifient *des* extérieurs (complémentaires) où l'indice bas précise dans quelle partie de l'Univers.

[3] Naturellement, il y a des axiomes sous-jacents relatifs au cadre mathématique de validité et nécessaires pour une formulation complète auto-consistante. Nous renvoyons pour celà le lecteur à TRUESDELL et NOLL [2] qui définissent précisément le contexte dans lequel nous nous plaçons.

extensive [4] par construction :

$$m(t) = \int_{\Sigma(t)} \mathrm{d}m \tag{2.1}$$

Corollaire 1.1 : *Densité massique* — Le caractère scalaire de la masse permet, pour toute grandeur extensive A (de nature tensorielle quelconque), d'en définir une *densité massique* a telle que

$$A(t) = \int_{\Sigma(t)} a(t)\,\mathrm{d}m \tag{2.2a}$$

Système fermé — On appelle système *fermé* un système n'échangeant pas de matière avec l'extérieur. Par définition, sa masse est donc *constante*. On a alors la propriété

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma} a(t)\,\mathrm{d}m = \int_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}m \tag{2.2b}$$

En particulier, le Monde Σ° et le système Σ (donc aussi $\overline{\Sigma}_\circ$) seront considérés fermés.

Particule matérielle — On appelle *particule matérielle* (au sens de la MMC) une portion élémentaire de l'Univers située en M et constituée d'une quantité de matière de masse dm (*constante*).[5]

Corollaire 1.2 : *Centre de masse* — On peut alors toujours associer à n'importe quel système matériel Σ un point *géométrique* G, *intrinsèque* à Σ, tel qu'à tout instant et dans n'importe quel référentiel $\mathscr{R}$ d'origine O :[6]

$$\int_{\Sigma} \overrightarrow{GM}\,\mathrm{d}m = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_{\Sigma} \overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}m = m\,\overrightarrow{OG} \tag{2.3}$$

Il découle immédiatement de la seconde forme que pour tout système fermé :

$$\frac{\mathrm{d}^{(n)}}{\mathrm{d}t^{(n)}}\int_{\Sigma} \overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}m = m\,\frac{\mathrm{d}^{(n)}}{\mathrm{d}t^{(n)}}\,\overrightarrow{OG} \qquad (n \in \mathbb{N}) \qquad \forall \mathscr{R} \tag{2.4}$$

ce qui, si l'on ne s'intéresse qu'à la translation (donc ni à la déformation, ni à l'orientation) d'un système Σ, justifie *d'un point de vue purement cinématique* le recours à des systèmes assimilables à des *points matériels*, de masse m et géométriquement réduits à leur centre de masse G.

Remarque — On notera que la définition du centre de masse (2.3) fait implicitement référence à la répartition *actuelle*, donc *instantanée*, de la masse.

Référentiel barycentrique — Une fois admise l'existence de G pour tout système matériel, on peut attacher au centre de masse $G_\circ$ d'un Monde Σ° *fini* un référentiel $\mathscr{R}_\circ$ en *translation* par rapport à $\mathscr{R}$ et dont il serait l'origine.

2.2 Forces

Définition — On appellera *force* l'"action" mécanique d'une partie matérielle de l'Univers sur une autre dont elle est susceptible de *modifier la cinématique*. Il s'agit donc de sa manifestation *actuelle*.

Au-delà de son caractère intuitif, le concept de force a été critiqué par de nombreux auteurs (*e.g.* [6, 5, 4]) puisque sa mesure ne s'appuiera (*cf.* section 3 *infra*) que sur la masse et la cinématique.[7] Cependant aucun n'a réussi à éradiquer les forces de la Mécanique, et la meilleure solution consiste

[4] Sa valeur pour le système est égale à la somme de ses valeurs pour tout sous-système d'une partition dénombrable quelconque de Σ. On se gardera donc de travailler sur l'ensemble de l'Univers, possiblement infini, puisqu'on n'a alors aucune garantie qu'une telle intégrale y soit définie.

[5] Pour ne pas alourdir les notations, nous confondrons les éléments de matière avec leur position actuelle M.

[6] À ce stade, ne sachant pas mesurer la masse, on ne sait pas où est G. Il nous suffit de savoir que ce point existe. Naturellement, le recours au centre de masse suppose un système de taille *finie* (géométrie et quantité de matière).

[7] Réciproquement, le concept de masse n'est pas plus clair [3, 4] (*cf.* section 3 *infra*), surtout dans le cadre de systèmes assimilables à des points matériels, où c'est encore la cinématique qui prime.

sans doute à ne les considérer que comme la traduction mathématique de la manifestation observable des interactions matérielles.[8]

L'ensemble des actions qu'une particule matérielle subit du reste de l'Univers résulte du cumul des actions de toutes les autres particules de l'Univers, et il semble légitime de considérer ces actions *indépendantes*, *additives* et *orientées*, et donc de les représenter par des *vecteurs liés* qui s'appliqueraient sur la particule considérée. On admettrait ainsi le *parallélogramme des forces* [1, Cor. I] [3, p 193].

Axiome 2 : ***Force*** — *On postule qu'il existe un* vecteur *appelé* force *traduisant l'action mécanique* actuelle *sur toute particule matérielle M de toute autre particule P de l'Univers.*

S'agissant d'interactions matérielles entre particules, *les forces sont supposées indépendantes les unes des autres.*

Notations — Notant $\mathrm{d}\vec{F}$ la force agissant sur une particule matérielle M (de masse $\mathrm{d}m$) et Π une portion de l'Univers, on définit les *résultantes* :[9]

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\Pi\to M} = \int_\Pi \mathrm{d}\vec{F}_{P\in\Pi\to M} \quad \forall\, \Pi,\, M \qquad \text{et} \qquad \vec{F}_{\Pi\to\Sigma} = \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\Pi\to M\in\Sigma} \quad \forall\, \Pi,\, \Sigma \tag{2.5}$$

et il convient dès à présent d'envisager divers découpages s'appuyant sur celui de l'Univers (§ 1.1).

Les constituants de Σ pouvant interagir entre eux, on notera $\vec{F}_{\Sigma\leftrightarrow\Sigma}$ la résultante de ces forces dites *intérieures*, et $\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\star\to\Sigma}$ la résultante des actions mécaniques du reste de l'Univers sur Σ, appelées *forces extérieures*, de sorte que la totalité des forces auxquelles est soumis un système Σ peut s'écrire

$$\vec{F}_{\Sigma^\star\to\Sigma} = \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\star\to\Sigma} + \vec{F}_{\Sigma\leftrightarrow\Sigma} \qquad \text{avec} \qquad \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\star\to\Sigma} = \vec{F}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to\Sigma} + \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma} \tag{2.6}$$

L'objectif est d'éliminer la contribution $\vec{F}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to\Sigma}$, supposée *finie*, et dont on ne sait *a priori* rien.

3 Relation constitutive

Si les forces seraient des actions mécaniques, on n'en sait pas plus sur elles et cette seule définition reste creuse. Il nous faut donc une loi permettant de les mesurer par leur *manifestation observable*, c'est-à-dire une modification de la cinématique.

Postulat 3[10] : ***Relation fondamentale de la dynamique*** — *Pour tout système matériel Σ fermé, de masse m et centre de masse G, on a :*[11]

$$\vec{F}_{\Sigma^\star\to\Sigma/\mathscr{R}} = \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma^\star\to M/\mathscr{R}} = \int_\Sigma\int_{\Sigma^\star} \mathrm{d}\vec{F}_{P\in\Sigma^\star\to M/\mathscr{R}} = \int_\Sigma \vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}}\,\mathrm{d}m = m\,\vec{\Gamma}_{G/\mathscr{R}} \qquad \forall\mathscr{R} \tag{3}$$

avec (2.4) et (2.5), et où $\vec{\Gamma}$ désigne l'accélération.[12]

Puisque cette dernière dépend du référentiel, les forces en dépendent *a priori* aussi.

Ce postulat diffère fondamentalement des axiomes **I1** et **I2** de TRUESDELL [2], qui correspondent aux deux premières lois de NEWTON [1], puisque énoncé ici dans un référentiel quelconque et intégrant les interactions avec tout l'Univers, dont l'importance *a priori* a déjà été soulignée [3, 4]. En particulier, le *principe d'inertie* pose d'emblée l'*existence* d'une classe de référentiels privilégiés dans laquelle le

[8] *« Si par le mot de forces nous n'entendons que les effets »* [6, p. 30], ce qui revient à une *définition* non phénoménologique des forces. Cependant, *« je dois avertir que pour éviter les circonlocutions, je me suis souvent servi du terme obscur de force »* [6, p. xxv].

[9] Ces raccourcis de notations visent à la simplicité, et les appartenances seront omises lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté.

[10] Inexploitable en l'état, il sera reformulé en axiome 3, utilisable pratiquement (voir aussi section 6 à la fin).

[11] Le choix de la vitesse comme la grandeur cinématique modifiée par les forces a été discuté en [11] et reste valable.

[12] On remarquera que, comme d'habitude, cette *relation constitutive* définirait donc *simultanément* une *force* $\vec{F}$ comme la grandeur mécanique modifiant, dans un référentiel $\mathscr{R}$ donné, le mouvement d'une quantité de matière *mesurée par sa masse m*. Ainsi, pour une variation observée de la cinématique, la connaissance de l'une donnera accès à l'autre. Or, les masses n'apparaissent que dans des rapports entre elles [3, 4] et, comme pour les longueurs et le temps, nécessitent donc un étalon (*arbitraire*) permettant ensuite de définir un système d'unités.

centre de masse d'un système *isolé* (sans interactions avec l'extérieur) aurait un *mouvement rectiligne uniforme*. Si l'extérieur pouvait ainsi être évacué, comment définir alors un tel mouvement (dans quoi ? *cf.* (4.3) *infra*) qui repose sur des échelles de longueur et de temps ?

Avec notre formulation, pour des interactions nulles avec le reste $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ de l'Univers, telles qu'imaginées par NEWTON avec son *théorème des coques* [1, L. I, Sect. 12], *plus rien ne serait défini* (ou *mesurable*) et la référence aux étoiles dites "fixes" disparaîtrait.

Comment expliquer alors son expérience de pensée où la rotation de deux boules reliées par un fil pourrait être mise en évidence par la mesure de la tension dans ce dernier [1, L. 1, *Scholie* aux *Définitions*] autrement que par l'existence d'un *référentiel absolu* ? MACH [3] se demandera si un astronaute pourrait ressentir ou non une *"force centrifuge"* dans un *Univers vide*, pour conclure que seule l'influence du reste de l'Univers dont on ne peut s'abstraire pourrait expliquer une telle force, ce qu'EINSTEIN [13] qualifiera de *principe* en 1918.

Dans le même esprit, ces considérations renvoient à la question historique de la rotation de la Terre, et de son aplatissement si celle-ci était "fixe" et la voûte céleste "tournait" (voir section 7).

4 Où l'on se débarrasse *partiellement* du reste de l'Univers

Revenons à notre découpage de l'Univers (§ 1.1), et celui (2.6) des forces correspondant, pour un Monde Σ° fini, de masse $m_\circ$ et centre de masse $G_\circ$.

Concernant les manifestations cinématiques des forces, partant d'un quelconque référentiel $\mathscr{R}$ d'origine O, on pourra toujours en déduire l'accélération dans tout autre référentiel $\mathscr{R}'$ d'origine O' et rotation instantanée $\vec{\Omega}_{\mathscr{R}'/\mathscr{R}}$ par les relations de composition des mouvements.

4.1 Contribution du reste de l'Univers à la translation du Monde

Considérons le référentiel barycentrique $\mathscr{R}_\circ$ en *translation* par rapport à $\mathscr{R}$ d'*origine O indéterminée et orientation quelconque*, donc *sans lien avec un Monde* Σ°, la composition des accélérations se réduit à :

$$\vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}} = \vec{\Gamma}_{G_\circ/\mathscr{R}} + \vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}_\circ} \quad \text{où} \quad \vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}} = \frac{\mathrm{d}^2_{\mathscr{R}}}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{OM} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}_\circ} = \frac{\mathrm{d}^2_{\mathscr{R}_\circ}}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{OM} \tag{4.1}$$

de sorte que tout mouvement dans $\mathscr{R}$ pourra être décomposé comme la somme de celui du centre de masse $G_\circ$ du Monde dans $\mathscr{R}$ et du mouvement relatif par rapport à $G_\circ$ dans $\mathscr{R}_\circ$ en translation.

Appliquons maintenant la relation constitutive (3) à un système $\Sigma \subset \Sigma^\circ$ avec le découpage (2.6) :

$$\int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star \to M/\mathscr{R}} + \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma^\circ \to M/\mathscr{R}} = \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma^\star \to M/\mathscr{R}} = \int_\Sigma \vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}}\,\mathrm{d}m = m\,\vec{\Gamma}_{G_\circ/\mathscr{R}} + \int_\Sigma \vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}_\circ}\,\mathrm{d}m \tag{4.2}$$

4.1.1 Théorèmes des actions réciproques

Les forces étant indépendantes et, avec (4.1), la translation d'ensemble à discrétion se répercutant à l'identique sur toutes les particules du Monde, il apparaît que quelles que soient les interactions *dans* Σ°, ces dernières ne participent pas à l'accélération de son centre de masse dans un quelconque référentiel $\mathscr{R}$. Autrement dit :[13]

$$\vec{F}_{\Sigma^\circ \leftrightarrow \Sigma^\circ/\mathscr{R}} = \vec{F}_{\Sigma^\circ \leftrightarrow \Sigma^\circ/\mathscr{R}_\circ} = m_\circ\,\vec{\Gamma}_{G_\circ/\mathscr{R}_\circ} = \vec{0} \qquad \forall \mathscr{R} \tag{4.3}$$

Puisque à ce stade, le Monde peut être choisi n'importe comment, et en particulier se réduire au système Σ, et rappelant que $\mathscr{R}$ est déconnecté du Monde, on peut alors énoncer :

Théorème 1 : *La résultante $\vec{F}_{\Sigma\leftrightarrow\Sigma}$ des forces intérieures à tout système Σ est nulle.*

$$\vec{F}_{\Sigma \leftrightarrow \Sigma/\mathscr{R}} = \vec{0} \qquad \forall \mathscr{R} \tag{4.4}$$

13 Naturellement, la résultante des actions du reste de l'Univers est aussi inobservable dans $\mathscr{R}_\circ$ (*c.f.* § 4.3 *infra*)...

Corollaire — Il s'ensuit que la relation constitutive (3) ne met en œuvre que les forces *extérieures* au système (ce que rien ne permettait d'affirmer *a priori*) et se simplifie en :

$$\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\star\to\Sigma/\mathscr{R}} = \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\star\to M/\mathscr{R}} = \int_\Sigma\int_{\overline{\Sigma}_\star} \mathrm{d}\vec{F}_{P\in\overline{\Sigma}_\star\to M/\mathscr{R}} = \int_\Sigma \vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}}\,\mathrm{d}m = m\,\vec{\Gamma}_{G/\mathscr{R}} \qquad \forall\Sigma\subsetneq\Sigma^\star \quad \forall\mathscr{R} \tag{4.5}$$

Ce résultat finit, avec (2.4), de justifier le recours à des systèmes assimilables à des *points matériels « incapables de se donner un mouvement à eux-mêmes »* [5, 9].

Théorème 2 : *Théorème des actions réciproques* — Un autre corollaire du théorème 1 est que, quelle que soit la partition $\{\Pi_1,\Pi_2\}$ d'un système Σ quelconque,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\Sigma\leftrightarrow\Sigma} = \int_{\Pi_1\cup\Pi_2} \mathrm{d}\vec{F}_{\Pi_1\cup\Pi_2\to M/\mathscr{R}} &= \cancelto{0}{\vec{F}_{\Pi_1\leftrightarrow\Pi_1}} + \vec{F}_{\Pi_2\to\Pi_1/\mathscr{R}} + \cancelto{0}{\vec{F}_{\Pi_2\leftrightarrow\Pi_2}} + \vec{F}_{\Pi_1\to\Pi_2/\mathscr{R}} = \vec{0}\\ \Rightarrow \qquad \vec{F}_{\Pi_1\to\Pi_2/\mathscr{R}} &= -\vec{F}_{\Pi_2\to\Pi_1/\mathscr{R}} \qquad \forall\,\Pi_1,\Pi_2 \quad \forall\mathscr{R}\end{aligned} \tag{4.6}$$

soit : *Les résultantes des actions mutuelles entre deux systèmes matériels sont égales et opposées.*

Or les forces étant supposées indépendantes, on pourrait ajouter que *ce résultat est vrai séparément pour les forces de contact et les forces à distance.*[14]

4.1.2 Élimination de la translation du Monde

Ces résultats et (4.2) incitent à décomposer les forces dues au reste $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ de l'Univers en :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} = \mathrm{d}\vec{F}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} + \mathrm{d}\vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{d}\vec{F}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} = \vec{\Gamma}_{G_\circ/\mathscr{R}}\,\mathrm{d}m \tag{4.7}$$

autrement dit, en une contribution par unité de masse $\mathrm{d}\vec{F}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}}/\mathrm{d}m$ *uniforme* dans le Monde, et qui n'aurait pas de manifestation cinématique observable dans $\mathscr{R}_\circ$, et une contribution $\mathrm{d}\vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}}/\mathrm{d}m$ qui pourrait y être *localement observable.*

Ainsi, définissant les densités massiques $\vec{f} = \mathrm{d}\vec{F}/\mathrm{d}m$ associées aux forces (à distance) exercées sur le Monde par le reste de l'Univers, il vient avec ce qui précède :

$$\vec{f}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} = \vec{f}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star/\mathscr{R}} + \vec{f}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} \quad \text{où} \quad \vec{f}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star/\mathscr{R}} = \vec{f}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} = \frac{1}{m_\circ}\vec{F}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to\Sigma^\circ/\mathscr{R}} = \vec{\Gamma}_{G_\circ/\mathscr{R}} \tag{4.8a}$$

avec

$$\vec{F}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to\Sigma/\mathscr{R}} = \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} = \int_\Sigma \vec{f}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}}\,\mathrm{d}m = \vec{f}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star/\mathscr{R}}\int_\Sigma \mathrm{d}m = m\,\vec{f}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star/\mathscr{R}} = m\,\vec{\Gamma}_{G_\circ/\mathscr{R}} \tag{4.8b}$$

et

$$\mathrm{d}\vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} = \vec{f}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}}\,\mathrm{d}m \qquad \text{avec} \qquad \vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to\Sigma^\circ/\mathscr{R}} = \int_{\Sigma^\circ} \mathrm{d}\vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} = \vec{0} \tag{4.8c}$$

c'est-à-dire que $\vec{f}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}}$ est à *moyenne nulle* sur le Monde.

Théorème 3 : *Théorème d'équivalence* — Nous venons d'isoler la part $\mathrm{d}\vec{F}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} = \vec{\Gamma}_{G_\circ/\mathscr{R}}\,\mathrm{d}m$ des interactions du reste $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ de l'Univers associée à un mouvement de translation d'ensemble du Monde qui peut s'interpréter comme une *chute libre*[15] de ce dernier dans l'Univers, et dont la valeur $\vec{\Gamma}_{G_\circ/\mathscr{R}}$, variable selon l'origine O de $\mathscr{R}$, ne permet pas de qualifier la densité massique de forces uniforme. De sorte que :

Dans un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque, on ne peut discerner une densité massique de forces uniforme exercée par le reste de l'Univers d'une accélération d'ensemble du Monde égale et opposée.

En effet, (4.2) peut être réécrite, *toutes choses égales par ailleurs*, sous la forme

$$m\left[\left(\vec{f}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star/\mathscr{R}} + \vec{\gamma}\right) - \left(\vec{\Gamma}_{G_\circ/\mathscr{R}} + \vec{\gamma}\right)\right] + \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} + \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M/\mathscr{R}} = \int_\Sigma \vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}_\circ}\,\mathrm{d}m \tag{4.9}$$

où $\vec{\gamma}(t)$ est un vecteur quelconque. On rappelle (voir § 4.1.1 précédent) que les $\mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M}$ sont indépendantes d'une *translation* globale du Monde.

[14] Ce résultat n'est pas nouveau, voir par exemple Noll [2, p. 163].

[15] À interpréter au sens large, c'est-à-dire sous l'effet d'un champ de forces extérieures, uniforme à l'échelle du Monde, mais non nécessairement constant.

Ce *résultat* n'est autre que le *principe d'équivalence* d'EINSTEIN [12, § 17][16] [13]. Son constat "expérimental" (*Gedankenexperiment*, *« l'idée la plus heureuse de [s]a vie »*) découle ici d'une stratégie visant à éliminer les interactions inconnues avec le reste $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ de l'Univers.

4.2 Réécriture dans un référentiel barycentrique

Dès lors que seuls les $\mathrm{d}\vec{F}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}}$ contribuent à une translation globale du Monde Σ° dans $\mathscr{R}$, il s'ensuit pour tout point courant M de Σ :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M/\mathscr{R}} = \mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M/\mathscr{R}_\circ} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}\vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}} = \mathrm{d}\vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}_\circ} = \mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}_\circ} \tag{4.10}$$

Ces résultats et la décomposition (4.7) conduisent immédiatement dans (4.5) à :

$$\vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to\Sigma/\mathscr{R}_\circ} + \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma/\mathscr{R}_\circ} = m\,\vec{\mathit{\Gamma}}_{G/\mathscr{R}_\circ} \qquad \forall\,\Sigma\subset\Sigma^\circ\subsetneqq\Sigma^\star \quad \forall\mathscr{R}_\circ \tag{4.11}$$

où les $\mathrm{d}\vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}_\circ}$ ne seraient *que* la partie observable dans $\mathscr{R}_\circ$ des forces exercées par le reste $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ de l'Univers.

Nous aboutissons donc à une nouvelle forme de la relation constitutive écrite dans un référentiel barycentrique $\mathscr{R}_\circ$ en *translation* par rapport à un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque et dans lequel la densité massique de forces $\vec{f}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star/\mathscr{R}} = \vec{\mathit{\Gamma}}_{G_\circ/\mathscr{R}}$ serait inaccessible.

Ainsi, *nous n'aurions aucun moyen de déterminer une origine de* $\mathscr{R}$ (ou du moins un point "fixe"), mais surtout *nous n'en avons pas besoin !* (*Cf.* théorème 3 *supra.*)

4.3 Contribution du reste de l'Univers à la rotation du Monde

Nous avons éliminé l'éventuel mouvement de *translation* d'ensemble $\vec{\mathit{\Gamma}}_{G_\circ/\mathscr{R}}$ du Monde en travaillant dans un référentiel barycentrique $\mathscr{R}_\circ$ dont, à ce stade, l'orientation (par rapport à quoi ?) peut être quelconque. Comparons maintenant la relation constitutive (4.11) écrite dans deux référentiels $\mathscr{R}_\circ$ et $\mathscr{R}'_\circ$ en rotation $\vec{\mathit{\Omega}}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}'_\circ}$ l'un par rapport à l'autre. La composition des accélérations conduit à :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma^\star\to M/\mathscr{R}_\circ} = \mathrm{d}\vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}_\circ} + \mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M/\mathscr{R}_\circ} = \vec{\mathit{\Gamma}}_{M/\mathscr{R}_\circ}\,\mathrm{d}m \qquad \forall M\in\Sigma^\circ\subsetneqq\Sigma^\star \quad \forall\mathscr{R}_\circ \tag{4.12a}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma^\star\to M/\mathscr{R}'_\circ} &= \mathrm{d}\vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}'_\circ} + \mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M/\mathscr{R}'_\circ} = \vec{\mathit{\Gamma}}_{M/\mathscr{R}'_\circ}\,\mathrm{d}m \qquad \forall M\in\Sigma^\circ\subsetneqq\Sigma^\star \quad \forall\mathscr{R}'_\circ \\ &= \Big[\vec{\mathit{\Gamma}}_{M/\mathscr{R}_\circ} + \vec{\mathit{\Omega}}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}'_\circ}\times\big(\vec{\mathit{\Omega}}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}'_\circ}\times\overrightarrow{G_\circ M}\big) + \dot{\vec{\mathit{\Omega}}}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}'_\circ}\times\overrightarrow{G_\circ M} + 2\,\vec{\mathit{\Omega}}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}'_\circ}\times\vec{V}_{M/\mathscr{R}_\circ}\Big]\,\mathrm{d}m\end{aligned} \tag{4.12b}$$

où les termes additionnels apparaissant au second membre de (4.12b) pourraient, comme pour la translation d'ensemble (§ 4.1), aussi être *cachés*[17] dans les expressions dans différents référentiels des forces au premier membre, et tant dans $\mathscr{R}_\circ$ (donc $\mathscr{R}$) que dans $\mathscr{R}'_\circ$, d'orientations *arbitraires*.

Nous abordons sans doute ici le point le plus délicat de ce travail. On pourra remarquer que le terme $\vec{\mathit{\Omega}}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}'_\circ}\times\big(\vec{\mathit{\Omega}}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}'_\circ}\times\overrightarrow{G_\circ M}\big)$ se traduit par une accélération axipète proportionnelle à la distance à l'axe de rotation, et donc *a priori* facilement identifiable. Afin d'illustrer la problématique, considérons le problème *plan* d'une particule M en mouvement circulaire uniforme autour de $G_\circ$ (*e.g.* problème à deux corps) à la vitesse angulaire ω par rapport à $\mathscr{R}_\circ$ et ω' par rapport à $\mathscr{R}'_\circ$, donc tel que $\vec{\mathit{\Omega}}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}'_\circ} = \vec{\omega}' - \vec{\omega}$ constant. Il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma^\star\to M/\mathscr{R}_\circ} = \mathrm{d}\vec{F}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}_\circ} + \mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M/\mathscr{R}_\circ} &= \vec{\mathit{\Gamma}}_{M/\mathscr{R}_\circ}\,\mathrm{d}m = \vec{\omega}\times\big(\vec{\omega}\times\overrightarrow{G_\circ M}\big)\,\mathrm{d}m \\ &= \big(\vec{\mathit{\Omega}}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}'_\circ} - \vec{\omega}'\big)\times\Big[\big(\vec{\mathit{\Omega}}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}'_\circ} - \vec{\omega}'\big)\times\overrightarrow{G_\circ M}\Big]\,\mathrm{d}m\end{aligned} \tag{4.13a}$$

---

[16] Il considère deux référentiels, l'un au repos et l'autre accéléré, implicitement par rapport à un *référentiel inertiel* alors qu'à ce stade on ne sait toujours pas ce que c'est… sauf à admettre la RFD sous sa forme habituelle et un *référentiel absolu* !

Si l'on associe les forces $\mathrm{d}\vec{F}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star}$ à la *gravitation*, qui était au centre de ses interrogations mais dont ni la forme ni l'explication (*« Hypotheses non fingo »* [1]) ne sont requises ici, il s'ensuit leur proportionnalité à la masse attirée et, avec le théorème 2, à la masse attirante, ainsi que la nécessaire égalité entre masses *inertielle* (seule considérée ici) et *grave*.

Il nous semble cependant que, sous sa forme initiale, ce "principe" (qui s'est révélé particulièrement fécond pour son auteur) renvoie surtout à la définition des forces (caractérisées par leur manifestation cinématique), et à l'indifférence au référentiel des forces intérieures au Monde, c'est-à-dire à leur *objectivité* (voir le théorème 4 plus bas).

[17] Il suffit de considérer un autre référentiel $\mathscr{R}''_\circ$ pour faire apparaître $\vec{\mathit{\Omega}}_{\mathscr{R}''_\circ/\mathscr{R}_\circ}$ et $\vec{\mathit{\Omega}}_{\mathscr{R}''_\circ/\mathscr{R}'_\circ}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma^\star\to M/\mathscr{R}'_\circ} = \mathrm{d}\vec{F}^{\vartriangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}'_\circ} + \mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M/\mathscr{R}'_\circ} &= \vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}'_\circ}\,\mathrm{d}m = \vec{\omega}'\times\left(\vec{\omega}'\times\overrightarrow{G_\circ M}\right)\mathrm{d}m \\
&= \left(\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}'_\circ}+\vec{\omega}\right)\times\left[\left(\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}'_\circ}+\vec{\omega}\right)\times\overrightarrow{G_\circ M}\right]\mathrm{d}m
\end{aligned}
\tag{4.13b}
$$

qui montre bien une *équivalence cinématique*, mais où l'accélération axipète pourrait aussi bien être attribuée aux forces exercées par le Monde qu'à celles du reste de l'Univers.

Or il ne s'agit ici que d'une rotation de M relative à deux référentiels, détachés de toute matière, en rotation arbitraire l'un par rapport à l'autre. Cependant les forces, même si leurs expressions seraient relatives au référentiel, sont entre particules matérielles, et dépendent donc *a priori* des positions ou mouvements relatifs de ces particules. On pourra d'autre part remarquer que les termes additionnels de (4.12b), tous liés par le même taux de rotation et formant donc un bloc indissociable, apparaissent quelque soit le Monde Σ° et les interactions qui y règnent…

La décomposition de l'Univers (§ 1.1) étant motivée par la méconnaissance des interactions avec les corps *éloignés*, si le Monde Σ° est tel qu'il y ait une séparation d'échelle avec les corps les plus proches de $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ et que les corps composant l'Univers ont des vitesses relatives entre eux *finies*, les distances $G_\circ M$ de l'ordre de grandeur des dimensions du Monde se révéleraient très petites devant celles aux autres corps de l'Univers, qui paraîtrait immuable sur des échelles de temps correspondant à la cinématique observée dans le Monde. On pourrait alors lui associer un référentiel $\mathscr{R}'_\circ = \mathscr{R}^\star_\circ$ attaché au centre de masse $G_\circ$ du Monde et orienté vers les étoiles lointaines (extérieures à Σ°) et apparaissant comme "fixes", fournissant ainsi un référentiel particulier sur lequel s'appuyer.

En outre, le champ massique de forces $\vec{f}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M}$ devrait alors être *quasiment* uniforme dans Σ° si exprimé par rapport à $\mathscr{R}^\star_\circ$, c'est-à-dire que l'Univers n'y aurait aucune contribution à la rotation du Monde qui y serait globalement en *chute libre*. Or nous avons déjà éliminé la contribution uniforme en nous plaçant dans un référentiel barycentrique. Comme nous l'avons vu § 4.1, si la valeur de l'accélération correspondante se révèle inaccessible, elle a une direction, associée aux autres corps de l'Univers et donc attachée à $\mathscr{R}^\star_\circ$. On pourra d'ailleurs aussi remarquer que, correspondant à une manifestation cinématique d'interactions, les termes d'accélération additionnels sont uniquement associés à des rotations, donc par rapport à des *orientations*.

Toute rotation autour d'un axe appartenant au plan $\Pi^\star_\circ$ normal à la direction de chute libre, donc attaché à $\mathscr{R}^\star_\circ$, se traduirait automatiquement par une accélération axipète. Il nous reste à trouver un troisième axe non coplanaire pour résoudre l'indétermination du problème (4.13) dans ce plan…[18]

S'*il n'y a a priori aucune raison* que le champ massique $\vec{f}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}}$ soit rigoureusement uniforme, et donc qu'il existe des référentiels $\mathscr{R}^\star_\circ$ dans lesquels $\vec{f}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}^\star_\circ} = \vec{f}^{\vartriangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}^\star_\circ} = \vec{0}$, on peut toutefois trouver dans $\Pi^\star_\circ$ une orientation telle que les composantes de ce champ y soient non seulement constantes (pour un Univers invariable à l'échelle de temps du problème), mais surtout minimales, c'est-à-dire qui annulerait l'accélération axipète associée à une rotation autour de l'axe normal à $\Pi^\star_\circ$.

Nous avons donc pu construire, à partir des interactions $\vec{f}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}}$, un trièdre permettant de définir des référentiels barycentriques $\mathscr{R}^\star_\circ$ ne tournant pas les uns par rapport aux autres.

Ainsi, les termes additionnels de (4.12b) seraient dus à une rotation de $\mathscr{R}_\circ$ par rapport à $\mathscr{R}^\star_\circ$ associé au reste $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ de l'Univers. On peut alors poser :

$$
\vec{f}^{\,\bowtie}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}_\circ} = -\left[\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}^\star_\circ}\times\left(\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}^\star_\circ}\times\overrightarrow{G_\circ M}\right) + \dot{\vec{\Omega}}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}^\star_\circ}\times\overrightarrow{G_\circ M} + 2\,\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}^\star_\circ}\times\vec{V}_{M/\mathscr{R}_\circ}\right]
\tag{4.14}
$$

qui s'annule dans $\mathscr{R}^\star_\circ$ et correspond, à $\mathrm{d}m$ près, aux *forces* dites *d'inertie* (de rotation), comme on peut le voir en soustrayant (4.12b) à (4.12a). On a alors le nouveau découpage

$$
\vec{f}^{\vartriangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}_\circ} = \vec{f}^{\,\bowtie}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}_\circ} + \vec{f}^{\,\smile}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}_\circ}
\tag{4.15}
$$

qui, avec (4.12), conduit immédiatement à :

$$
\vec{f}^{\,\smile}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}_\circ} = \vec{f}^{\,\smile}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}^\star_\circ} \qquad \text{et} \qquad \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma/\mathscr{R}_\circ} = \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma/\mathscr{R}^\star_\circ}
\tag{4.16}
$$

[18] La plus belle illustration pourrait en être la célèbre expérience du *seau de Newton* [1, L. 1, *Scholie* aux *Définitions*], qui lui sert d'argument pour justifier l'existence d'un *référentiel absolu*. Bien que non rigoureusement uniforme, l'axisymétrie du champ gravitationnel terrestre ne permet pas d'expliquer la concavité de la surface de l'eau en rotation.

où $\vec{f}^{\,\smile}_{\overline{\Sigma}^{\circ}_{\star}\to M}$ est le champ de forces massiques (*forces de marée*) indépendant de la cinématique dans Σ° et aussi attribuable à $\overline{\Sigma}^{\circ}_{\star}$.

Puisque $\vec{f}^{\,\vartriangle}_{\overline{\Sigma}^{\circ}_{\star}\to M/\mathscr{R}_{\circ}}$ est à moyenne nulle sur Σ°, ce doit donc aussi être le cas pour $\vec{f}^{\,\smile}_{\overline{\Sigma}^{\circ}_{\star}\to M}$.

Théorème 4 : *Objectivité des forces intérieures au Monde* — Le résultat $(4.16)_2$, associé à $(4.10)_1$, montre que les forces intérieures au Monde $\mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_{\circ}\to M}$ ne dépendent pas du référentiel, et sont donc *objectives.*

Corollaire 4.1 : *Théorème d'indifférence matérielle* — La traduction pratique du résultat précédent est que si les forces d'interaction intérieures au Monde ne dépendent pas du référentiel, elles ne peuvent dépendre que des positions ou mouvements relatifs entre particules matérielles.

L'application de ce résultat aux forces de contact et à la MMC conduit naturellement à l'*indifférence matérielle* [2, 14], exploitable notamment dans la recherche de relations de comportement.

Corollaire 4.2 : *Les forces à distance sont centrales* — Cette conséquence est immédiate [14] puisque, entre deux particules disjointes, la seule direction privilégiée est la droite qui les relie. Un autre argument est que sinon, pour un *problème à deux corps*, le moment cinétique croîtrait indéfiniment...[19]

Il paraît naturel d'extrapoler ce résultat (forces centrales) à l'*extérieur* du Monde (*e.g. forces gravitationnelles*), ce qui fournit un outil pour le choix de ce dernier (*champ gravitationnel* dû à l'extérieur).

Corollaire 4.3 : *Les interactions réciproques sont opposées et de même support* — Si nous avons déjà montré théorème 2 que les actions mutuelles entre deux systèmes matériels sont égales et opposées, nous pouvons maintenant ajouter quelles sont aussi *de même support*, puisque les forces à distance se révèlent centrales, et que les forces de contact partagent le même point d'application.

4.4 Référentiels inertiels

Il découle de ce qui précède (§ 4.3) que la nullité de $\vec{f}^{\,\bowtie}_{\overline{\Sigma}^{\circ}_{\star}\to M/\mathscr{R}_{\circ}}$ correspondrait à une classe de référentiels barycentriques $\mathscr{R}^{\star}_{\circ}$ particuliers et dits *inertiels*, associés à $\overline{\Sigma}^{\circ}_{\star}$ et donc d'orientation propre au Monde Σ° considéré, et qui ne tourneraient pas les uns par rapport aux autres, dans lesquels la relation constitutive (4.11) prendrait alors la forme :

$$\vec{F}^{\,\smile}_{\overline{\Sigma}^{\circ}_{\star}\to\Sigma} + \vec{F}_{\overline{\Sigma}_{\circ}\to\Sigma} = m\,\vec{\Gamma}_{G/\mathscr{R}^{\star}_{\circ}} \qquad \forall\,\Sigma\subset\Sigma^{\circ}\subsetneq\Sigma^{\star} \quad \forall\mathscr{R}^{\star}_{\circ} \tag{4.17}$$

La forme de (4.17) permet ensuite de déduire d'autres référentiels $\mathscr{R}^{\mathrm{g}}$, dits *galiléens* (voir section 7), en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathscr{R}^{\star}_{\circ}$, dans lesquels elle revêtirait la même forme.

La détermination pratique d'un référentiel inertiel est renvoyée en annexe.

5 Du choix du Monde

Revenons au problème initial où l'on cherche à décrire, *dans* un Monde Σ°, l'influence des actions mécaniques sur le mouvement d'un système Σ *observable à l'intérieur de ce Monde*, en ne sachant *a priori* rien du reste $\overline{\Sigma}^{\circ}_{\star}$ de l'Univers. Autrement dit, on n'a pas les moyens d'expliciter les forces exercées par ce dernier, donc son influence, et le fait de choisir un Monde particulier revient justement à sélectionner le domaine matériel dans (et avec) lequel on souhaite travailler.

La décomposition (4.7) des forces exercées par le reste de l'Univers nous a d'abord permis d'éliminer dans $\mathscr{R}_{\circ}$ les manifestations cinématiques des contributions par unité de masse $\vec{f}^{\,\circ}_{\overline{\Sigma}^{\circ}_{\star}\to M/\mathscr{R}}$ uniformes dans le Monde. Les $\vec{f}^{\,\vartriangle}_{\overline{\Sigma}^{\circ}_{\star}\to M/\mathscr{R}_{\circ}}$ restantes, à moyenne nulle sur le Monde ont ensuite pu, avec (4.15), être réduites dans $\mathscr{R}^{\star}_{\circ}$ à $\vec{f}^{\,\smile}_{\overline{\Sigma}^{\circ}_{\star}\to M}$, aussi à moyenne nulle. Ainsi, si celles-ci y étaient *partout* nulles, la totalité des manifestations observables des forces exercées par le reste de l'Univers dans le Monde disparaîtrait et la relation constitutive se ramènerait finalement à :

$$\vec{F}_{\overline{\Sigma}_{\circ}\to\Sigma} = m\,\vec{\Gamma}_{G/\mathscr{R}^{\star}_{\circ}} \tag{5.1}$$

[19] Ce qui serait aussi le cas si elles n'étaient pas *instantanées.*

où n'interviendraient que les forces intérieures au Monde et extérieures au système, et dont l'expression correspondrait à leur *manifestation cinématique dans des référentiels barycentriques* $\mathscr{R}^\star_\circ$ *particuliers.*

Il apparaît donc que le seul moyen de *masquer* l'influence de l'ensemble des forces du reste $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ de l'Univers, ou ce qui revient au même, qu'elle ne soit pas observable dans un référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\star_\circ$, serait que $\vec{f}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star\to M/\mathscr{R}^\star_\circ} = \vec{f}_{\overset{\frown}{\overline{\Sigma}^\circ_\star}\to M/\mathscr{R}^\star_\circ} = \vec{0}$ en tout point M de Σ°, montrant ainsi qu'un Monde Σ°, qui serait le seul environnement à prendre en compte dans l'étude d'un système Σ donné, et un référentiel $\mathscr{R}^\star_\circ$ associé, ne pourraient être choisis n'importe comment… Mais la discussion précédente montre que les interactions avec le reste $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ de l'Univers se révèlent *nécessaires* pour construire des référentiels inertiels dans lesquels la relation constitutive prendrait la forme (5.1). Or on voit avec (4.17) qu'il ne pourrait s'agir que d'un *compromis* où les inhomogénéités $\vec{f}_{\overset{\frown}{\overline{\Sigma}^\circ_\star}\to M/\mathscr{R}^\star_\circ}$ dans le Monde devraient être négligeables vis-à-vis des autres forces $\mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M/\mathscr{R}^\star_\circ}/\mathrm{d}m$ en présence.

On peut synthétiser notre démarche par la construction de référentiels successifs comme suit :

$$\vec{F}_{\Sigma^\star\to\Sigma/\mathscr{R}} = m\,\vec{\Gamma}_{G/\mathscr{R}} = \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma/\mathscr{R}} + \vec{F}_{\overset{\vartriangle}{\overline{\Sigma}^\circ_\star}\to\Sigma/\mathscr{R}} + \vec{F}_{\overset{\circ}{\overline{\Sigma}^\circ_\star}\to\Sigma/\mathscr{R}} \qquad \forall\mathscr{R} \tag{5.2a}$$

$$\vec{F}_{\Sigma^\star\to\Sigma/\mathscr{R}_\circ} = m\,\vec{\Gamma}_{G/\mathscr{R}_\circ} = \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma/\mathscr{R}_\circ} + \vec{F}_{\overset{\frown}{\overline{\Sigma}^\circ_\star}\to\Sigma/\mathscr{R}_\circ} + \vec{F}_{\overset{\bowtie}{\overline{\Sigma}^\circ_\star}\to\Sigma/\mathscr{R}_\circ} \qquad \forall\mathscr{R}_\circ \tag{5.2b}$$

$$\vec{F}_{\Sigma^\star\to\Sigma/\mathscr{R}^\star_\circ} = m\,\vec{\Gamma}_{G/\mathscr{R}^\star_\circ} = \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma/\mathscr{R}^\star_\circ} + \vec{F}_{\overset{\frown}{\overline{\Sigma}^\circ_\star}\to\Sigma/\mathscr{R}^\star_\circ} \approx \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma/\mathscr{R}^\star_\circ} \qquad \forall\mathscr{R}^\star_\circ \tag{5.2c}$$

Pour assurer un champ massique de forces dues au reste de l'Univers *presque* uniforme, il faut que la taille du Monde soit *très petite* devant la distance des sources de ces forces (*e.g.* gravitation, corollaire 4.2), ce qui fournit une *règle* pour le choix du Monde (soit, d'un point de vue anthropocentrique : Terre, système Terre–satellite, Système solaire, Galaxie[20]) pour une classe de problèmes donnée.

6 Relation fondamentale de la dynamique

Finalement, une fois admises l'existence d'une mesure m de quantité de matière (axiome 1) et la modélisation des interactions matérielles par des forces indépendantes (axiome 2) dont la *manifestation* est une modification de la cinématique donnée par la *relation constitutive* (3), puis (4.5) et enfin (4.17), on peut reformuler cette dernière (en la scindant en deux afin de se rapprocher des énoncés habituels [1, *Lois*] [2, axiomes **I1** et **I2**]) :[21]

Axiome 3 : *Principe fondamental de la dynamique*

Loi I — *Pour tout système fermé* Σ *de masse* m *et centre de masse* G*, il est possible de trouver un Monde* Σ° *fermé* ($\Sigma \subsetneq \Sigma^\circ$) *et une classe de référentiels barycentriques* $\mathscr{R}^\star_\circ$*, dits inertiels, associée et dans laquelle les interactions avec le reste* $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ *de l'Univers seraient quasiment inobservables, et pratiquement négligeables devant les autres forces en présence.*

Loi II — *Dans tout référentiel* $\mathscr{R}^{\mathrm{g}}$*, dit galiléen et se déduisant d'un référentiel barycentrique* $\mathscr{R}^\star_\circ$ *par translation rectiligne uniforme, on a :*

$$\int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M} = \boxed{\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma} \approx m\,\vec{\Gamma}_{G/\mathscr{R}^{\mathrm{g}}}} = \int_\Sigma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{V}_{M/\mathscr{R}^{\mathrm{g}}}\,\mathrm{d}m \qquad \boxed{\text{dans } \mathscr{R}^{\mathrm{g}}} \tag{6}$$

Loi III — *Indifférence matérielle : les forces intérieures au Monde sont objectives.*

Remarques — Cette formulation reste donc voisine de celle de Newton. Sa première loi (*principe d'inertie*) est une conséquence immédiate de la Loi II pour un système (pseudo-)isolé. On n'évite cependant pas la référence circulaire qui apparaît en pratique : *un référentiel inertiel est un référentiel dans lequel* (6) *est vérifiée.*

[20] Rappelons que la pluralité des galaxies, envisagée par Kant dès 1755, n'a été confirmée qu'en 1924 par Hubble et qu'au-delà, il n'y aurait *a priori* plus de séparation d'échelles.

[21] Nos deux premiers axiomes correspondent aux *"définitions"* I et IV de Newton [1] ou à ceux **M** et **F** de Noll [2].

La troisième loi de NEWTON (*principe des actions réciproques*, notre théorème 2) n'a plus lieu d'être du fait de la seule considération (explicite dans (6)) des forces extérieures au système (c'est-à-dire que les forces intérieures n'ont aucune incidence sur la cinématique du centre de masse du système). On la retrouve d'ailleurs bien (comme nous l'avions déjà vu § 4.1.1, mais pouvant ici être écrite comme conséquence immédiate de la Loi II) :

$$\vec{F}_{\Sigma^\circ\leftrightarrow\Sigma^\circ} = \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma} + \vec{F}_{\overline{\Sigma}\to\overline{\Sigma}_\circ} = m\,\vec{\Gamma}_{G_\circ/\mathscr{R}^{\mathrm{g}}} = m\,\vec{\Gamma}_{G_\circ/\mathscr{R}_\circ^\star} = m\,\vec{\Gamma}_{G_\circ/\mathscr{R}_\circ} = \vec{0} \qquad \forall\Sigma \subsetneq \Sigma^\circ$$

Si notre loi III (axiome **A2** de NOLL [2]) n'est autre que le théorème 4, ce dernier a été déduit du postulat 3 auquel nous voulons substituer un axiome 3 pratiquement exploitable. Or nos deux premières lois ne permettent pas seules de remonter à la RFD (3), sauf à mettre en exergue l'objectivité *implicite* des forces intérieures au Monde du fait de la non-mention du référentiel.

L'égalité non stricte dans la RFD (6) rend compte de la non-uniformité des interactions avec le reste $\overline{\Sigma}_\star^\circ$ de l'Univers, qu'un choix adapté du référentiel permettra de minimiser dans un Monde où elles se révéleraient négligeables devant les forces au premier membre.

Contrairement au "confortable" « *espace absolu* » de NEWTON, on met clairement en évidence la problématique du *choix* du Monde Σ° et du référentiel adapté, que finalement seule l'expérience permet de guider en fonction du contexte.

7 Discussion

On rassemble ici un certain nombre d'observations visant à clarifier la démarche et les résultats.

De l'objectivité des forces intérieures au Monde — Nous avons montré théorème 4 que, dès que *certaines* forces ont pu être attribuées aux interactions avec le reste $\overline{\Sigma}_\star^\circ$ de l'Univers,[22] les forces intérieures au Monde $\mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M}$ ne dépendent pas du référentiel. Revenons à notre définition des forces, et en particulier à (2.5), qui permettraient de réécrire la RFD (3) sous la forme :

$$\vec{F}_{\Sigma^\star\to\Sigma/\mathscr{R}} = \int_{\Sigma^\star} \vec{F}_{P\in\Sigma^\star\to\Sigma/\mathscr{R}} = m\int_{\Sigma^\star} \vec{\Gamma}^P_{G/\mathscr{R}} = m\,\vec{\Gamma}_{G/\mathscr{R}} = m\,\frac{\mathrm{d}^2_{\mathscr{R}}}{\mathrm{d}t^2}\overrightarrow{OG} \qquad \forall\mathscr{R} \tag{7.1}$$

où l'égalité vectorielle $m\,\vec{\Gamma}^P_{G/\mathscr{R}} = \vec{F}_{P\to\Sigma/\mathscr{R}}$ représente la contribution de la particule P à la modification du mouvement du centre masse G de Σ (*parallélogramme des forces*), inobservable individuellement alors que $\vec{\Gamma}_{G/\mathscr{R}}$ *pourrait* l'être (ainsi que calculable à partir des positions et vitesses dans $\mathscr{R}$).

Or notre démarche de la section 4, synthétisée éqs. (5.2), nous a permis d'éliminer le recours à O en nous plaçant dans un référentiel barycentrique $\mathscr{R}_\circ$, et les contributions aux accélérations associées à une rotation $\vec{\Omega}_{\mathscr{R}_\circ/\mathscr{R}_\circ^\star}$ ont pu être attribuées au champ $\vec{f}^{\,\bowtie}_{\overline{\Sigma}_\star^\circ\to M/\mathscr{R}_\circ} \approx \vec{f}^{\,\triangleq}_{\overline{\Sigma}_\star^\circ\to M/\mathscr{R}_\circ}$ généré par le reste $\overline{\Sigma}_\star^\circ$ de l'Univers (éq. (4.14)), de sorte qu'inversement, pour tout changement de référentiel à partir de $\mathscr{R}_\circ^\star$, la transformation des $\vec{\Gamma}^{P\in\Sigma^\circ}_{G/\mathscr{R}}$, et donc des forces intérieures au Monde $\vec{F}_{P\in\Sigma^\circ\to\Sigma/\mathscr{R}}$, se réduit à la *rotation* correspondante, ce qui caractérise les grandeurs vectorielles objectives [2, 14].[23] Ainsi, on a finalement :

$$\mathrm{d}\vec{F}_{P\to M} = \vec{\Gamma}^P_{M/\mathscr{R}}\,\mathrm{d}m \qquad \forall M,P\in\Sigma^\circ \qquad \forall\mathscr{R} \tag{7.2}$$

qui n'est qu'une égalité entre vecteurs *individuels*, vérifiée (indépendamment de la façon dont elle est calculée, et donc même si leurs expressions diffèrent) *quel que soit le référentiel !* Alors que la dérivée de *la* quantité de mouvement (ou de *la* vitesse) est une grandeur *globale* associée à *la* résultante des forces.

[22] Postuler l'objectivité des forces (intérieures au Monde) pour ensuite attribuer au reste de l'Univers les forces d'inertie (non objectives) résultant du choix du référentiel ne nous semble pas équivalent, puisqu'il est alors aussi nécessaire de postuler l'existence d'une classe de référentiels privilégiés $\mathscr{R}^{\mathrm{g}}$ (ce qui ne pose pas de problème dans une approche purement axiomatique telle qu'en [2]), ou avec notre axiome 3, mais s'abstraire *a priori* de $\overline{\Sigma}_\star^\circ$, pour le réintroduire ensuite, paraît intellectuellement hasardeux.

Ce postulat aurait cependant permis d'évacuer d'emblée une dépendance au référentiel des forces intérieures au Monde.

[23] Nous n'avons pas la place ici pour développer ce calcul élémentaire.

Des contributions du reste de l'Univers — Si dans la RFD (3) nous avons introduit formellement les interactions $\overrightarrow{F}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star \to M \in \Sigma}$ avec le reste de l'Univers, ce n'est pas par commodité pour lui attribuer les forces d'inertie, puisque nous avons justement montré leur nécessité. Nous avons cependant eu besoin de nous mettre dans un Monde suffisamment petit pour que ces interactions (ou leurs manifestations) à grande distance puissent être considérées *quasiment uniformes* dans un référentiel $\mathscr{R}^\star_\circ$ orienté vers les étoiles qui apparaissent alors *fixes* à l'échelle de temps du problème.

Sans ces interactions, ou ce qui reviendrait au même si ces interactions étaient *isotropes* à l'échelle du Monde, on retombe sur la formulation habituelle (newtonienne) et son nécessaire *« espace absolu ». Rien ne permet alors d'attribuer les forces d'inertie à de quelconques interactions qui sortiraient donc d'on ne sait où* (voir note 22). De même, une improbable axisymétrie de ces interactions ne permettrait pas de trancher la question du *seau de Newton* (note 18), qui pourrait être résolue en prenant en compte l'action de Soleil qui suffirait (sauf conjonction) à rompre une telle symétrie.

Du *« principe de Mach »* — La question initiale [3] (voir section 3), était de savoir si un astronaute (qui serait un Monde à lui seul) pourrait ressentir une force centrifuge dans un Univers vide, et donc sans interactions ni repères (étoiles visibles), *cf. infra*. Il nous semble qu'elle serait plutôt ici de savoir, dans un Univers non vide (situation plus réaliste), si une éventuelle force centrifuge correspond quantitativement à la rotation par rapport aux étoiles lointaines (voir (4.13)), donc le reste de l'Univers.

Notre travail répond par l'affirmative en prenant en compte les interactions correspondantes, mais doit-on qualifier de *principe* ([13], même si EINSTEIN y défend d'autres arguments) le simple fait de considérer que l'Univers fait partie intégrante du problème ?

De la rotation de la Terre — Dans la continuité de ce qui précède se trouve le problème historique de la mise en évidence de la rotation de la Terre sur elle-même. Une des tentatives les plus intéressantes est due à HUYGENS qui, considérant que la résultante des forces s'exerçant sur une particule liquide à l'équilibre à la surface de la Terre n'a pas de composantes tangentielles à cette surface, une "force centrifuge" se traduirait par un aplatissement de notre planète. Il est cependant impossible de séparer les diverses contributions au poids apparent sans recours à la LUG.

Le dernier terme de (4.12b), mis en évidence par LAPLACE (pour expliquer la *déviation vers l'est* d'un corps en chute libre sur Terre) puis CORIOLIS, est par contre dépendant du mouvement dans le Monde, et apparaît à la moindre rotation. C'est précisément la magnifique démonstration de FOUCAULT (qui ne connaissait pas ce terme d'accélération complémentaire) avec son pendule qui en outre ne met justement pas en œuvre la LUG.

Du référentiel absolu — Il apparaît que les $\mathscr{R}^\star_\circ$ seraient dépendants du Monde Σ°, et donc de son complément $\overline{\Sigma}^\circ_\star$, ce qui balaye tout espoir de trouver un *référentiel absolu*, puisque outre son origine, les orientations n'ont aucune raison d'être les mêmes suivant où l'on se trouve dans l'Univers !

Notre formulation initiale (3) de la RFD tue dans l'œuf les multiples interrogations induites par l'existence d'un hypothétique *« espace absolu »* et les éventuelles hypothèses cosmologiques *ad hoc*. Cependant, puisque les $\mathscr{R}^\star_\circ$ sont orientés relativement au champ $\overrightarrow{f}^{\triangle}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star \to M}$ (nullité de $\overrightarrow{f}^{\bowtie}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star \to M/\mathscr{R}_\circ}$) généré par le reste $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ de l'Univers, donc aux astres lointains de la voûte céleste (*étoiles* dites *fixes*) qui en seraient la cause, on retrouve la pratique habituelle pour l'application de la RFD sous sa forme (6).

Des forces d'inertie — Si, pour aboutir à la forme (6) de la RFD, nous nous sommes mis dans des référentiels particuliers $\mathscr{R}^\star_\circ$ afin de réduire les manifestations cinématiques observables des interactions avec le reste $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ de l'Univers (associées aux *forces* dites *d'inertie* $\mathrm{d}\overrightarrow{F}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star \to \underline{M}/\mathscr{R}} + \mathrm{d}\overrightarrow{F}^{\bowtie}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star \to M/\mathscr{R}_\circ}$) permettant de ne finalement considérer que les forces dues au reste du Monde $\overline{\Sigma}_\circ$, elles réapparaissent naturellement dans tout référentiel autre que $\mathscr{R}^\star_\circ$ ou $\mathscr{R}^{\mathrm{g}}$, dit *non inertiel*. En effet, injectant successivement (5.2b) puis (5.2c) dans (5.2a), il vient avec (4.10) et le théorème 4 :

$$m\,\overrightarrow{\Gamma}_{G/\mathscr{R}} = m\,\overrightarrow{\Gamma}_{G/\mathscr{R}_\circ} + \overrightarrow{F}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star \to \Sigma/\mathscr{R}} = m\,\overrightarrow{\Gamma}_{G/\mathscr{R}^\star_\circ} + \overrightarrow{F}^{\bowtie}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star \to \Sigma/\mathscr{R}_\circ} + \overrightarrow{F}^{\circ}_{\overline{\Sigma}^\circ_\star \to \Sigma/\mathscr{R}} \tag{7.3}$$

où l'on retrouve (par construction et non comme interprétation) que les *forces* dites *d'inertie* sont, à la masse m près, les opposées des accélérations d'entraînement et complémentaires, et ne sont donc en aucun cas *fictives* (malheureuse dénomination courante depuis CORIOLIS).

De la relativité galiléenne — Il semble qu'un obstacle dans l'analyse du PFD et de ses conséquences réside dans la difficulté de se détacher du lien opérationnel où vitesses et accélérations sont des dérivées temporelles du vecteur position, qui sont des grandeurs *non objectives*. *C'est seulement dans la mise en œuvre pratique de la RFD sous sa forme finale qu'il faut y avoir recours* (on rappelle que pour aboutir à la RFD (6), nous n'avons utilisé que des égalités entre *vecteurs*, qui sont bien des relations objectives, voir aussi axiome **A2** de NOLL [2]). Dès lors, la *relativité galiléenne* (historiquement antérieure aux lois de NEWTON), souvent utilisée comme porte d'entrée pour les formulations des lois de la Mécanique, n'apparaît *que* comme une *conséquence* technique de la forme de la RFD (6), établie non dans des référentiels $\mathscr{R}^g$ mais dans des référentiels barycentriques $\mathscr{R}_\circ^\star$. Si l'invariance par transformation galiléenne se doit bien d'être vérifiée, elle ne se révèle qu'un outil *a posteriori*.

Du principe d'inertie — La *première loi de Newton*, aussi formulée antérieurement dans le cadre de la Mécanique "terrestre", peut être vue comme cas particulier de la RFD appliquée à un système (pseudo-)isolé (relativement aux forces intérieures au Monde) *dans un référentiel galiléen*, résultant en un *mouvement rectiligne uniforme*. Cependant, étendu à la Mécanique céleste, sa définition même bute sur le référentiel à choisir, ce qui n'a été "résolu" par NEWTON que *via* le recours à un *« espace absolu »*, alors qu'il résulte ici de l'annulation des *forces* dites *d'inertie* dues au reste $\overline{\Sigma}_\star^\circ$ de l'Univers.

De l'*obscurité* des forces — Ce travail valide le concept intuitif de *forces* (§ 2.2), dont l'indépendance aura été primordiale et qui se révèlent mesurables dans un Monde, mais montre aussi le caractère indéterminé de celles extérieures (*forces d'inertie*), dont en outre seule la *résultante* en chaque point (ou le champ massique correspondant) pourrait *partiellement* être mise en évidence. Ce n'est pas que ces dernières ne sont pas objectives (ce sont des forces comme les autres), c'est qu'il est *impossible* de localiser, et donc de formaliser, les interactions individuelles du fait de l'inaccessibilité de la connaissance (*e.g.* la répartition des masses) de l'ensemble de l'Univers.

Ainsi, les forces intérieures au Monde peuvent individuellement (avec des expériences appropriées) être quantifiées par la dynamique, et ainsi retraduites en des lois de comportement, et reliées à des lois phénoménologiques, exploitables aussi en statique (qui n'est rien d'autre que l'immobilité par rapport à un référentiel donné).

De la relation constitutive — La RFD (3) ou (6) peut formellement être vue comme une *équation d'équilibre* avec d'un côté les forces et de l'autre leur manifestation cinématique (voir [6, 7, 8]).

Le passage des formes (3) à (6) revient à amputer de part et d'autre ce qui résulte des interactions avec le reste $\overline{\Sigma}_\star^\circ$ de l'Univers. Celles-ci nécessiteraient une connaissance des positions ou mouvements relatifs inaccessibles et non explicitables dans un référentiel barycentrique $\mathscr{R}_\circ$ qui leur serait détaché, et peuvent être minimisées dans une classe de référentiels d'orientation particulière $\mathscr{R}_\circ^\star$.

Dernière remarque : *conservation du moment cinétique du Monde* — Nous avons placé ce travail dans le cadre de systèmes étendus, donc caractérisés par une orientation dans l'espace qui pourrait être modifiée par les forces en présence. Or nous avons vu § 4.3 que le reste $\overline{\Sigma}_\star^\circ$ de l'Univers ne participait pas à la rotation du Monde Σ°. Il en ressort que le moment dynamique du Monde ne dépendrait que des forces intérieures, et serait donc globalement nul avec le corollaire 4.3. La conséquence directe est que son moment cinétique est constant dans $\mathscr{R}_\circ^\star$ ou $\mathscr{R}^g$.

Conclusion

Ce travail, qui n'aura nécessité que peu d'ingrédients et obéit ainsi au *principe de parcimonie*, reste (*heureusement !*) en accord avec les résultats habituels de la Mécanique newtonienne et ses extensions. Il aura permis de retrouver nombre de résultats classiques souvent posés comme postulats.

La considération de systèmes étendus aura permis de contourner, tout en le validant, le concept, inutile *a priori*, de point matériel qui ne pourrait modifier seul son mouvement. D'autre part, notre approche montre, avec une hiérarchisation où le système, le Monde et l'Univers sont strictement inclus les uns dans les autres, et une stratégie visant à éliminer les inconnues inaccessibles associées au reste de l'Univers, la nécessité de ce dernier et, pour une classe de problèmes donnée, quel environnement (Monde) prendre en compte et les référentiels inertiels associés, c'est-à-dire précise le "mode d'emploi" généralement *implicite* du PFD. Ce Monde devant être très petit vis-à-vis des distances aux autres corps de l'Univers, il apparaît que notre formalisme trouverait de toute façon sa limite à la taille d'une galaxie (au-delà, il n'y a *a priori* plus de séparation d'échelles), tout en permettant d'y envisager des résultats au moins qualitativement satisfaisants. En particulier, nous n'avons eu besoin ni d'un polémique *« espace absolu »*, ni d'aucune hypothèse cosmologique.

Si l'instantanéité des forces est inhérente à leur définition où elles modifieraient la cinématique *actuelle*, le recours systématique à des centres de masse *nécessite* la connaissance instantanée de la répartition de la matière (au moins dans le Monde), et est sans doute le principal verrou de la Mécanique newtonienne. Elle n'est cependant requise qu'à l'échelle du Monde et pourrait éventuellement être mise en défaut si celui-ci devenait trop grand. Comme nous l'avons vu, la RFD (6) n'est qu'une approximation du fait de $\overrightarrow{f}_{\overline{\Sigma}^{\circ}_{\star}\to M/\mathscr{R}^{\star}_{\circ}}^{\smile}$ qui n'a aucune raison d'être rigoureusement nul sur le Monde.

Ce travail, dont la clef repose finalement sur la forme de la relation constitutive (3) et la prise en compte de la totalité de l'Univers, aura aussi montré la difficulté de s'abstraire des idées reçues. Nous aurons cependant croisé les diverses expériences relatives à la question de la rotation de la Terre.

Malgré ses problèmes de fond, la formulation de NEWTON apparaît finalement optimale en pratique, dès lors que l'on accepte d'*admettre* l'existence d'une classe de référentiels privilégiés dans un contexte donné, avant d'envisager les alternatives énergétiques du XVIIIe siècle qui reposent également dessus, et l'extension aux systèmes ouverts (*via* la *quantité de mouvement*) qui reste valide telle qu'elle a été effectuée depuis. ?

Références

[1] I. NEWTON, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Londres, 1687 (traduction française de la 3e Éd. par É. DU CHÂTELET, 1756).

[2] C. TRUESDELL, *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, 2nd Ed., Chap. I, Academic Press, 1977 (*Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus* (trad. D. EUVRARD), Masson & Cie, Paris, 1974). Nous faisons référence à l'édition américaine.

[3] E. MACH, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, Chap. II, Brockhaus, Leipzig, 1883 (*La mécanique - Exposé historique et critique de son développement* (trad. É. BERTRAND), Hermann, Paris, 1904).

[4] H. POINCARÉ, *La Science et l'Hypothèse*, Chap. VI, Flammarion, Paris, 1902.

[5] J. Le Rond D'ALEMBERT, Article *Force* de *L'Encyclopédie*, T. VII, 109b-120a, Paris, 1757.

[6] J. Le Rond D'ALEMBERT, *Traité de Dynamique*, David l'aîné, Paris, 1743.

[7] P. PODIO-GUIDUGLI, *Inertia and Invariance*, Ann. Mat. Pura Appl. **172**(1), 103-124, 1997.

[8] W. NOLL, *On the concept of force*, 2007 (http://www.math.cmu.edu/~wn0g/).

[9] P.-S. de LAPLACE, *Traité de Mécanique céleste*, T. I, L. I, Chap. II, J.B.M. Duprat, Paris, an VII (1798).

[10] L. EULER, *Réfléxions sur l'Espace & le Tems*, E149, Mém. acad. sci. Berlin, **4** (1748), 324-333, 1750 ;
Recherches sur l'origine des forces, E181, *ibid.* **6** (1750), 419-447, 1752 ;
Recherches sur la connoissance méchanique des Corps, E291, *ibid.* **14** (1758), 131-153, 1765.

[11] A. WATZKY, *Sur le principe fondamental de la dynamique*, 23ème Congrès Français de Mécanique, Lille, 28 août – 1er septembre 2017.

[12] A. EINSTEIN, *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen*, Jahrb. Radioakt. Elektronik **4**, 411-462, 1907 et **5**, 98-99, 1908 (trad. N.M. SCHWARTZ, *Einstein's comprehensive 1907 essay on relativity*, Am. J. Phys. **45**, part I, 512-517, part II, 811-817, part III, 899-202, 1977).

[13] A. EINSTEIN, *Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Ann. Phys., **55**(4), 241-244, 1918.

[14] W. NOLL, *On material frame-indifference*, Research Report No. 95-NA-022, 1995.

Annexe — Construction pratique d'un référentiel inertiel

Ce travail ne saurait être complet sans proposer un moyen de déterminer un référentiel inertiel.

Si l'orientation d'un référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\star_\circ$ ne dépend que des interactions avec le reste $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ de l'Univers que l'on veut y masquer, et que pour la translation dans un référentiel $\mathscr{R}$ quelconque il est déjà attaché à $G_\circ$, il vaut mieux travailler ici avec le champ massique de forces $\vec{f}_{\overset{\vartriangle}{\overline{\Sigma}}{}^\circ_\star \to M/\mathscr{R}^\star_\circ} = \vec{f}_{\overset{\smile}{\overline{\Sigma}}{}^\circ_\star \to M/\mathscr{R}^\star_\circ} \approx \vec{0}$ indépendant de la répartition des masses à l'intérieur du Monde Σ° (voir section 4).
L'accélération étant donnée en tout point M du Monde par la composition des accélérations, ici découpée en (4.1) et (4.12), pour qu'elle se réduise à $\vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}^\star_\circ} = \vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}^{\mathrm{g}}}$ due aux forces intérieures au Monde, nous avons vu §§ 4.1 et 4.3 qu'il suffit d'annuler les accélérations d'entraînement (translation et rotation) et en dynamique, l'accélération complémentaire (Coriolis), dues au reste $\overline{\Sigma}^\circ_\star$ de l'Univers.

L'association de trois accéléromètres suivant les axes d'un trièdre qui n'indiqueraient aucune accélération assurerait donc d'être dans un référentiel inertiel.[24] Cependant, dans un tel système de taille réduite, les parts de l'accélération associées à une rotation lente pourraient ne pas être mesurables, ce qui limiterait l'exploitation d'un tel dispositif à la translation.
L'association de trois gyroscopes d'axes suivant ceux d'un trièdre orienterait, avec un couple nul (associé à l'accélération complémentaire) mesuré sur leurs axes, un référentiel inertiel.

C'est justement ce qu'on trouve dans les *centrales inertielles*… Ces dispositifs n'orientent *a priori* pas vers des "étoiles fixes", mais dans des directions telles que les manifestations cinématiques des interactions avec l'extérieur $\overline{\Sigma}_\star$ (donc $\overline{\Sigma}_\circ$ compris) y apparaissent globalement nulles !

[24] Cette approche correspond à celle proposée par LANGE (voir [3, pp. 232-234]) qui repose sur des *mouvements rectilignes uniformes* (donc *a priori* le *principe d'inertie*) mais qui, même si elle traduirait la même situation, nécessiterait des interactions nulles à l'intérieur du Monde sur des distances importantes, et relève de l'expérience de pensée irréalisable.