

Modélisation continue non locale d'une chaîne discrète périodique unidimensionnelle en flexion

V. PICANDET^a, N. CHALLAMEL^a

a. Université Bretagne-Sud, IRDL, UMR CNRS 6027, F-56100 Lorient, France
vincent.picandet@univ-ubs.fr
noel.challamel@univ-ubs.fr

Résumé :

Les questions fondamentales de modélisation des milieux microstructurés sont abordées ici à partir de systèmes élastoplastiques unidimensionnels. Le but est d'établir, au moins pour un problème structural uniaxial assez élémentaire, un pont entre la mécanique de systèmes discrets de référence et celle de milieux continus élastoplastiques non locaux. Il est actuellement admis que les modèles mécaniques doivent être formulés dans un cadre non local, afin d'obtenir des résultats cohérents, notamment lors de la modélisation numérique de phénomènes de radoucissement. Notre étude montre que la source de non localité à l'échelle du volume observé peut provenir du caractère discontinu ou discret du matériau à une échelle inférieure. Une détermination analytique de la longueur caractéristique associée à cette non localité est proposée en fonction de la longueur des éléments périodiques constitutifs.

Le comportement statique en flexion d'un réseau discret périodique est d'abord étudié. En élasticité pure, ce système correspond à la chaîne de Hencky comparable à une poutre micro-structurée, encastree à une extrémité subissant un effort monotone transversal, uniformément réparti ou ponctuel, jusqu'à la rupture. Les phénomènes de localisation du radoucissement sont observés à l'échelle discrète du système étudié, qui est ici une généralisation du système de Hencky étendu au cas élastoplastique bilinéaire. Un modèle continu non local est ensuite construit à partir de ces équations aux différences en utilisant une procédure de continualisation. La formulation de la loi constitutive de ce modèle correspond alors à une loi non locale au sens d'Eringen, dont la longueur caractéristique associée dépend de la longueur des cellules élémentaires constituant le réseau.

Abstract:

The fundamental questions of modelling microstructured media are addressed here from one-dimensional elastoplastic systems. The aim is to establish, at least for a basic uniaxial structural problem, a bridge between the mechanics of discrete reference system and non-local elastoplastic continuous media. It is currently accepted that mechanical models must be formulated in a non-local framework in order to obtain consistent results, particularly during the numerical modelling of softening phenomena. Our study shows that the source of non-locality at the scale of the observed volume can come from the discontinuous or discrete nature of the material at a lower scale. An

analytical determination of the characteristic length associated with this non-locality is proposed according to the length of the periodic elements.

The static bending behaviour of a periodic discrete network is first studied. In pure elasticity, this system corresponds to the Hencky-bar-chain comparable to a microstructured cantilever beam, undergoing a monotonous transverse force, uniformly distributed or punctual on its free end, until failure. The phenomena of localization of softening are observed at the discrete scale of the studied system, which is here a generalization of the Hencky system extended to the bi-linear elastoplastic case. A non-local continuous model is then built from these difference equations using a continualization procedure. The formulation of the constitutive law of this model then corresponds to a non-local law according to Eringen with associated characteristic length depending on the length of the periodic cells of the network.

Mots clefs : réseaux discrets, équations aux différences, élastoplasticité, modèle non local, flexion, radoucissement, localisation

1 Introduction

Cette étude porte sur le lien entre élastoplasticité discrète et non locale continue à travers le comportement d'un système discret périodique considéré comme paradigmatique. Un nouveau modèle élastoplastique non local basé sur une approche discrète (ou micromécanique) est proposé à partir d'un réseau discret élastoplastique. Les sources de plasticité non locales sont d'un intérêt primordial pour justifier les effets d'échelles observés sur les plus petites structures, pour une analyse multi-échelle pertinente des solides microstructurés et pour contrôler les processus de localisation, en particulier dans le cas de comportement radoucissant. Il est montré dans ce papier qu'un réseau élastoplastique discret se comporte de la même manière qu'un milieu continu élastoplastique non local en utilisant des arguments rationnels pour établir le lien entre les deux modèles à l'échelle micro et macro.

Les réseaux discrets élastiques, à l'opposé de ceux élastoplastiques, ont déjà été largement étudiés [1] [2], et ont, relativement récemment, été reliés à des modèles élastiques continus non locaux, voir entre autre [3] [4] [5] [6]. Eringen a introduit en 1983 [5], un modèle au gradient de contrainte avec une longueur caractéristique calibrée à partir de la dispersion d'ondes dans un réseaux axial discret. La plupart des résultats obtenus sur le sujet le sont avec l'étude dynamique de chaînes axiales, mais ceux-ci peuvent être généralisés au cas de cordes, de tiges en torsion, ou même avec le comportement de poutres dans le plan ou hors plan [7]. C'est seulement récemment que la calibration de la longueur caractéristique du modèle au gradient de contrainte d'Eringen [5] a été justifiée à partir d'un procédé de continualisation des équations aux différences découlant des interactions locales au sein du réseau discret [8]. Le procédé de continualisation consiste en une approximation de l'opérateur en différences finies du modèle discret par des opérateurs différentiels basés sur un développement en série de Taylor [9] ou de développements rationnels [10]. En utilisant un tel procédé de continualisation, il a été démontré récemment que la flexion d'une chaîne élastoplastique, aussi appelée chaîne de Hencky, peut être approximée à partir du modèle de poutres élastiques non locales d'Eringen [8] [11]. La longueur caractéristique associée au modèle non local a été identifiée à partir de l'espacement des éléments constitutifs du réseau discret, donnant ainsi une justification physique à ce paramètre essentiel de la mécanique non locale des poutres en élasticité. Cependant, ces résultats ont été principalement obtenus

à partir d'interactions élastiques linéaires. Même si les réseaux discrets dont les éléments ont un comportement non linéaire peuvent aussi être continués en dynamique, pour la propagation d'ondes dans des chaînes axiales [9] [10] [12], très peu de résultats sont disponibles dans la littérature à ce sujet, en particulier pour un comportement quasi statique. L'étude de Triantafyllidis et Bardenhagen [13] porte sur comportement statique d'une chaîne axiale hyper-élastique et sur son lien avec le modèle non local d'élasticité au gradient. L'utilisation de la mécanique non locale en élasticité basée sur un gradient de déformation et de contrainte (en incluant le modèle non local d'Eringen) a aussi été étudiée pour identifier les effets d'échelles dans une chaîne axiale discrète avec une élasticité non linéaire des éléments [14]. L'élasticité non locale est alors couplée avec un comportement cohésif en phase de radoucissement. D'autres chaînes de Hencky avec des interactions axiales, en flexion ou en cisaillement ont été aussi récemment développées [15] [16]. Concernant les réseaux inélastiques, un modèle d'endommagement de poutres non locales a notamment été construit à partir d'une chaîne discrète de Hencky faite de rotules élastiques endommageables [17].

Dans cette étude, une chaîne discrète élastoplastique en flexion est étudiée. Un écrouissage et un radoucissement linéaires sont considérés avec une méthodologie initialement appliquée à des poutres continues avec une loi constitutive moment-courbure non locale [18]. Ce modèle élastoplastique peut être vu comme un type de modèle de Hencky composé de rotules élastoplastiques reliées entre elles par des éléments infiniment rigides. Hencky a développé sa théorie de chaîne discrète en 1920 [19] avec des interactions élastiques linéaires. La nature bilinéaire de la loi constitutive considérée conduit à des équations linéaires aux différences pour chacun des domaines élastique et plastique, dont la connexion se fait par le biais des conditions de continuité. Les solutions exactes au cas présent d'équations linéaires aux différences sont disponibles [20] [21]. Le paradoxe de Wood [22] [23] du déchargement élastique en présence de radoucissement est résolu avec un modèle non local cohésif et par conséquent une localisation du radoucissement dépendant complètement de l'espacement des rotules dans le réseau discret. Dans une poutre continue avec un radoucissement local, la longueur des éléments tend vers zéro, et la réponse globale après le pic de chargement tend vers une décharge totalement élastique du système.

C'est la première fois à notre connaissance qu'un modèle non local de poutre élastoplastique est construit à partir d'un réseau discret. Des modèles non locaux de poutres élastiques ont déjà été construits à partir de systèmes discrets, tels que celui de Hencky [8]. La généralisation à la mécanique de l'endommagement non local à partir d'une chaîne discrète élastique endommageable de Hencky a aussi été étudiée [17]. Cette étude est ici consacrée à la transition d'un modèle discret élastoplastique vers un modèle continu non local de poutre en utilisant un procédé rigoureux de continuation. Les solutions analytiques pour les modèles discrets comme continus sont obtenues. L'efficacité de l'approche non locale continue pour intégrer les effets d'échelle d'un tel système élastoplastique discret est présenté.

2 Problème de plasticité discrète en flexion

Le système discret en flexion, aussi étudié sous le nom de chaîne de Hencky, est présenté dans la Figure 1. Le système de longueur L se compose ici de n éléments rigides de longueur a (tels que $L = n \times a$) connectés entre eux par une rotule élastique endommageable de raideur initiale C .

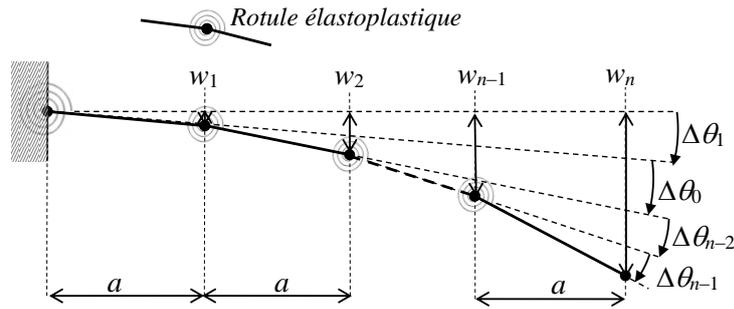


Figure 1 – Chaîne de Hencky en flexion

Le comportement en flexion de ce système, encasté à une extrémité, est étudié sous l'effet d'une charge transversale P [N] exercée à l'autre extrémité libre, voir Figure 2, ou d'une charge transversale uniformément répartie Q [N/m], voir Figure 3.

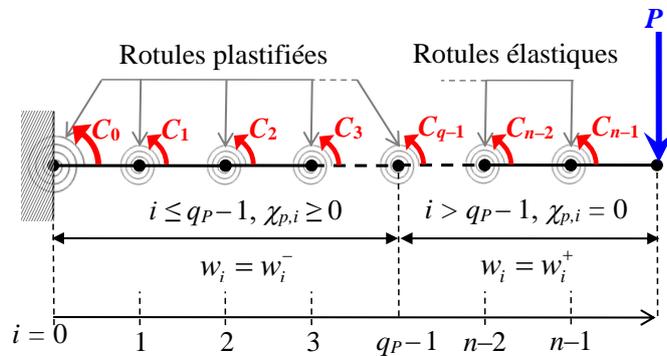


Figure 2 – Chaîne de Hencky en flexion sous l'effet d'une charge ponctuelle P

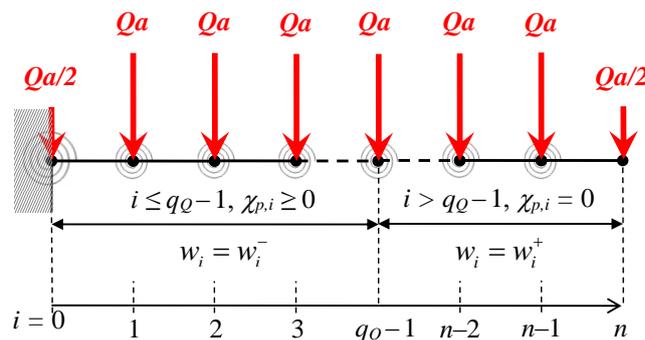


Figure 3 – Chaîne de Hencky en flexion sous l'effet d'une charge transversale Q

La loi constitutive dans chaque dans chaque rotule élastoplastique peut s'écrire sous la forme d'une relation moment-rotation :

$$M_i = C(\Delta\theta_i - \Delta\theta_{p,i}) \text{ with } \Delta\theta_i = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{a} \text{ and } \Delta\theta_{p,i} = a\chi_{p,i} \quad (1)$$

où M_i est le moment effectif exercé sur la $i^{\text{ème}}$ rotule élastoplastique, C est la raideur élastique de la rotule, $\Delta\theta_i$ est la rotation relative entre les deux segments adjacents et $\Delta\theta_{p,i}$ est la rotation plastique qui peut s'exprimer en fonction de $\chi_{p,i}$, la courbure plastique au nœud i par $\Delta\theta_{p,i} = \alpha\chi_{p,i}$. La transition du milieu discret à continu est basé sur la relation $C = EI/a$ où E est le module d'Young et I est le moment quadratique de la poutre continue équivalente. Hormis le comportement plastique potentiel, ce modèle est exactement le même que le système de Hencky, formulé en élasticité pure [19]. La loi constitutive élastoplastique peut alors s'écrire :

$$M_i = EI \left(\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{a^2} - \chi_{p,i} \right) \quad (2)$$

Une fonction de charge comprenant un écrouissage et un radoucissement linéaire est par la suite considérée pour chaque rotule élastoplastique,

$$f(M_i, M_i^*) = |M_i| - (M_p + M_i^*) \leq 0 \quad (3)$$

où M_p est le moment plastique et M_i^* est une variable statique additionnelle contrôlant le processus d'écrouissage et de radoucissement. M_i est le moment fléchissant, supposé positif durant toute la phase de chargement, tel que $|M_i| = M_i$. La fonction de charge dans les phases d'écrouissage et de radoucissement s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} M_i^* &= k_p^+ \chi_{p,i} \quad \text{si } \chi_{p,i} \in [0; \kappa_c] \quad \text{avec } \kappa_c = (m-1)M_p/k_p^+ \\ M_i^* &= M_u - M_p + k_p^- (\chi_{p,i} - \kappa_c) \quad \text{if } \chi_{p,i} \geq \kappa_c \quad \text{avec } M_u = mM_p \end{aligned} \quad (4)$$

où $k_p^+ \geq 0$ et $k_p^- \leq 0$ sont les modules d'écrouissage, voir Figure 4, et m est le rapport du moment fléchissant en limite élastique sur le moment fléchissant ultime, M_u , (i.e. $m = M_u/M_p$).

La condition de charge-décharge (condition de Kuhn-Tucker) définit l'évolution de la plasticité avec les conditions suivantes :

$$f(M_i, M_i^*) \leq 0, \quad \lambda_{p,i} \geq 0, \quad f(M_i, M_i^*) \lambda_{p,i} = 0 \quad (5)$$

Durant un cycle de chargement monotone, dès que la plasticité est initiée, le moment fléchissant demeure sur la surface limite et le critère de charge est vérifié, i.e. $f(M_i, M_i^*) = 0$, excepté pour la phase de déchargement en présence de radoucissement où :

$$M_i = M_p + M_i^* \quad (6)$$

L'équation d'équilibre au sein du système discret peut aussi s'exprimer par une formulation discrète telle que :

$$\frac{M_{i+1} - 2M_i + M_{i-1}}{a^2} = Q \quad (7)$$

Notons que le système couplé d'équations aux différences associées à la poutre élastoplastique discrète correspond exactement à la formulation en différences finies d'une poutre élastoplastique continue « locale ». La loi constitutive locale associée au milieu continu trouve une formulation en différences finies formulées en (2) basée sur la relation moment fléchissant-courbure suivante :

$$M = EI (w'' - \chi_p) \quad (8)$$

Il est à noter que dans le cadre dénommé comme local, le moment fléchissant dépend de la courbure totale et de la courbure plastique. Cette propriété ne sera plus valide pour la loi élastoplastique non locale issue du processus de continualisation du système discret considéré.

La fonction de charge en plasticité du milieu local continu est obtenue à partir de l'Eq.(3) :

$$f(M, M^*) = |M| - (M_p + M^*) \leq 0 \quad (9)$$

où M^* est une variable statique additionnelle qui contrôle le processus d'écroutissement et de radoucissement, voir Eq. (3). L'équation locale d'équilibre associée au système continu (c'est-à-dire avec un nombre infini d'éléments) s'écrit, selon le cas de chargement transversal :

$$M'' = 0 \text{ ou } M'' = Q \quad (10)$$

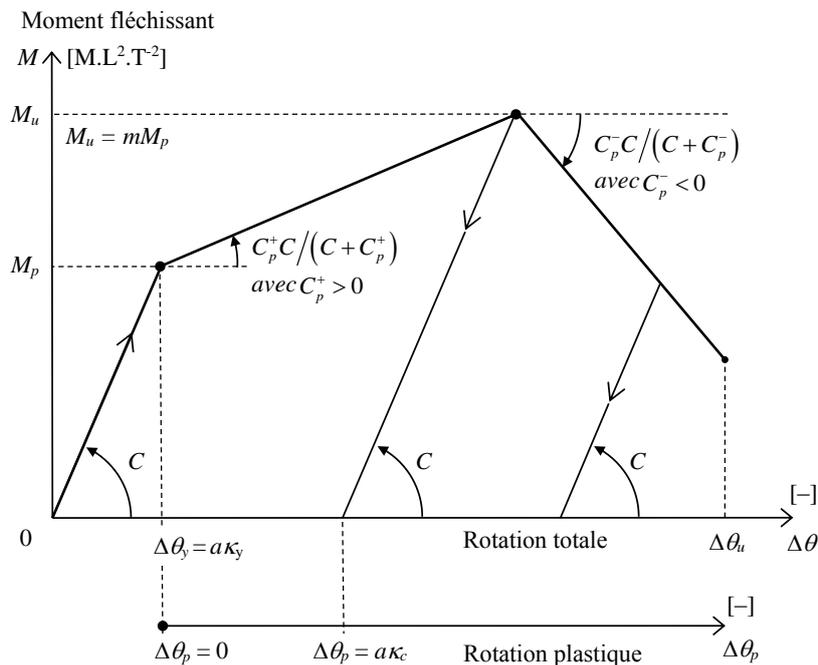


Figure 4 – Loi élastoplastique moment-courbure de chaque rotule élastoplastique.

Par la suite, les paramètres ont été dimensionnés au regard des caractéristiques physiques de la poutre équivalente continue, à savoir, L , E et I . Les paramètres adimensionnels suivants sont introduits pour correspondre à la coordonnée longitudinal x^* , la limite de la zone de plasticité l_0^* , la longueur caractéristique, λ_c , le déplacement transversal, w^* , le module d'écroutissement en flexion k_p^{+*} , le module d'écroutissement en flexion, k_p^{-*} , la courbure plastique, χ_p^* , la courbure en limite d'élasticité, κ_Y^* , la charge concentrée normalisée, β_p , la charge répartie normalisée, β_Q , voir Figure 2 et Figure 3 avec un système discret où :

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}; \quad l_0^* = \frac{l_0}{L}; \quad \lambda_c = \frac{l_c}{L}; \quad w^* = \frac{w}{L}; \quad k_p^{+*} = \frac{k_p^+}{EI}; \quad k_p^{-*} = \frac{k_p^-}{EI}; \quad \chi_p^* = \chi_p L; \\ \kappa_Y^* &= \kappa_Y L = \frac{M_p L}{EI}; \quad \beta_p = \frac{P}{P_y} = \frac{PL}{M_p} = \frac{PL}{EI\kappa_Y}; \quad \beta_Q = \frac{Q}{Q_y} = \frac{QL^2}{2M_p} = \frac{QL^2}{2EI\kappa_Y}. \end{aligned} \quad (11)$$

Par la suite, les dérivées spatiales de ces paramètres adimensionnés sont entendues comme étant des dérivées selon x^* , (i.e., $\partial/\partial x^*$).

3 Système discret en flexion

La loi élastique discrète donnée en (2) peut s'écrire :

$$\frac{M_i}{\Delta\theta_y} = C \left(\frac{\Delta\theta_i}{\Delta\theta_y} - \frac{\Delta\theta_{p,i}}{\Delta\theta_y} \right) \text{ avec } C = \frac{EI}{a} \quad (12)$$

Dans la phase d'érouissage, la fonction de charge discrète déduite de (4) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} M_i &= C\Delta\theta_i & \text{si } \Delta\theta_{p,i} &= 0 \\ M_i &= M_p + C_p^+ \Delta\theta_{p,i} & \text{si } \Delta\theta_{p,i} \in [0; a\kappa_c] & \text{ avec } \kappa_c = (m-1) \frac{M_p}{k_p^+} \text{ and } C_p^+ = \frac{k_p^+}{a} \end{aligned} \quad (13)$$

La Figure 4 montre la relation moment–courbure bilinéaire et fait apparaître les différents paramètres considérés. Dans la zone élastoplastique, i.e. for $x \in [0; l_0]$, $\chi_{p,i} \geq 0$, le déplacement transversal est noté w^- , tandis qu'il est noté w^+ dans la zone purement élastique, i.e. for $x \in [l_0; L]$, où $\chi_{p,i} = 0$.

3.1. Calcul exact du déplacement transversal

Dans le cas d'une charge concentrée, P , à l'extrémité libre de la poutre encastree (voir Figure 2), le moment M_i est égal à $P(L-ai)$. Dans le cas de rotations limitées, et tant que l'élasticité est préservée le long de la poutre discrète, ce système correspond à la chaîne de Hencky, telle qu'étudiée dans sa publication sur le sujet [19]. La plasticité apparaît dès que $PL \geq M_p$ se propage le long de la poutre depuis l'extrémité encastree, si $x_i/L \leq (1 - M_p/PL)$. Dans le cas d'une charge uniformément répartie, Q , la plasticité apparaît si $M_i = QL^2/2 \geq M_p$, (voir Figure 3) et la plasticité se propage si $x_i/L \leq 1 - \sqrt{2M_p/QL^2}$.

Ci-après le cas de chargement « P » correspond à la charge concentrée en extrémité libre tandis que le chargement « Q » correspond à la charge uniformément répartie. Les indices p ou q sont alors utilisés pour se référer à l'un de ces deux cas de charge. Dans une poutre continue, la zone plastique s'étend de $x = 0$ à $x = l_0$, où $l_0 = l_{0P}$ ou $l_0 = l_{0Q}$ selon le cas considéré. La limite de la zone plastique peut aussi s'écrire selon une forme adimensionnée à partir des charges normalisées β ($\beta = \beta_p$ ou $\beta = \beta_q$)

$$l_{0P}^* = 1 - \frac{1}{\beta_p} \text{ ou } l_{0Q}^* = 1 - \frac{1}{\sqrt{\beta_q}} \quad (14)$$

Le nombre de rotule plastifiées peut être définies :

$$\frac{q}{n} \leq l_0^* < \frac{q+1}{n} \Rightarrow q = \lfloor nl_0^* \rfloor + 1 \quad (15)$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la fonction partie entière de la valeur réelle x .

La longueur maximale de la zone plastifiée est atteinte lorsque le moment M_0 au droit de la section d'encastrement est égale à M_u , i.e. quand les charges normalisées, β_p ou β_q , atteignent la valeur m , voir Figure 4. Dès que β atteint le pic de charge (m), la phase de radoucissement s'initie et contrôle la localisation des déformations post-pic dans la première rotule tandis que les autres se déchargent

élastiquement sans qu'aucune autre propagation de la zone plastique ne s'opère. Le nombre maximal de rotules plastifiées, q_{\max} , peut être défini :

$$q_{P\max} = \left\lfloor n \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right\rfloor + 1 \text{ ou } q_{Q\max} = \left\lfloor n \sqrt{1 - \frac{1}{m}} \right\rfloor + 1 \quad (16)$$

L'activation discrète de la plasticité des rotules dans la phase d'érouissage selon la charge normalisée exercée est exposée en Figure 5 et Figure 6 pour différentes valeurs de n . Le problème discret est clairement un problème discontinu qui peut être efficacement représenté par le modèle continu local mais uniquement pour un nombre important d'éléments, ou de rotules élastoplastiques.

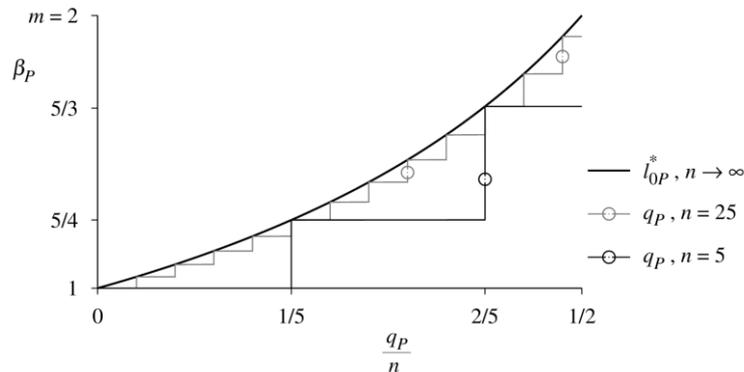


Figure 5 – Activation de la plasticité des q_P rotules élastoplastiques avec une poutre de 5 et 25 éléments ($n = 5$ et $n = 25$) dans le cas d'une charge concentrée en extrémité, P .

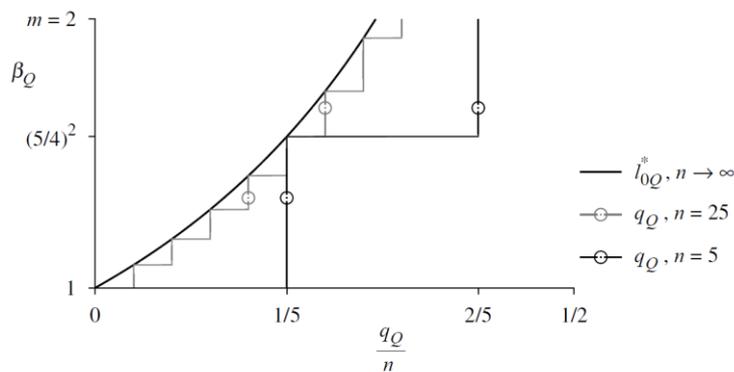


Figure 6 – Activation de la plasticité des q_Q rotules élastoplastiques avec une poutre de 5 et 25 éléments ($n = 5$ et $n = 25$) dans le cas d'une charge uniformément répartie, Q .

Pour rappel, dans la première partie de la poutre, pour $x \in [0; l_0[$, la plasticité apparaît, $\chi_p > 0$, et le déplacement transversal est noté w^- , tandis qu'il est noté w^+ dans la zone élastique, i.e., pour $x \in [l_0; L]$ où $\chi_p = 0$. Le problème aux différences peut être exprimé pour $i \in [0; q-1]$ selon les relations (2) et (4) à (6) comme suit :

$$M_i = P(L - ai) \text{ et } \chi_{p,i} = \frac{P(L - ai) - M_p}{k_p^+} \text{ où } \frac{\chi_{p,i}^*}{\kappa_y^*} = \frac{1}{k_p^{+*}} \left[\beta_P \left(1 - \frac{i}{n} \right) - 1 \right]$$

$$M_i = (L - ai)^2 \frac{Q}{2} \text{ et } \chi_{p,i} = \frac{(L - ai)^2 Q / 2 - M_p}{k_p^+} \text{ où } \frac{\chi_{p,i}^*}{\kappa_y^*} = \frac{1}{k_p^{+*}} \left[\beta_Q \left(1 - \frac{i}{n} \right)^2 - 1 \right] \quad (17)$$

Ces relations conduisent à des équations aux différences du second-ordre exprimées pour $i > 0$:

$$\frac{w_{i+1}^- - 2w_i^- + w_{i-1}^-}{a^2} = P(L - ai) \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{k_p^+} \right) - \frac{M_p}{k_p^+} \quad \text{ou} \quad (18)$$

$$\frac{w_{i+1}^- - 2w_i^- + w_{i-1}^-}{a^2} = \frac{Q}{2}(L - ai)^2 \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{k_p^+} \right) - \frac{M_p}{k_p^+}$$

avec des conditions aux limites du système discret telles que : $w_0 = 0$ et $w_1 = w_{-1}$. À partir de ces conditions aux limites, il est possible de déterminer le moment M_0 au premier nœud du réseau, à l'encastrement, en fonction du déplacement transversal du second nœud, w_1 , voir Figure 4.

$$M_0 = \frac{CC_p^+}{C + C_p^+} \left(\frac{2w_1}{a} + \frac{M_p}{C_p^+} \right) = PL \quad \Rightarrow \quad w_1 = a^2 \left[\frac{PL}{2} \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{k_p^+} \right) - \frac{M_p}{2k_p^+} \right] \quad \text{ou} \quad (19)$$

$$M_0 = \frac{CC_p^+}{C + C_p^+} \left(\frac{2w_1}{a} + \frac{M_p}{C_p^+} \right) = \frac{QL^2}{2} \quad \Rightarrow \quad w_1 = a^2 \left[\frac{QL^2}{4} \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{k_p^+} \right) - \frac{M_p}{2k_p^+} \right]$$

Il est à noter qu'en régime élastique, ou si $k_p^+ \rightarrow \infty$, il n'y a pas de rotation plastique, et la loi élastoplastique moment–courbure peut s'écrire $M_0 = 2Cw_0/a$. La première rotule à l'encastrement est alors considérée comme deux fois plus rigide que les autres, i.e., $C_0 = 2C$, comme déjà supposé par Hencky [19] et étudié avec d'autres loi de comportement [17] [8].

Dans le cas de charge P , la solution exacte de l'équation aux différences du second ordre donnée en (18) peut être vue comme un polynôme du troisième degré tel que $w_i = A_0 + A_1i + A_2i^2 + A_3i^3$, où les paramètres A_0 à A_3 sont des constantes à déterminer à partir des conditions aux limites [8], [21]. Au niveau de la section encastree ($w_0 = 0$ et $w_1 = w_{-1}$) donnent $A_0 = 0$ et $A_1 = -A_3$ respectivement. La dernière égalité permet de déterminer A_2 . L'insertion de cette fonction dans l'Eq.(18) conduit à la solution exacte du déplacement transversal adimensionné aux nœuds i du système discret de référence.

$$\frac{w_{i,P}^-}{\kappa_y^*} = \frac{\beta_p}{6n^3} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) (i - i^3) + \left[\beta_p \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) - \frac{1}{k_p^{+*}} \right] \frac{i^2}{2n^2} \quad (20)$$

Dans le régime élastique, si $\beta_p \leq 1$ ou $i \geq q_p$, $\chi_{P,i} = 0$, l'Eq. (20) peut être considérée avec $k_p^+ \rightarrow \infty$.

Le déplacement transversal adimensionné w_i^{+*} au nœud i du système discret élastique diffère légèrement de celui obtenu pour un milieu continu élastique, voir [8]. Dans le cas d'une charge concentrée P , la flèche en limite élastique, $\delta_{y,P}$, obtenue pour $\beta_p = 1$ est donnée par :

$$\frac{\delta_{y,P}}{L} = w_n^{+*} = \frac{\kappa_y^*}{3} \left(1 + \frac{1}{2n^2} \right) \quad (21)$$

Le rapport de la flèche adimensionnée (déplacement transversal à l'extrémité libre) sur celle en limite élastique est utilisé par la suite pour normaliser tous nos résultats, comme en Figure 7 et Figure 11.

Dans le cas de charge Q , la solution exacte de l'équation aux différences du second ordre donnée en (18) peut être vue comme un polynôme du quatrième degré tel que $w_i = B_0 + B_1i + B_2i^2 + B_3i^3 + B_4i^4$ où les paramètres B_0 à B_4 sont des constantes à déterminer à partir des conditions aux limites. Au niveau de la section encastree ($w_0 = 0$ et $w_1 = w_{-1}$) donnent $B_0 = 0$ et $B_1 = -B_3$ respectivement. L'insertion de cette solution dans la relation (18) permet ensuite l'identification des constantes B_2 , B_3 , et B_4 ,

indépendamment de la taille n du système considéré. La solution exacte du déplacement transversal adimensionné du système discret élastoplastique est alors le suivant :

$$\frac{w_{i,Q}^{-*}}{\kappa_y^*} = \frac{\beta_Q}{3n^3} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) (i - i^3) + \frac{\beta_Q}{12} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) \frac{i^4}{n^4} + \left[\beta_Q \left(1 - \frac{1}{6n^2} \right) \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) - \frac{1}{k_p^{+*}} \right] \frac{i^2}{2n^2} \quad (22)$$

Dans le régime élastique, si $\beta_Q \leq 1$ ou $i \geq q_Q$, $\chi_{p,i} = 0$, l'Eq. (22) peut être considérée avec $k_p^+ \rightarrow \infty$ pour obtenir le déplacement transversal adimensionné w_i^{+*} au nœud i du système discret élastique comme déjà formulé avec un tel système élastique [8]. Il est à noter que, là encore, ce déplacement du système discret élastique diffère légèrement de celui obtenu pour un milieu continu élastique. Dans le cas d'une charge uniforme Q , la flèche en limite élastique, $\delta_{y,Q}$, obtenue pour $\beta_Q = 1$ est donnée par :

$$\frac{\delta_{y,Q}}{L} = w_n^{+*} = \frac{\kappa_y^*}{4} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) \quad (23)$$

Le rapport de la flèche adimensionnée (déplacement transversal à l'extrémité libre) sur celle en limite élastique est utilisée par la suite pour normaliser tous nos résultats, comme en Figure 8 et Figure 12.

3.2. Calcul itératif du déplacement transversal aux nœuds

En phase élastique, d'érouissage puis de radoucissement, la loi constitutive est donnée, voir Figure 4, par :

$$M_i = EI \chi_i \quad \text{si } \chi_i \leq \kappa_y \quad \text{et si } \chi_{p,i} = 0$$

$$M_i = M_p + k_p^+ \chi_{p,i} \quad \text{si } \chi_{p,i} \in [0; \kappa_c] \quad \text{avec } \kappa_c = (m-1) \frac{EI}{k_p^+} \kappa_y \quad (24)$$

$$M_i = M_u + k_p^- (\chi_{p,i} - \kappa_c) \quad \text{si } \chi_{p,i} \geq \kappa_c \quad \text{avec } M_u = m M_p \text{ et } M_p = EI \kappa_y$$

Le moment discret adimensionné μ_i au nœud i peut s'écrire selon le cas de charge, voir Eq. (17) comme suit :

$$\mu_{i,P} = \beta_P \left(1 - \frac{i}{n} \right) \quad \text{ou} \quad \mu_{i,Q} = \beta_Q \left(1 - \frac{i}{n} \right)^2 \quad (25)$$

En phase d'érouissage, les conditions limites à l'encastrement, i.e., $w_0 = 0$ et $w_1 = w_{-1}$, donne le déplacement transversal adimensionné du premier nœud adjacent w_1^{-*} :

$$w_1^{-*} = \frac{\kappa_y^*}{2n^2} \left[\mu_0 \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) - \frac{1}{k_p^{+*}} \right] \quad \text{avec } \mu_0 = \mu_{0,P} = \beta_P \text{ ou } \mu_0 = \mu_{0,Q} = \beta_Q \quad (26)$$

Par itération, les déplacements adimensionnés des nœuds suivants, w_i^{-*} , dans la zone plastique peuvent être calculés :

$$w_{i+1}^{-*} = \frac{\kappa_y^*}{n^2} \left[\mu_i \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) - \frac{1}{k_p^{+*}} \right] + 2w_i^{-*} - w_{i-1}^{-*} \quad (27)$$

avec $\mu_i = \mu_{i,P}$ et $i \in [0; q_P - 2]$ ou $\mu_i = \mu_{i,Q}$ et $i \in [0; q_Q - 2]$.

À l'interface élastique-élastoplastique, i.e., pour $i=q-1$ avec $q=q_P$ ou $q=q_Q$, la condition de continuité entraîne $w_{q-1}^{*-} = w_{q-1}^{*+}$ et $w_q^{*-} = w_q^{*+}$. L'expression de la relation élastoplastique moment-courbure au niveau du $(q-1)^{\text{ème}}$ et $q^{\text{ème}}$ nœud donne la relation de correspondance suivante :

$$w_q^{*+} = \frac{\kappa_y^*}{n^2} \left[\mu_{q-1} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) - \frac{1}{k_p^{+*}} \right] + 2w_{q-1}^{*-} - w_{q-2}^{*-} \quad \text{et} \quad (28)$$

$$w_{q+1}^{*+} = \frac{\kappa_y^*}{n^2} \mu_q + 2w_q^{*+} - w_{q-1}^{*-}$$

avec $\mu_q = \mu_{q,P}$ et $q=q_P$ ou $\mu_q = \mu_{q,Q}$ et $q=q_Q$.

Le déplacement transversal des nœuds dans la zone élastique, w_i^{*+} , peut être ensuite calculé de façon itérative à partir de la relation suivante :

$$w_{i+1}^{*+} = \frac{\kappa_y^*}{n^2} \mu_i + 2w_i^{*+} - w_{i-1}^{*+} \quad (29)$$

avec $\mu_i = \mu_{i,P}$ et $i \in [q_P+2;n]$ ou avec $\mu_i = \mu_{i,Q}$ et $i \in [q_Q+2;n]$.

Dès que β_P ou β_Q atteint m , la première rotule se radoucit, avec un module plastique négatif. Les conditions aux limites à l'encastrement donnent le déplacement adimensionné du premier nœud adjacent w_1^{*-} en phase de radoucissement selon la relation (24) :

$$w_1^{*-} = \frac{\kappa_y^*}{2n^2} \left[\mu_0 \left(1 + \frac{1}{k_p^{-*}} \right) + \frac{m-1}{k_p^{+*}} - \frac{m}{k_p^{-*}} \right] \quad (30)$$

où $\mu_0 = \mu_{0,P} = \mu_P$ ou $\mu_0 = \mu_{0,Q} = \mu_Q$ selon le cas de charge considéré.

Les rotules suivantes, dans la partie plastique, pour $i < q_{Pmax}$ ou $i < q_{Qmax}$, se déchargent de façon élastique tandis la courbure plastique atteinte au pic de charge demeure constante durant tout le processus de déchargement. Le déplacement transversal adimensionnel peut alors être calculé par itérations à partir du premier nœud :

$$w_{i+1}^{*-} = \frac{\kappa_y^*}{n^2} \left[\left(\beta_p + \frac{m}{k_p^{+*}} \right) \left(1 - \frac{i}{n} \right) - \frac{1}{k_p^{+*}} \right] + 2w_i^{*-} - w_{i-1}^{*-} \quad \text{ou} \quad (31)$$

$$w_{i+1}^{*-} = \frac{\kappa_y^*}{n^2} \left[\left(\beta_Q + \frac{m}{k_p^{+*}} \right) \left(1 - \frac{i}{n} \right)^2 - \frac{1}{k_p^{+*}} \right] + 2w_i^{*-} - w_{i-1}^{*-}$$

En phase de radoucissement, le déplacement transversal adimensionné aux nœuds dans la partie purement élastique, pour $i \geq q_{Pmax}$ or $i \geq q_{Qmax}$, peut être calculé selon la relation (28) à partir des conditions de continuité à l'interface élastique-élastoplastique. La flèche normalisée, $w^*(1)/\kappa_y^*$ de l'ensemble du cycle de chargement du système élastoplastique discret en flexion est présenté en Figure 7 et Figure 8 pour chacun des cas de charges avec différents nombres, n , d'éléments constitutifs du réseau. Pour n suffisamment grand, un effet « snap-back » apparaît. Cet effet est régi par la taille, a , du premier élément, soumis à l'effet radoucissant de la première rotule, au regard de la taille du réseau entier, L , avec $a/L = 1/n$.

Quand $n \rightarrow \infty$, le radoucissement de la poutre continue locale est asymptotiquement obtenu tandis que la taille du premier élément tend vers zéro. Les Figure 7 et Figure 8 montrent alors que la réponse globale après le pic de charge tend vers une décharge totalement élastique de l'ensemble de la poutre. Connue sous le nom de paradoxe de Wood, cet effet apparaît pour les poutres continues en phase de radoucissement [22].

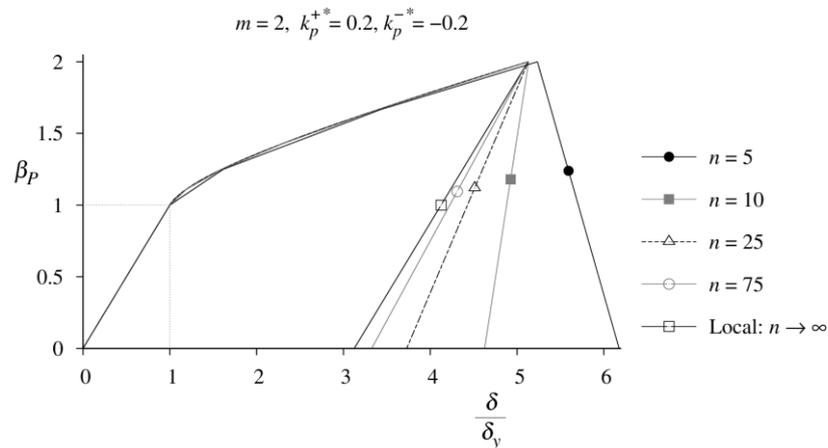


Figure 7 – Flèche adimensionnée du système élastoplastique discret en flexion dans le cas d'une charge transversale concentrée, P , à l'extrémité libre, avec $m = 2$, $k_p^{+*} = 0,2$ et pour différentes valeurs de n (correspondant au nombres d'éléments discret du système) .

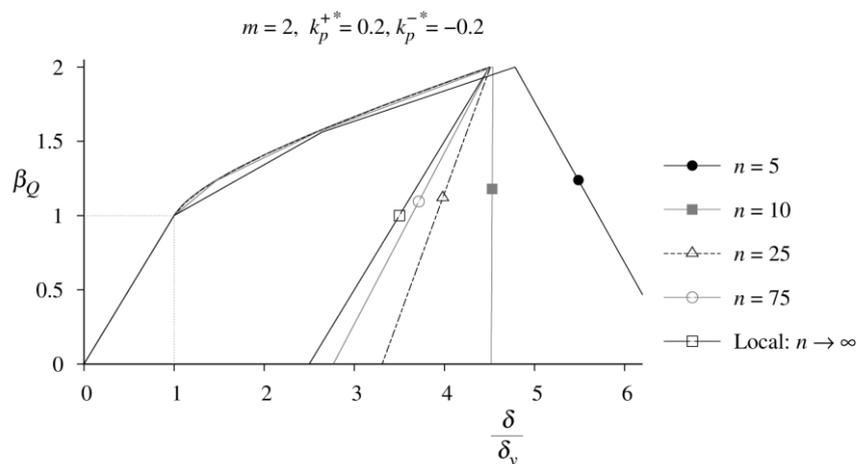


Figure 8 – Flèche adimensionnée du système élastoplastique discret en flexion dans le cas d'une charge transversale uniformément répartie, Q , avec $m = 2$, $k_p^{+*} = 0,2$ et pour différentes valeurs de n (correspondant au nombres d'éléments discret du système).

4 Continualisation des interactions élastoplastiques en flexion

Les équations discrètes sont maintenant étendues à un milieu continu équivalent via une méthode dite de « continualisation », appliquée au déplacement transversal, à la courbure plastique, et au moment fléchissant. Dans cette partie, un modèle représentatif et continualisé d'une poutre est établi dans le but de prendre en compte les effets d'échelle liés au problème élastoplastique microstructuré considéré. La

propagation de la plasticité en phase d'écroutissage est alors intégrée dans un modèle continu non local. Ce continuum produit un modèle de poutre non local élastoplastique entièrement couplé, capable, par exemple, de prédire la propagation de la plasticité le long de la poutre en régime d'écroutissage.

4.1. Méthode de continualisation pour des lois élastoplastiques non locales

Les relations entre le système discret et continu équivalent $w_i = w(x = ia)$, $\chi_{pi} = \chi_{p,i}(x = ia)$ et $M_i = M(x = ia)$ supposent une continuité spatiale de ces variables et des évolutions et suffisamment douces pour que celles-ci puissent être pertinément formulées par un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} w(x+a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \partial_x^k}{k!} w(x) = e^{a\partial_x} w(x) \\ \chi_p(x+a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \partial_x^k}{k!} \chi_p(x) = e^{a\partial_x} \chi_p(x) \\ \text{et } M(x+a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k \partial_x^k}{k!} M(x) = e^{a\partial_x} M(x) \end{aligned} \quad (32)$$

où $\partial_x = \partial/\partial x$ est la dérivée spatiale et $e^{a\partial_x}$ est l'opérateur pseudo différentiel comme introduit par exemple dans [10] [24] [25] [26]. La méthode consistant à dériver des équations continues d'ordre supérieur, dans le cadre d'interactions discrètes au sein d'un réseau n'est pas nouvelle et a déjà été utilisée le siècle dernier par Piola en élasticité notamment (voir [27] pour une analyse exhaustive des travaux de Piola sur le sujet). Ainsi, en développant l'opérateur aux différences finies à partir des relations données en (32), l'Eq.(2) peut aussi s'écrire :

$$M = EI \left[\frac{4}{a^2} \sinh^2 \left(\frac{a}{2} \partial_x \right) w - \chi_p \right] \quad (33)$$

Pour une variation spatiale continue et assez lisse de la variable considérée, l'opérateur pseudo-différentiel peut être approché par une série de Taylor :

$$\frac{4}{a^2} \sinh^2 \left(\frac{a}{2} \partial_x \right) = \partial_x^2 + \frac{a^2}{12} \partial_x^4 + O(a^4) \quad (34)$$

Cette relation conduit à une loi élastoplastique moment-courbure similaire à une loi au gradient :

$$M = EI \left[w'' + \frac{a^2}{12} w^{(4)} - \chi_p \right] + O(a^4) \quad (35)$$

Cette loi au gradient typique fait apparaître une longueur caractéristique, l_c^2 , égale à $a^2/12$. Une solution numérique peut être directement obtenue à partir de cette équation continualisée au second ordre si des conditions aux limites d'ordre supérieur sont considérées. Cependant, l'opérateur pseudo-différentiel peut aussi être approché efficacement par le biais de l'approximant de Padé, comme l'ont montré des études en dynamique [10] [24] [25] [26], ou en quasi-statique et élasticité pure [8] ou, plus récemment, en mécanique de l'endommagement [17]. Pour éviter les difficultés associées aux conditions limites d'ordre supérieur dans la résolution de tels schémas de continualisation [28], l'approximant de Padé de l'opérateur Laplacien aux différences finies est utilisé.

$$\frac{4}{a^2} \sinh^2\left(\frac{a}{2} \partial_x\right) = \frac{\partial_x^2}{1 - \frac{a^2}{12} \partial_x^2} + \dots \text{ avec } l_c^2 = \frac{a^2}{12} \quad (36)$$

L'Eq.(35) peut alors se reformuler par la relation analytique suivante :

$$M - l_c^2 M'' = EI \left(w'' - \chi_p + l_c^2 \chi_p'' \right) \quad (37)$$

La loi constitutive non locale continualisée peut donc s'écrire à partir de la relation discrète moment–courbure donnée en (2). La nouvelle loi élastoplastique non locale intègre les effets d'échelle affectant le moment et le gradient de courbure plastique. Dans un certain sens, l'effet d'échelle affecte à la fois les variables internes relatives à l'élasticité et à la plasticité. Il est à noter que ce modèle non local est valide pour une charge monotone comme cyclique. Ce modèle non local correspond à un modèle de type Eringen quand la courbure plastique peut être ignorée [8]. Cette loi non locale peut aussi être vue comme une loi moment–courbure élastoplastique non locale entièrement couplée. Dans la phase d'écrouissage et de radoucissement, la fonction de charge, déduite de (24), est simplement donnée par :

$$\begin{aligned} M &= M_p + k_p^+ \chi_p & \text{for } \chi_p \in [0; \kappa_c] & \text{ with } M_p = EI \kappa_y \\ M &= M_u + k_p^- (\chi_p - \kappa_c) & \text{for } \chi_p \geq \kappa_c & \text{ with } M_u = m M_p \end{aligned} \quad (38)$$

Il est à noter que la loi élastoplastique constitutive est non locale à l'égard du gradient de moment fléchissant comme du gradient de courbure plastique, tandis que la fonction de charge est conservée dans une forme locale du fait de la continualisation en un même point des deux variables précitées. Cette loi non locale continualisée est valide pour la propagation de la zone élastoplastique.

Dans un premier temps, deux parties de la poutre élastoplastique non locale continue doivent être distinguées, comme évoqué en partie 3.2 et 3.3. Dans la première partie, allant de la section encastree à la limite élastoplastique continue, l_0 , la plasticité opère, puisque $\chi_p > 0$ quand $x \in [0; l_0[$. Le déplacement transversal est noté avec l'exposant «⁻», comme w^- , tandis que dans la seconde partie, au-delà de l_0 , le comportement de la poutre est purement élastique, puisque $\chi_p = 0$ quand $x \in [l_0; L]$, il est noté avec l'exposant «⁺», comme w^+ .

La loi cohésive non locale est aussi dérivée d'une procédure de continualisation en présence d'une discontinuité de variable cinématique, $[\Delta\theta]$, et peut s'écrire :

$$M = EI \left(\frac{[\Delta\theta]}{a} - \chi_p \right) \text{ avec } [\Delta\theta] = \theta^+ - \theta^- = \left[\frac{w(x+a) - w(x)}{a} \right] - \left[\frac{w(x) - w(x-a)}{a} \right] \quad (39)$$

où la fonction de charge cohésive en régime d'écrouissage et de radoucissement est similaire à celle formulée en (38). Cette loi cohésive, associée avec des discontinuités cinématiques, sera utilisée au niveau de la section encastree en phase d'écrouissage comme de radoucissement élastoplastique. Elle joue un rôle crucial en phase de radoucissement comme détaillé par la suite en partie 4.4.

Pour résumer, la loi constitutive non locale élastoplastique distribué, comme la loi cohésive associée, dépendent de la longueur des éléments périodiques du réseau, a . Ces lois constitutives peuvent être considérées comme non locales, dans le sens où elles ne dépendent pas de variables d'état, mais intègrent aussi leurs gradients ou leurs valeurs en d'autres points.

4.2. Conditions aux limites pour la poutre non locale et continuité à l'interface élastoplastique

En fait, deux types de conditions aux limites peuvent être envisagés dans une telle configuration :

- Conditions limites cinématiques locales : elles supposent notamment une rotation nulle à l'encastrement, i.e., $w^{-}(0) = 0$.
- Conditions limites statiques équivalentes ou cohesives : elles utilisent une loi cohésive aux interfaces élastoplastiques. À l'encastrement, elles supposent que le moment fléchissant dans la première rotule puisse s'exprimer en fonction de la rotation du premier élément ou du déplacement du premier nœud adjacent pour toute la phase d'écroutissage comme de radoucissement [17]. Cette relation provient en fait de la condition limite cinématique non locale qui implique $w^{-}(a) = w^{-}(-a)$, et qui définit le déplacement transversal du nœud le plus proche de la section encastree comme une fonction de la charge β .

$$M(0) = EI \left[\frac{2w(a)}{a^2} - \chi_p(0) \right] \text{ avec } M(0) = M_p + k_p^+ \chi_p(0) \quad (40)$$

$$\Rightarrow \frac{w^{-*}(1/n)}{\kappa_y^*} = \frac{1}{2n^2} \left[\beta + \frac{1}{k_p^{+*}} (\beta - 1) \right] \text{ avec } \beta = \beta_p \text{ ou } \beta = \beta_Q$$

Le déplacement transversal adimensionné de la poutre en $x=a$ ou $x^* = 1/n$, peut aussi être directement calculé à partir des solutions exactes établies en (20) ou (22) selon la configuration de charge. Dès que la charge atteint le pic, i.e., $\beta_p = m$ ou $\beta_Q = m$, la phase de radoucissement s'opère dans la première rotule au niveau de l'encastrement, en $x=0$, tandis que le reste de la poutre se décharge de façon élastique, y compris dans le reste de la zone plastique. À ce stade, les conditions limites locales cinématiques ne peuvent pas être considérées. Seules les conditions limites statiques équivalentes, dans le cadre d'un modèle cohésif non local, sont pertinentes. Au sein de la zone plastique qui s'étend alors sur sa longueur maximale, i.e., jusqu'à $l_{0P} = 1 - 1/m$ ou $l_{0Q} = 1 - m^{-1/2}$, la courbure plastique atteinte au pic, χ_{Pmax} , demeure constante. Selon l'Eq.(24) et en utilisant la même méthodologie, la solution exacte du déplacement transversal en $x=a$ peut être définie comme :

$$\frac{w^{-*}(1/n)}{\kappa_y^*} = \frac{1}{2n^2} \left[\beta + \frac{1}{k_p^{+*}} (m - 1) + \frac{1}{k_p^{+*}} (\beta - m) \right] \quad \text{avec } \beta = \beta_p \text{ or } \beta = \beta_Q \quad (41)$$

À l'interface élastique-élastoplastique, en $x=l_0$, les deux types de conditions limite, locales cinématiques et statiques équivalentes conduisent au même résultat pour les phases d'écroutissage comme de radoucissement. Le processus de continualisation suppose que l'abscisse de l'interface élastique-élastoplastique, $x=l_0$, avec $l_0 = l_{0P}$ ou $l_0 = l_{0Q}$, s'accroisse continument avec la charge appliquée. Les conditions suivantes, déduites des équations discrètes continualisée, sont considérées :

- Continuité des déplacements transversaux : $w^{-}(l_0) = w^{+}(l_0)$.
- Continuité du moment fléchissant aux nœuds : $w^{-}(l_0 - a) + w^{-}(l_0 + a) = w^{+}(l_0 - a) + w^{+}(l_0 + a)$ puisque $\chi_p(l_0) = 0$ and $w^{-}(l_0) = w^{+}(l_0)$, voir Eq. (2).
- Continuité de la rotation discrète : $w^{-}(l_0 + a) - w^{-}(l_0 - a) = w^{+}(l_0 + a) - w^{+}(l_0 - a)$.

Cette dernière condition conduit à $w^{-}(l_0) = w^{+}(l_0)$ et $w^{-}(l_0 - a) = w^{+}(l_0 - a)$ et/ou $w^{-}(l_0 + a) = w^{+}(l_0 + a)$ comme précédemment démontré et mis en pratique dans le cas d'un modèle de poutres non locales endommageables continualisée [17]. La prise en compte de seulement deux de ces trois conditions de continuité en $l_0 - a$, l_0 and $l_0 + a$ conduit exactement à la même solution analytique du déplacement

transversal continué, $w^+(x)$, dans la partie élastique. Par conséquence, les déplacements sont continus sur toute la longueur de la poutre non locale continué mais leurs dérivées, e.g., la rotation n'est plus continue à l'interface élastoplastique.

4.3. Conditions aux limites pour la poutre non locale et la continuité de l'interface élastoplastique

Le modèle continu de poutre est présenté en Figure 9 et Figure 10 selon le cas de charge considéré. Dans le cas d'une charge concentrée, P , le moment fléchissant varie linéairement selon x et $M'' = 0$.

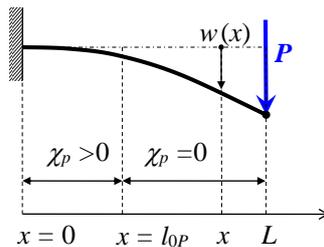


Figure 9 – Modèle continu de poutre encastree chargée transversalement et ponctuellement par une charge P en son extrémité libre.

La dérivée de la fonction de charge conduit à $M'' = M''' = k_p^+ \chi_p''$ et par conséquence $\chi_p'' = 0$. Par conséquence, le modèle élastoplastique continu non local établi en (37) conduit à loi constitutive pour le milieu local formulée en (8). Pour un tel cas de chargement, le modèle continué et le modèle local élastique sont identiques, sauf éventuellement dans le cas de conditions aux limites particulière, comme présenté ensuite. Le problème continu peut être formulé sous forme d'une équation différentielle du second ordre :

$$\frac{w_p^{-*''}}{\kappa_y^*} = \beta_p (1 - x^*) \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) - \frac{1}{k_p^{+*}} \quad (42)$$

Dans le cas de charge Q , le moment fléchissant présente une évolution parabolique selon x et $M'' = Q$. La fonction de charge conduit à $\chi_p'' = Q/k_p$ et la loi élastoplastique constitutive est enrichie selon (37) par l'introduction de la longueur caractéristique l_c :

$$M - l_c^2 Q = EI \left(w_Q'' - \chi_p + l_c^2 \frac{Q}{k_p} \right) \quad (43)$$

Si $x^* \in [0; l_{0Q}^*]$, le modèle élastoplastique non local établi en (37) conduit à une équation différentielle du second-ordre pour le déplacement transversal, qui peut être exprimé sous forme adimensionné :

$$\frac{w_Q^{-*''}}{\kappa_y^*} = \beta_Q (1 - x^*)^2 \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) - 2\beta_Q l_c^{*2} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) - \frac{1}{k_p^{+*}} \quad \text{avec } l_c^{*2} = \frac{1}{12n^2} \quad (44)$$

où β_Q est le paramètre de charge répartie adimensionné et normalisé introduit en (11).

En intégrant deux fois (42) selon x^* , et en utilisant la condition limite à l'encastrement $w^-(0) = 0$, l'équation suivante est obtenue dans la partie plastifiée de la poutre continué, pour $x^* \in [0; l_0^*]$ où

$l_0^* = l_{0P}^*$ ou $l_0^* = l_{0Q}^*$ indépendamment des conditions limites, locales cinématiques ou statiques équivalentes.

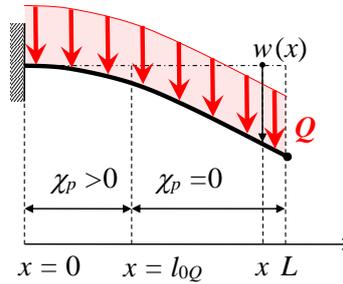


Figure 10 – Modèle continu de poutre encastree chargée transversalement et uniformément sur sa longueur par une charge linéaire Q .

Dans le cas de conditions limites locales cinématiques, avec $w^-(0) = 0$, les solutions du déplacement transversal adimensionné selon le chargement considéré sont notées $w_{P,K}^-$ ou $w_{Q,K}^-$ dans la zone plastique et sont données par les relations suivantes :

$$\frac{w_{P,K}^-}{\kappa_y^*} = \frac{\beta_P}{6} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}}\right) \left[(1-x^*)^3 - 1 \right] - \frac{x^{*2}}{2k_p^{+*}} + \frac{\beta_P}{2} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}}\right) x^* \quad (45)$$

$$\frac{w_{Q,K}^-}{\kappa_y^*} = \frac{\beta_Q}{12} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}}\right) \left[(1-x^*)^4 - 1 \right] - \left[2l_c^{*2} \beta_Q \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}}\right) + \frac{1}{k_p^{+*}} \right] \frac{x^{*2}}{2} + \frac{\beta_Q}{3} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}}\right) x^*$$

Dans le cas de charge P seulement, la réponse élastoplastique apparaît comme indépendante de n , le nombre d'éléments contenus dans le réseau de référence. Par conséquence, cette réponse n'intègre aucun effet d'échelle et ne peut se réduire qu'à une réponse d'une poutre élastoplastique locale continue. Dans le cas de charge distribuée, Q , cette insensibilité à n disparaît du fait de la présence du terme en l_c^{*2} .

Dans le cas de conditions limites statiques équivalentes, relatives à un modèle cohésif, à l'encastrement l'égalité $w^-(a) = w^-(-a)$ conduit aux solutions alternatives suivantes :

$$\frac{w_{P,S}^-}{\kappa_y^*} = \frac{\beta_P}{6} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}}\right) \left[(1-x^*)^3 - 1 \right] - \frac{x^{*2}}{2k_p^{+*}} + \frac{\beta_P}{2} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}}\right) \left(1 + \frac{1}{3n^2}\right) x^* \quad (46)$$

$$\frac{w_{Q,S}^-}{\kappa_y^*} = \frac{\beta_Q}{12} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}}\right) \left[(1-x^*)^4 - 1 \right] - \left[2l_c^{*2} \beta_Q \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}}\right) + \frac{1}{k_p^{+*}} \right] \frac{x^{*2}}{2} + \frac{\beta_Q}{3} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) x^*$$

Il est à noter que lorsque $n \rightarrow \infty$, i.e., quand le cas local peut être considéré à la fois cinématique et statique équivalent, ces deux types de conditions aux limites tendent vers le même résultat.

Notons également qu'en introduisant les abscisses aux nœuds telles que $x^* = j/n$ ou j est un entier tel que $j \leq q_{0P}$ ou $j \leq q_{0Q}$ dans les relations en (46), les solutions des déplacements transversaux obtenus correspondent alors exactement à ceux des solutions exactes présentées en (20) pour P et (22) pour Q .

En d'autres termes, le modèle élastoplastique non local continué, s'il est considéré comme cohésif avec des conditions limites de type statiques équivalentes, aboutit aux solutions exactes du système discret de référence calculées aux nœuds par résolution analytique des équations aux différences.

Dans la partie purement élastique de la poutre, les déplacements transversaux sont obtenus par double intégration de la courbure. Les constantes sont calculées au regard de deux conditions limites à l'interface élastique-élastoplastique en $x = l_0$ avec $l_0 = l_{0P}$ ou $l_0 = l_{0Q}$, voir Eq. (14). La première condition traduit la continuité du déplacement transversal : $w^-(l_0) = w^+(l_0)$ donne pour chacun des cas de charge :

$$\frac{w_P^{+*}}{\kappa_y^*} = \frac{\beta_P}{6} \left[(1-x^*)^3 - (1-l_{0P}^*)^3 \right] + B_{P1} (x^* - l_{0P}^*) + \frac{w_P^-(l_{0P}^*)}{\kappa_y^*} \quad (47)$$

$$\frac{w_Q^{+*}}{\kappa_y^*} = \frac{\beta_Q}{12} (1-x^*)^4 - \beta_Q l_c^{*2} (x^{*2} - l_{0Q}^{*2}) + B_{Q1} (x^* - l_{0Q}^*) + \frac{w_Q^-(l_{0Q}^*)}{\kappa_y^*} - \frac{1}{12\beta_Q}$$

où B_{P1} et B_{Q1} sont des constantes à définir selon la seconde condition à l'interface selon le type de conditions limites considérées, qui doit demeurer cohérent avec celui adopté à l'encastrement.

Dans le cas local cinématique, la seconde condition à l'interface implique simplement une continuité de la rotation en $x = l_0$, soit $w'^-(l_0) = w'^+(l_0)$, et implique :

$$B_{P1} = B_{PK} = \frac{w_P^{-*'}(l_{0P}^*)}{\kappa_y^*} + \frac{1}{2\beta_P} = \frac{\beta_P}{2} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) + \frac{1}{k_p^{+*}} \left(\frac{1}{2\beta_P} - 1 \right) \quad (48)$$

$$B_{Q1} = B_{QK} = \frac{\beta_Q}{3} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) - \frac{1}{k_p^*} \left[\frac{1}{3\sqrt{\beta_Q}} + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\beta_Q}} \right) (2\beta_Q l_c^{*2} + 1) \right]$$

Il est à noter que, dans le cas de charge P , le déplacement transversal de la partie élastique est indépendant du nombre d'éléments n contenus dans le système discret et, comme précédemment observé, dans la partie élastoplastique la réponse traduit celle d'un système élastoplastique local continu, i.e., pour $n \rightarrow \infty$, tracé à titre comparatif dans les Figure 7 et Figure 11 ou dans les Figure 8 et Figure 12.

Dans le cas de charge Q , en limite élastique, $\beta_Q \rightarrow 1$ conduit à $l_{0Q} \rightarrow 0$ et à $B_{QK} \rightarrow 1/3$. Par conséquent, l'Eq.(47) conduit à :

$$w_{Q,K}^{-*}(1) = \frac{\kappa_y^*}{4} \left(1 - \frac{1}{3n^2} \right) \quad (49)$$

Par conséquent, à la différence du cas de charge P , la réponse élastoplastique locale obtenue pour $n \rightarrow \infty$ et tracée en Figure 8 se différencie du cas cinématique local, comme montré en Figure 12. Les conditions limites cinématiques locales engendrent un effet surprenant de raidissement, déjà observé dans des études précédentes sur des poutres non locales d'Eringen avec un chargement distribué [8]. Cet effet engendré s'oppose par ailleurs au léger radoucissement (ou diminution de l'élasticité apparente) engendré par la discrétisation de la matière présenté par l'Eq.(23). En réalité, un effet non local apparaît avec une charge répartie dès la phase élastique tandis qu'il n'existe pas avec une charge

ponctuelle [8]. Vu les résultats du modèle non local continué avec des conditions limites de type cinématique non locale, voir Figure 12 et Figure 13, l'utilisation de conditions de type statique équivalent sont largement préférables.

Dans le cas statique équivalent, (pouvant également être perçues comme des conditions non locales cinématiques), la seconde condition à l'interface est $w^-(l_0-a) = w^+(l_0-a)$, et/ou $w^-(l_0+a) = w^+(l_0+a)$, est, comme précédemment exposé en partie 4.2, appliquée et testée dans une continué similaire en mécanique de l'endommagement [17]. Les relations suivantes sont alors obtenues :

$$B_{P1} = B_{PS} = \frac{1}{k_p^{**}} \left(\frac{\beta_p}{2} + \frac{1}{2\beta_p} - 1 \right) + \frac{\beta_p}{2} \left(1 + \frac{1}{3n^2} \right) \quad (50)$$

$$B_{Q1} = B_{QS} = \frac{\beta_Q}{3} \left(1 + \frac{1}{k_p^{**}} \right) \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{3k_p^{**} \sqrt{\beta_Q}} \left(1 + \frac{\beta_Q}{n^2} \right) - \frac{2\beta_Q l_c^{*2} + 1}{k_p^{**}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\beta_Q}} \right)$$

Notons que $\beta_p \rightarrow 1$, conduit à $B_{PS} \rightarrow (1+1/3n^2)/2$ et $\beta_Q \rightarrow 1$ conduit à $B_{QS} \rightarrow (1+1/n^2)/3$. Par conséquent, l'Eq. (47) est en parfait accord avec l'Eq. (21) et (23) puisque la flèche en limite élastique de la poutre non locale continuée correspond exactement au système discret de référence. Comme déjà observé [8], le modèle non local obtenu par continué du système discret donne la réponse exacte en phase élastique si et seulement les conditions limites statiques équivalentes (ou cohésives) sont employées.

Au-delà de la limite d'élasticité, le déplacement transversal de la partie élastique pure de la poutre, pour $x^* \in [l_0^*, 1]$ avec $l_0^* = l_{0P}^*$ ou $l_0^* = l_{0Q}^*$ peut être calculé à partir de l'Eq.(47) avec les paramètres B_{PK} ou B_{PS} au lieu de B_{P1} ou avec les paramètres B_{QK} ou B_{QS} au lieu de B_{Q1} , selon le cas de charge considéré. Avec de tels chargements, la flèche adimensionnée et normalisée w^{**}/κ_y^* est représentée en Figure 11 et Figure 12. Il est possible de vérifier que pour les deux types de conditions aux limites, une parfaite continuité est obtenue entre la phase élastique pure et la phase élastoplastique.

Dans la partie élastoplastique, avec des conditions limites statiques équivalentes uniquement, les solutions des déplacements transversaux aux nœuds, Eq.(46), coïncident exactement à ceux des solutions exactes du système discret de référence Eq.(20) ou (22). Cela peut naturellement être étendue au domaine purement élastique de la poutre. Par conséquent, lorsque l'abscisse de la limite continue de l'interface élastoplastique l_0 correspond à la valeur d'un nœud du système discret, c'est-à-dire si $l_{0P}^* = (q_{0P} - 1)/n$ ou si $l_{0Q}^* = (q_{0Q} - 1)/n$, lorsque la charge atteint respectivement $\beta_p = n/(n-j)$ ou $\beta_Q = \sqrt{n/(n-j)}$, la flèche ou le déplacement au dernier nœud, comme l'ensemble des nœuds du système discret, coïncide exactement avec ceux donnés par le modèle élastoplastique non local continué cohésif également. Ce point peut être observé sur les Figure 11 et Figure 12 en phase d'écrouissage ainsi que sur la Figure 13 qui illustre les écarts observés pour la flèche entre le système discret de référence et les différents modèles envisagés.

Enfin, notons que pour $n \rightarrow \infty$, i.e., dans le cas local, avec $l_c \rightarrow 0$, et selon l'Eq.(50), $B_{PS} \rightarrow B_{PK}$ et $B_{QS} \rightarrow B_{QK}$. Par conséquent, en phase plastique comme élastique, les deux types de conditions limites convergent asymptotiquement vers le même modèle local. La flèche normalisée obtenue à partir de ce modèle local est également représentée à titre de comparaison en Figure 11 et Figure 12.

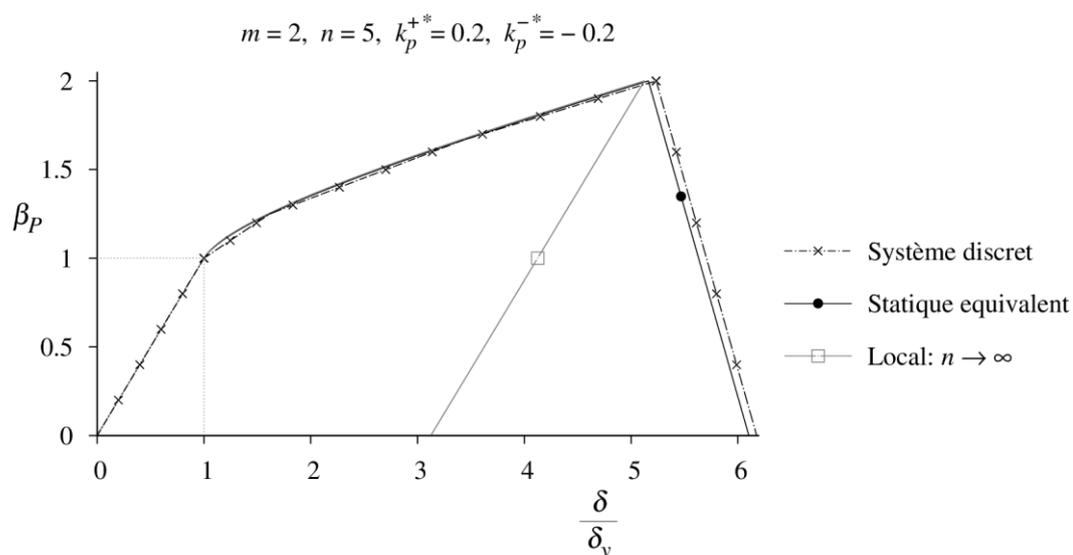


Figure 11 – Comparaison des réponses charges–flèche du réseau élastoplastique de référence ($n = 5$) avec celles obtenues par les modèles continuialisés locaux et non locaux lors du cycle complet d'écroutissage et de radoucissement dans le cas d'une charge concentrée P à l'extrémité libre.

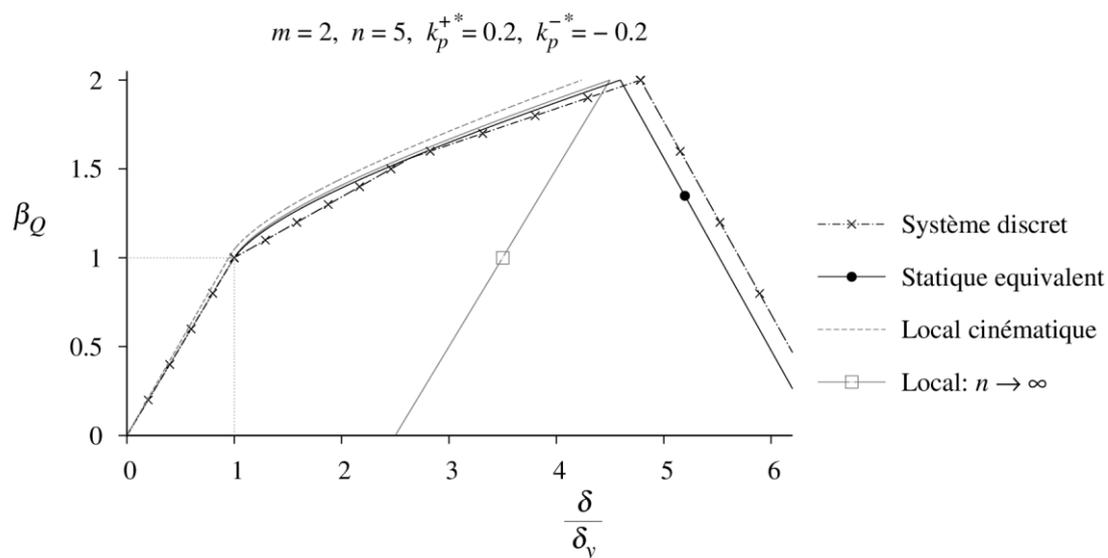


Figure 12 – Comparaison des réponses charges–flèche du réseau élastoplastique de référence ($n = 5$) avec celles obtenues par les modèles continuialisés locaux et non locaux lors du cycle complet d'écroutissage et de radoucissement dans le cas d'une charge répartie Q le long de la poutre.

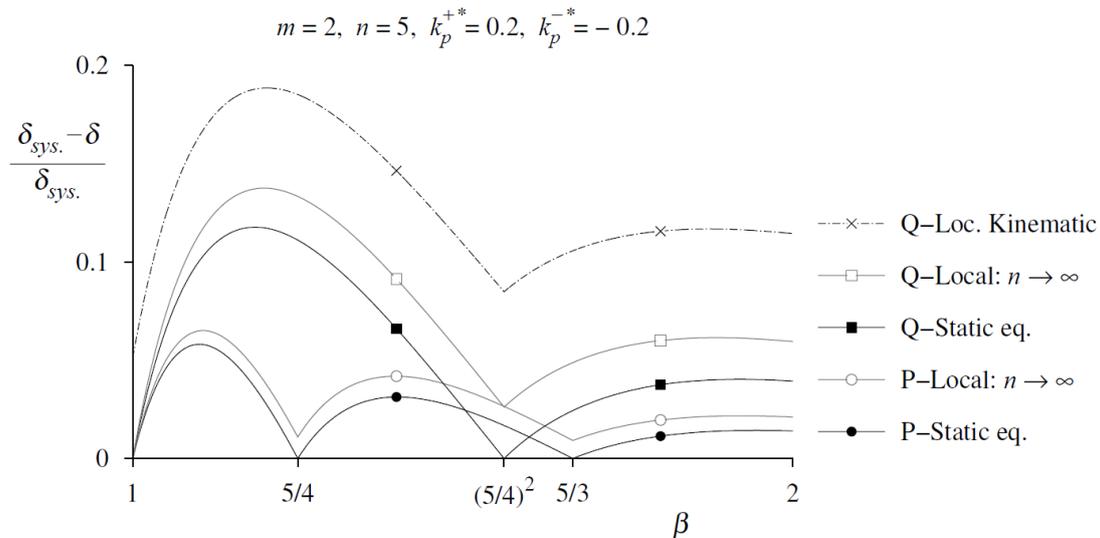


Figure 13 –Écarts relatifs des flèches obtenues par les modèles élastoplastiques continualisés pour chacun des cas de chargement sur un système discret de référence comportant 5 éléments ($n = 5$).

4.4. Ruine de la poutre non locale élastoplastique – régime de radoucissement

Après le pic de charge, une phase de radoucissement contrôle la réponse de l'ensemble de la poutre, composée d'une zone plastique en déchargement et d'une zone complémentaire purement élastique. Dans cette phase, seules les conditions limites statiques équivalentes dans le cadre d'un modèle cohésif sont envisagées, supposant $w^-(a)$ ou $w^-(1/n)$ défini par l'Eq.(40) selon la charge β .

Dans la zone plastique, qui s'étend alors sur sa longueur maximale, pour $x^* \leq 1 - 1/m$ dans le cas de charge P ou pour $x^* \leq 1 - m^{-1/2}$ dans le cas de charge Q , la courbure plastique atteinte au pic de charge demeure constante et égale χ_{\max} . Dans la phase de radoucissement, pour $x^* \in [0; 1 - 1/m]$ ou $x^* \in [0; 1 - 1/\sqrt{m}]$, la poutre se décharge de manière élastique, et les relations suivantes s'appliquent :

$$w_P^{-n} = \frac{PL}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \chi_{p\max} \Rightarrow \frac{w_P^{-n}}{\kappa_y^*} = \left(\beta_P + \frac{m}{k_p^{+*}}\right) (1 - x^*) - \frac{1}{k_p^{+*}} \quad (51)$$

$$\frac{w_Q^{-n}}{\kappa_y^*} = \left(\beta_Q + \frac{m}{k_p^{+*}}\right) (1 - x^*)^2 - 2 \left[l_c^{*2} \left(\beta_Q + \frac{m}{k_p^{+*}}\right) + \frac{1}{2k_p^{+*}} \right] \text{ avec } l_c^2 = \frac{a^2}{12}$$

Si le déplacement latéral à la section encastree demeure constant, i.e., $w^-(0) = 0$, le déplacement latéral adimensionné w_P^{-*} et w_Q^{-*} au sein de la zone plastique peut s'écrire :

$$\frac{w_{P,S}^{*-}}{\kappa_y^*} = \frac{1}{6} \left(\beta_P + \frac{m}{k_p^{+*}} \right) \left[(1-x^*)^3 - 1 \right] - \frac{1}{2k_p^{+*}} x^{*2} + S_{P1} x^* \quad \text{avec}$$

$$S_{P1} = \frac{n}{6} \left(\beta_P + \frac{m}{k_p^{+*}} \right) \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^3 \right] + \frac{\beta_P}{2n} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) + \frac{m}{2n} \left(\frac{1}{k_p^{+*}} - \frac{1}{k_p^{-*}} \right)$$

et

(52)

$$\frac{w_{Q,S}^{*-}}{\kappa_y^*} = \frac{1}{12} \left(\beta_Q + \frac{m}{k_p^{+*}} \right) \left[(1-x^*)^4 - 1 \right] - \left[l_c^{*2} \left(\beta_Q + \frac{m}{k_p^{+*}} \right) + \frac{1}{2k_p^{+*}} \right] x^{*2} + S_{Q1} x^* \quad \text{avec}$$

$$S_{Q1} = \left(\beta_Q + \frac{m}{k_p^{+*}} \right) \left[\frac{l_c^{*2}}{n} + \frac{n}{12} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right)^4 \right) \right] + \frac{\beta_Q}{2n} \left(1 + \frac{1}{k_p^{+*}} \right) + \frac{m}{2n} \left(\frac{1}{k_p^{+*}} - \frac{1}{k_p^{-*}} \right)$$

où S_{P1} et S_{Q1} sont des paramètres constants.

Le comportement demeure purement élastique pour $x^* \in [l_0^*; 1]$ (où $l_0^* = l_{0P}^*$ ou $l_0^* = l_{0Q}^*$) sans aucune courbure plastique. Dans cette partie élastique de la poutre, le déplacement transversal peut être directement calculé à partir de la loi constitutive moment–courbure connaissant les conditions à l’interface du domaine élastique–élastoplastique. Les conditions statiques équivalentes, présentées en partie 4.2, supposent la continuité des déplacements transversaux comme première condition, i.e.

$w_{P,S}^{*-} (1-1/m) = w_{P,S}^{+*} (1-1/m)$ ou $w_{Q,S}^{*-} (1-1/\sqrt{m}) = w_{Q,S}^{+*} (1-1/\sqrt{m})$ ce qui conduit à :

$$\frac{w_{P,S}^{+*}}{\kappa_y^*} = \frac{\beta_P}{6} \left[(1-x^*)^3 - \frac{1}{m^3} \right] + U_{P1} \left[x^* - \left(1 - \frac{1}{m} \right) \right] + w_{P,S}^{+*} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \quad \text{ou}$$

$$\frac{w_{Q,S}^{+*}}{\kappa_y^*} = \frac{\beta_Q}{12} \left[(1-x^*)^4 - \frac{1}{m^2} \right] - \beta_Q l_c^{*2} \left[x^{*2} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}} \right)^2 \right] + U_{Q1} \left(x^* - 1 + \frac{1}{\sqrt{m}} \right) + \frac{w_{Q,S}^{+*} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}} \right)}{\kappa_y^*}$$
(53)

où U_{P1} et U_{Q1} sont des paramètres constants, définis selon le cas de charge P ou Q respectivement. La seconde condition à l’interface relative aux conditions limites du type statique équivalent :

$w_{P,S}^{*-} (1-1/m+1/n) = w_{P,S}^{+*} (1-1/m+1/n)$ ou $w_{Q,S}^{*-} (1-1/\sqrt{m}+1/n) = w_{Q,S}^{+*} (1-1/\sqrt{m}+1/n)$ donnent :

$$U_{P1} = \frac{nm}{6k_p^{+*}} \left[\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)^3 - \frac{1}{m^3} \right] - \frac{1}{k_p^{+*}} \left(1 - \frac{1}{m} \right) - \frac{1}{2nk_p^{+*}} + S_{P1} \quad \text{ou}$$

$$U_{Q1} = \frac{nm}{12k_p^{+*}} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{m}} - \frac{1}{n} \right)^4 - \frac{1}{m^2} \right] - (2ml_c^{*2} + 1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{2n} \right) \frac{1}{k_p^{+*}} + S_{Q1}$$
(54)

où S_{P1} et S_{Q1} sont les paramètres constants, précédemment définis en (52).

Le déplacement transversal adimensionné peut alors être calculé durant la phase de radoucissement dans la partie élastique complémentaire de la poutre. Les flèches normalisées, δ/δ_y , selon les

chargements β_P ou β_Q lors des phases complètes d'écroutissement et de radoucissement sont présentées en Figure 11 et Figure 12.

Dans le cas local, $n \rightarrow \infty$, $l_c \rightarrow 0$, la partie plastique en radoucissement, contenue dans le premier élément, tend vers une longueur infiniment petite, et le déchargement élastique prévaut sur l'ensemble de la poutre. La flèche normalisée, définie en (53) et (54) confirme que $\partial \delta_{y,P}^* / \partial \beta = \kappa_y^* / 3$ et $\partial \delta_{y,Q}^* / \partial \beta = \kappa_y^* / 4$ quand $n \rightarrow \infty$, comme obtenu initialement avec la solution exacte en élasticité présentée en (21) et (23). Les Figure 7 et Figure 8 montrent que la réponse du système discret en phase de radoucissement dépend fortement du nombre n d'éléments. Pour un nombre n important, un effet de « snap-back » est observé dans cette phase. Cet effet dû au paradoxe de Wood [22] est clairement observable pour chacune des configurations de chargement (P et Q) en Figure 11 et Figure 12 également.

5 Discussion des résultats

Avec un écroutissement linéaire d'une chaîne de Hencky élastoplastique, la loi moment-courbure continue non locale couplée à des conditions limites de type cohésif (ou statique équivalent) donne les déplacements exacts aux abscisses des nœuds du système discret de référence. De plus, si la charge est telle que l'interface du domaine élastique-élastoplastique coïncide exactement avec l'abscisse d'un nœud, la solution obtenue dans l'ensemble de la poutre continuallisée reproduit exactement le déplacement de tous les nœuds du système discret. Par conséquent, quand cette interface coïncide avec un nœud au pic de charge, la réponse de la poutre continuallisée en phase de radoucissement reproduit également, pour chaque nœud, le déplacement exact du système discret dans cette phase, ce qui n'est pas le cas dans les Figure 11 et Figure 12 présentées dans ce papier.

Dans le cas d'écroutissement non linéaire, cette propriété spécifique ne serait plus valide. Comme déjà observé dans le cas de chaîne axiale discrète endommageable [17], les conditions limites de type statique équivalent donnent les meilleurs résultats en phase non-linéaire et sont les plus pertinentes pour la phase de radoucissement, même si dans cette dernière phase le déplacement transversal du milieu continu équivalent à l'abscisse des nœuds diffère légèrement de la solution exacte du système discret de référence.

La formulation du milieu équivalent non local continu montre clairement que la longueur caractéristique associée est intrinsèque au milieu microstructuré considéré. Cette longueur caractéristique apparaît comme indépendante de la charge, mais peut varier selon le degré de l'équation différentielle découlant de la loi constitutive et des grandeurs physiques considérées.

À ce stade, des investigations complémentaires concernent les réseaux axiaux unidimensionnels. Le but est de vérifier que cette longueur caractéristique du milieu non local continuallisé est toujours associée à a^2 , le carré de la longueur des éléments constitutifs du réseau de référence et demeure indépendante du chargement comme déjà prouvé dans des cas de systèmes axiaux élastiques endommageables [28] [14].

6 Conclusion

Dans ce papier, la flexion d'une chaîne périodique constituée de barres rigides et de rotules élastoplastique (aussi appelée chaîne de Hencky dans un cas purement élastique) a été étudiée dans deux configurations de chargement, P et Q . Les rotules élastoplastiques répondent à une loi bi-linéaire avec des modules d'érouissage constants sur la phase plastique et radoucissante. Ce réseau constitue un système où seules les interactions avec les éléments voisins interviennent. Les solutions des équations du système élastoplastique discret ont été obtenues analytiquement pour un érouissage linéaire.

Une théorie non locale élastoplastique a été construite à partir des équations aux différences en utilisant un processus de continualisation. Il a été démontré que cette nouvelle théorie élastoplastique non locale dépend des longueurs adimensionnelles, rigoureusement calibrées à partir de la taille de la maille du réseau modèle. Une loi cohésive élastoplastique gouverne la réponse en phase de radoucissement. Ce modèle, basé sur la micromécanique, repose sur la non localité pour sa loi constitutive mais préserve la nature locale de la fonction de charge en plasticité. Une comparaison des résultats obtenus à partir de ce nouveau modèle non local élastoplastique de poutre montre l'efficacité de cette approche, en particulier pour prendre en compte les effets d'échelle inhérents à un système discret, considéré comme un modèle de référence. Le processus de localisation en phase d'érouissage comme de radoucissement dépend fortement de l'espacement des éléments au sein de ce réseau discret.

Des interactions élastoplastiques générales à l'échelle micro peuvent être examinées, dans le but d'établir un modèle plus général en élastoplasticité. Les résultats présentés ici sont une première étape vers une théorie des modèles élastoplastiques non locaux basés sur des réseaux discrets périodiques avec interactions locales. Ces résultats, valides pour une chaîne discrète (chaîne de Hencky) élastoplastique en flexion, peuvent être étendus à une chaîne discrète axiale unidimensionnelle afin d'envisager par la suite un développement de ce modèle en deux puis trois dimensions.

Nomenclature

<i>Paramètres</i>	<i>Dimension</i>	<i>Paramètre adimensionné relatif</i>
a Longueur des éléments	[L]	$a^* = a/L = 1/n$
k_p^+ Module d'érouissage plastique	[M.L ³ .T ⁻²]	$k_p^{+*} = k_p^+/EI$
k_p^- Module de radoucissement	[M.L ³ .T ⁻²]	$k_p^{-*} = k_p^-/EI$
C Raideur élastique des rotules : $C = EI/a$	[M.L ² .T ⁻²]	–
C_p^+ Module d'érouissage des rotules	[M.L ² .T ⁻²]	–
C_p^- Module de radoucissement des rotules	[M.L ² .T ⁻²]	–
E Module d'Young de la poutre	[M.L ⁻¹ .T ⁻²]	–
I Moment quadratique	[L ⁴]	–
L Longueur de la poutre	[L]	–
l_0 Limite de la zone plastique	[L]	$l_0^* = l_0/L$
l_c Longueur caractéristique	[L]	$l_c^* = l_c/L$
M Moment fléchissant	[M.L ² .T ⁻²]	$\mu = ML/EI$
M^* Moment additionnel (en plasticité)	[M.L ² .T ⁻²]	–
M_p Moment en limite élastique ($M_p = EI\kappa_y$)	[M.L ² .T ⁻²]	$\mu_p = M_p L/EI = \kappa_y^*$
m Rapport des moments ultime/limite	–	$m = M_u/M_p$

n	Nombre d'éléments	–	
q	Nombre de rotules plastifiées	–	
P	Charge ponctuelle transversale	[M.L.T ⁻²]	$P = \beta_p EI \kappa_y / L = \beta_p ES \varepsilon_y / n$
Q	Charge uniformément répartie	[M.T ⁻²]	$Q = 2\beta_Q EI \kappa_y / L^2 = 2\beta_Q ES \varepsilon_y / nL$
w	Déplacement transversal	[L]	$w^* = w/L$
x	Abscisse longitudinale	[L]	$x^* = x/L$
β_p	Charge ponctuelle adimensionnée	–	$\beta_p = PL / EI \kappa_y = nP / ES \varepsilon_y$
β_Q	Charge répartie adimensionnée	–	$\beta_Q = QL^2 / 2EI \kappa_y = nQL / 2ES \varepsilon_y$
δ	Flèche (en extrémité libre)	[L]	$\delta^* = w(L)/L = w^*(1)$
κ_y	Limite de la courbure élastique	[L ⁻¹]	$\kappa_y^* = \kappa_y L$
κ_c	Courbure plastique pour $M = M_u$	[L ⁻¹]	$\kappa_c^* = \kappa_c L = (m-1)\kappa_y^* / k_p^*$
μ	Moment fléchissant adimensionné	–	
θ	Angle (inclinaison/axe) des éléments	–	
$\Delta\theta$	Rotation totale des rotules	–	
$\Delta\theta_p$	Rotation plastique des rotules	–	
χ	Courbure totale de la poutre	[L ⁻¹]	$\chi^* = \chi L$

indices

K	Avec conditions limites cinématiques locales
P	Avec charge transversale concentrée à l'extrémité libre
Q	Avec charge transversale uniformément répartie
S	Avec conditions limites statiques équivalentes
i	Au nœud i où à la $i^{\text{ème}}$ rotule
p	Plastique
u	Ultime
y	En limite élastique

Références

- [1] M. Born, T. von Kármán, On fluctuations in spatial grids “Über Schwingungen in Raumgittern,” *Physikalische Zeitschrift*. 13 (1912) 297–309.
- [2] L. Brillouin, *Wave Propagation in Periodic Structures*, Dover Publications Inc., New York, 1953.
- [3] A.C. Eringen, Byoung Sung Kim, Relation between non-local elasticity and lattice dynamics, *Crystal Lattice Defects*. 7 (1977) 51–57.
- [4] I.A. Kunin, *Elastic Media with Microstructure I*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1982. <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-81748-9> (accessed August 28, 2015).
- [5] A.C. Eringen, On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*. 54 (1983) 4703–4710. doi:10.1063/1.332803.
- [6] A.C. Eringen, *Nonlocal Continuum Field Theories*, Springer, New York, 2002. <http://www.springer.com/materials/mechanics/book/978-0-387-95275-8> (accessed October 2, 2013).
- [7] N. Challamel, V. Picandet, B. Collet, T. Michelitsch, I. Elishakoff, C.M. Wang, Revisiting finite difference and finite element methods applied to structural mechanics within enriched continua, *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 53 (2015a) 107–120. doi:10.1016/j.euromechsol.2015.03.003.
- [8] N. Challamel, C.M. Wang, I. Elishakoff, Discrete systems behave as nonlocal structural elements: Bending, buckling and vibration analysis, *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 44 (2014) 125–135. doi:10.1016/j.euromechsol.2013.10.007.

- [9] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal, Interaction of “Solitons” in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States, *Phys. Rev. Lett.* 15 (1965) 240–243. doi:10.1103/PhysRevLett.15.240.
- [10] P. Rosenau, Dynamics of nonlinear mass-spring chains near the continuum limit, *Physics Letters A*. 118 (1986) 222–227. doi:10.1016/0375-9601(86)90170-2.
- [11] C.M. Wang, Z. Zhang, N. Challamel, W.H. Duan, Calibration of Eringen’s small length scale coefficient for initially stressed vibrating nonlocal Euler beams based on microstructured beam model, *Journal of Physics D: Applied Physics*. 46 (2013) 345501. doi:10.1088/0022-3727/46/34/345501.
- [12] O. Kresse, L. Truskinovsky, Mobility of lattice defects: discrete and continuum approaches, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 51 (2003) 1305–1332. doi:10.1016/S0022-5096(03)00019-X.
- [13] N. Triantafyllidis, S. Bardenhagen, On higher order gradient continuum theories in 1-D nonlinear elasticity. Derivation from and comparison to the corresponding discrete models, *Journal of Elasticity*. 33 (1993) 259–293.
- [14] B. Hérissou, N. Challamel, V. Picandet, A. Perrot, Nonlocal continuum analysis of a nonlinear uniaxial elastic lattice system under non-uniform axial load, *Physica E: Low-Dimensional Systems and Nanostructures*. 83 (2016) 378–388. doi:10.1016/j.physe.2016.03.044.
- [15] E. Turco, F. dell’Isola, A. Cazzani, N.L. Rizzi, Hencky-type discrete model for pantographic structures: numerical comparison with second gradient continuum models, *Z. Angew. Math. Phys.* 67 (2016) 85. doi:10.1007/s00033-016-0681-8.
- [16] A. Kocsis, N. Challamel, On the foundation of a generalized nonlocal extensible shear beam model from discrete interactions, in: *Spec. Issue Honour Prof. Maugin*, Springer, H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Collet and T. Michelitsch, 2018.
- [17] N. Challamel, V. Picandet, G. Pijaudier-Cabot, From discrete to nonlocal continuum damage mechanics: Analysis of a lattice system in bending using a continualized approach, *International Journal of Damage Mechanics*. 24 (2015b) 983–1012. doi:10.1177/1056789514560913.
- [18] N. Challamel, C. Lanos, C. Casandjian, On the propagation of localization in the plasticity collapse of hardening–softening beams, *International Journal of Engineering Science*. 48 (2010) 487–506. doi:10.1016/j.ijengsci.2009.12.002.
- [19] H. Hencky, Über die angenäherte Lösung von Stabilitätsproblemen im Raummittels der elastischen Gelenkkette, *Der Eisenbau*. 11 (1920) 437–452.
- [20] S. Goldberg, *Introduction to Difference Equations: With Illustrative Examples from Economics, Psychology, and Sociology*, Courier Corporation, 1958.
- [21] S. Elaydi, *An introduction to difference equations*, 3rd ed, Springer, New York, 2005.
- [22] R.H. Wood, Some controversial and curious developments in the plastic theory of structures, in *Engineering Plasticity*, in: *Engineering Plasticity*, Heyman, J., Leckie, F.A. Cambridge University Press, UK, 1968: pp. 668–691.
- [23] Z.P. Bažant, Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete, *J. Eng. Mech., ASCE*. 102 (1976) 331–334.
- [24] J.A.D. Wattis, Quasi-continuum approximations to lattice equations arising from the discrete nonlinear telegraph equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* 33 (2000) 5925. doi:10.1088/0305-4470/33/33/311.
- [25] P.G. Kevrekidis, I.G. Kevrekidis, A.R. Bishop, E.S. Titi, Continuum approach to discreteness, *Phys. Rev. E*. 65 (2002) 046613. doi:10.1103/PhysRevE.65.046613.
- [26] I.V. Andrianov, J. Awrejcewicz, D. Weichert, Improved Continuous Models for Discrete Media, *Mathematical Problems in Engineering*. 2010 (2009) e986242. doi:10.1155/2010/986242.
- [27] F. Dell’Isola, U. Andreaus, L. Placidi, At the origins and in the vanguard of peridynamics, non-local and higher-gradient continuum mechanics: An underestimated and still topical contribution of Gabrio Piola, *Mathematics and Mechanics of Solids*. 20 (2015) 887–928.
- [28] V. Picandet, B. Hérissou, N. Challamel, A. Perrot, On the failure of a discrete axial chain using a continualized nonlocal Continuum Damage Mechanics approach, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* (2016) 436–466. doi:10.1002/nag.2412.