

Actualisation bayésienne avec des données expérimentales réduites

P. BEAUREPAIRE^a

a. Université Clermont Auvergne, CNRS, SIGMA-Clermont Institut Pascal, F-63000
Clermont-Ferrand, France, pierre.beaurepaire@sigma-clermont.fr

Résumé :

L'actualisation bayésienne est de plus en plus utilisée en mécanique des structures ; elle est applicable comme méthode inverse pour identifier le modèle d'incertitudes qui correspond le mieux à des données expérimentales disponibles. Ce papier document traite de l'application de telles méthodes à des modèles à sorties multiples, dans le cas où les données expérimentales seraient réduites. Les méthodes standard d'actualisation utilisent la matrice de covariance, qui n'est pas inversible lorsque les données expérimentales ne sont pas suffisantes. L'utilisation de cette matrice non-inversible avec les méthodes standard est discutée dans un premier temps. Une nouvelle méthode est ensuite proposée ; elle repose sur la génération de plusieurs échantillons de la distribution à priori. Ces échantillons sont utilisés pour compléter les données manquantes et construire une distribution à priori des termes de la matrice de covariance qui ne peuvent pas être identifiés à partir des données.

Abstract :

Bayesian updating is increasingly used in structural engineering ; it is applicable as an inverse method to identify the model of uncertainty which best matches some available experimental data. This paper discusses the application of such methods to models with multiple outputs in case the experimental data is reduced. Standard updating methods involve the covariance matrix, which becomes rank deficient in case the experimental data is too scarce. The use of this rank deficient matrix with the standard methods is first discussed. A new method is then proposed ; it relies on the generation of multiple samples of the prior distribution. These samples are used to complete the missing data and construct a prior distribution of the terms of the covariance matrix that cannot be identified from the data.

Mots clefs : Actualisation Bayésienne ; Méthodes Inverses ; Quantification des Incertitudes ; Simulation de Monte-Carlo

1 Introduction

Les méthodes inverses sont largement utilisées en science et en ingénierie ; elles consistent à identifier les paramètres d'entrée d'un modèle numérique afin d'obtenir une bonne correspondance avec certaines données expérimentales disponibles. Les techniques d'actualisation de modèles fournissent un cadre approprié et ont reçu une attention considérable au cours des dernières décennies [6, 9, 1]. Elles sont

appliquées lorsqu'un modèle numérique direct est disponible, mais qu'il n'est pas possible ou numériquement trop coûteux d'évaluer le modèle inverse. De telles méthodes sont utilisées par exemple dans le cas où des capteurs collectent les données de vibration, qui sont ensuite utilisées pour identifier les informations modales (amplitudes, modes, amortissement, etc.). Un modèle par éléments finis est ensuite mis en œuvre et l'actualisation du modèle est utilisée pour identifier les paramètres d'entrée menant à la meilleure adéquation avec les données expérimentales disponibles.

Les méthodes d'actualisation bayésienne permettent d'identifier les valeurs optimales des paramètres ainsi que la densité de probabilité qui leur est associée [2, 10]. Considérant \mathbf{x} , l'ensemble des paramètres à mettre à jour à partir des données expérimentales \mathcal{D} en utilisant le théorème de Bayes, qui exprime comme :

$$p(\mathbf{x}|\mathcal{D}) = \frac{p(\mathcal{D}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathcal{D})} \quad (1)$$

où $p(\mathbf{x})$ est la *distribution à priori*, qui rassemble les connaissances initiales sur les paramètres ; $p(\mathcal{D}|\mathbf{x})$ est la fonction de *vraisemblance*, qui quantifie la correspondance entre les données expérimentales et le résultat du modèle numérique ; $p(\mathbf{x}|\mathcal{D})$ est la *distribution à posteriori*, une fonction de densité de probabilité associée aux paramètres du modèle qui considère les informations fournies par les données expérimentales \mathcal{D} , et $p(\mathcal{D})$ est une constante (l'*evidence* en Anglais), une constante garantissant que l'Equation (1) s'intègre à un.

Une grande partie des efforts de recherche sur l'actualisation bayésienne sont orientés vers la mise en œuvre de méthodes numériques efficaces sur le plan du temps de calcul. L'approche la plus fréquemment utilisée consiste à générer des réalisations de la distribution postérieure et à supposer par la suite que cet ensemble de réalisations décrit entièrement cette distribution. Les chaînes de Markov sont fréquemment utilisées dans ce contexte, car elle peuvent être appliquée à toute distribution décrite par sa densité de probabilité. Par exemple, Ching et Chen [4] ont proposé un algorithme efficace basé sur une séquence de distributions intermédiaires avec une convergence progressive de la distribution à priori à la distribution postérieure, combinée à une sélection appropriée du premier état des chaînes de Markov ; Beck et Zuev [3] ont appliqué une méthode basée sur les tirages d'importance, les chaînes de Markov et le recuit simulé ; Straub et Papaioannou [12] ont introduit *Bayesian Updating with Structural reliability methods* (BUS), une procédure utilisée pour transformer le problème d'actualisation en un problème de fiabilité, qui est ensuite résolu avec des efforts réduits car de multiples algorithmes efficaces sont disponibles pour l'analyse de fiabilité.

Pour les applications en ingénierie, les données expérimentales peuvent être obtenues à partir d'essais sur des prototypes. Il me semble qu'un nombre très réduit de prototypes sont généralement utilisés en raison de leur coût élevé. Dans la pratique, il semble courant de tester de trois à dix prototypes. De multiples capteurs (jauges, accéléromètres, etc.) sont installés sur chaque prototype et recueillent les données associées aux essais. Les coûts associés à de tels capteurs restent modérés (par rapport aux coûts des prototypes). Il est donc possible d'utiliser un grand nombre de capteurs, par exemple des dizaines ou des centaines de capteurs. Par conséquent, on peut raisonnablement s'attendre à ce que le nombre de capteurs dépasse le nombre total de prototypes. Lorsque la procédure d'actualisation bayésienne est appliquée, les données expérimentales consistent en des échantillons d'un ensemble de variables aléatoires, chaque variable étant associée à un capteur et chaque échantillon étant associé à un prototype testé. Il y a donc moins d'échantillons que le nombre de réponses du système. L'objectif du présent papier est de discuter de l'application de l'actualisation bayésienne dans un tel contexte.

La Section 2 décrit deux stratégies simples applicables aux procédures d'actualisation standard dans

ce contexte et examine leurs faiblesses. La Section 3 introduit une nouvelle procédure applicable dans ce contexte ; elle repose sur la génération d'échantillons supplémentaires des paramètres d'entrée. La méthode est ensuite appliquée à deux exemples dans Section 4. Le document se termine par quelques conclusions.

2 Description du problème

L'approche développée ici implique un modèle numérique prenant en entrée un ensemble de variables aléatoires $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ avec des sorties multiples de la forme $\mathbf{y}(\mathbf{x}) = (y_1(\mathbf{x}), \dots, y_M(\mathbf{x}))$. Comme \mathbf{y} est une fonction mathématique prenant en entrée un vecteur aléatoires, sa sortie peut être modélisée par des variables aléatoires. Certaines connaissances initiales concernant la distribution des paramètres d'entrée peuvent être disponibles et les distributions à priori modélisent cela. Les données expérimentales associées au modèle sont nécessaires pour effectuer l'actualisation bayésienne ; elles consiste en un ensemble d'échantillons de la réponse du modèle $(\mathbf{y}^{(1)}, \dots, \mathbf{y}^{(K)})$. La procédure vise à actualiser (p. ex. *ajuster*) la distribution à priori afin de maximiser l'ajustement entre la sortie du modèle et les données expérimentales. Dans le cas général, la densité de probabilité conjointe associée à ces données expérimentales est identifiée et définit ensuite la fonction de vraisemblance (en utilisant la définition de la vraisemblance largement appliquée en statistique). Cette densité de probabilité conjointe peut être caractérisée par les distributions marginales et le coefficient de corrélation linéaire (voir par exemple Cordeiro *et al.* [5]) ou par l'estimation par noyau (voir par exemple Goller [7], Nagel et Sudret [11]). De telles approches nécessitent généralement la matrice de covariance ou de corrélation. Par exemple, la matrice de covariance peut être impliquée dans la définition du noyau utilisé dans KDE (voir par exemple Goller *et al.* [8] ; Wand et Jones [13]). Le nombre total d'échantillons dans les données expérimentales doit être strictement supérieur au nombre total de sorties du modèle (c.-à-d. $K > M$) pour identifier complètement la matrice de covariance à partir des données, c.-à-d. au moins deux échantillons sont requis pour déterminer la variance d'une variable aléatoire (univariée), au moins trois échantillons sont requis pour déterminer le coefficient de corrélation d'un vecteur de deux variables, etc.

Cet article vise à discuter de l'application de l'actualisation bayésienne si les données expérimentales ne sont pas suffisantes pour caractériser pleinement sa matrice de covariance, c'est-à-dire dans le cas où $K \leq M$. Cette matrice est alors de rang inférieur à M , avec $K - 1$ valeurs propres non-nulles ; les vecteurs propres qui lui sont associés définissent le sous-espace linéaire de dimension $K - 1$ contenant tous les échantillons. Je suppose, à titre d'hypothèse simplificatrice, que les données expérimentales suivent une loi normale multivariée et que la taille réduite de l'échantillon n'introduit pas d'incertitudes épistémiques sur les paramètres de cette distribution. Cela implique que les $K - 1$ valeurs propres non nulles et leurs vecteurs propres correspondants sont supposés être correctement estimés. Les valeurs propres restantes sont égales à zéro, ce qui peut être un artefact causé par l'identification de la matrice de covariance à partir d'un nombre insuffisant d'échantillons. Je suppose donc dans ce qui suit que cette valeur propre peut être différente de zéro ; et l'identification de leurs valeurs possibles est discutée dans les prochaines sections de cet article. La Figure 1 montre un aspect possible de la densité de probabilité conjointe des données expérimentales avec deux échantillons et un problème de dimension deux. Les croix représentent les deux échantillons ; la ligne en pointillés représente la direction du premier vecteur propre de la matrice de covariance et les lignes de niveau représentent une distribution possible. Les Figures 1ab sont en bon accord avec l'hypothèse simplificatrice décrite ci-dessus alors que Figure 1c n'est pas compatible avec cette dernière (car les axes d'isovaleur des densités de probabilité ne sont pas

alignés avec le vecteur propre obtenu à partir des données et la valeur moyenne de la distribution ne représente pas la moyenne des échantillons).

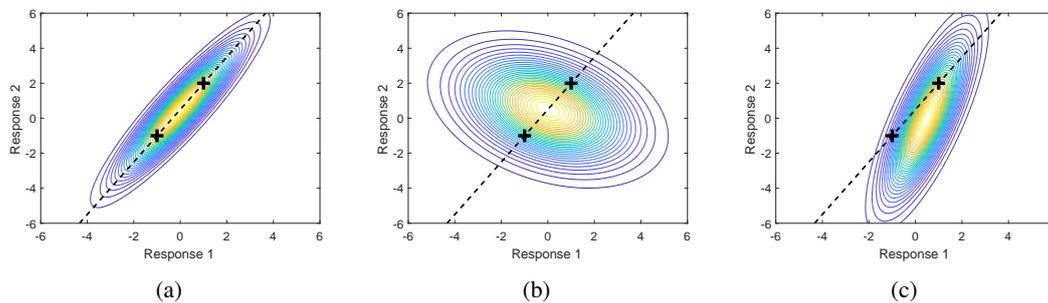


FIGURE 1 – Aspect de la densité de probabilité des données expérimentales (a,b) Compatibles avec les hypothèses utilisées. (c) Incompatible avec les hypothèses utilisées.

La première stratégie applicable à de tels problèmes consiste à utiliser directement la matrice de covariance identifiée à partir des échantillons utilisés dans la définition de la fonction de vraisemblance. Les valeurs propres nulles impliquent que certaines variables aléatoires sont entièrement corrélées. Par conséquent, cette stratégie de modélisation considère que les réponses du modèle numérique doivent reposer sur un espace linéaire de dimension $K - 1$ et la procédure d'actualisation bayésienne propage ensuite cette dépendance aux entrées. Dans le cas où le modèle numérique est bijectif, les échantillons de la distribution postérieure reposent sur un espace de dimension $K - 1$ (éventuellement non linéaire). La Figure 2a présente la distribution postérieure obtenue lorsque cette approche est utilisée avec un modèle linéaire. Cette stratégie peut ne pas être applicable dans le cas général, car l'hypothèse d'une valeur propre nulle peut être excessive. En effet, les problèmes d'ingénierie où les variables aléatoires reposent sur un espace de dimension réduite sont rarement rencontrés et une formulation alternative du problème d'actualisation doit être proposée. De plus, de nombreux algorithmes disponibles dans la littérature sont basés sur la génération d'échantillons de la distribution à priori, qui sont ensuite acceptés ou rejetés. Cette stratégie nécessiterait la génération d'échantillons sur un sous-espace de dimensions réduites, cette tâche peut s'avérer difficile.

La deuxième stratégie possible pour faire face à un tel problème consiste à utiliser un ensemble réduit de $K - 1$ sorties, car elles peuvent être sélectionnées de telle sorte que leur matrice de covariance soit inversible. L'ensemble suivant est utilisé :

$$\mathbf{y}' = ((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \cdot \varphi_1, \dots, (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \cdot \varphi_{K-1}) \quad (2)$$

où $\bar{\mathbf{y}}$ représente la valeur moyenne des données expérimentales, $\varphi_1, \dots, \varphi_{K-1}$ représentent les vecteurs propres de la matrice de covariance associés aux valeurs propres non nulles et le point représente le produit scalaire entre deux vecteurs. Cette approche consiste à projeter la réponse du modèle sur le sous-espace contenant tous les échantillons des données expérimentales, qui est défini par les valeurs propres impliquées dans l'Equation 2. Cela équivaut à attribuer une valeur infinie aux valeurs propres nulles de la matrice de covariance. La Figure 2b montre l'aspect de la distribution postérieure dans le cas où cette stratégie est appliquée à un modèle linéaire. Avec cette approche, la distribution postérieure a une valeur non nulle sur l'ensemble du support de la distribution à priori. Pour tout échantillon des variables aléatoires, les réponses correspondantes du modèle numérique sont calculées et projetées sur l'espace contenant les données expérimentales. Cette réponse projetée est ensuite utilisée pour déter-

miner la distribution postérieure. Par conséquent, la valeur de la distribution postérieure peut ne pas converger vers zéro dans une certaine direction de l'espace des paramètres d'entrée. Cela se produit si la réponse du modèle correspondant à cette direction est orthogonale au plan contenant les données expérimentales. Par exemple dans la Figure 2b la valeur de la distribution postérieure ne converge pas vers zéro si $x_1 = -x_2$ même si x_1 converge vers l'infini. Cette stratégie tend à générer des échantillons qui ne correspondent pas aux données originales. Par exemple dans la Figure 2b, les données originales ont une corrélation positive alors que la distribution postérieure présente une corrélation négative.

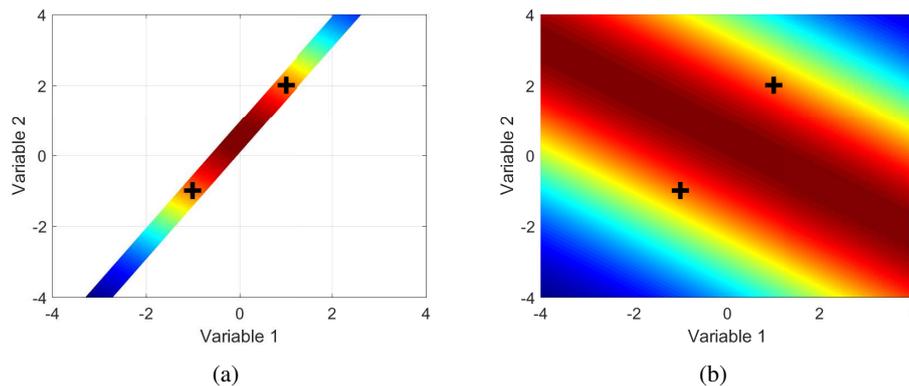


FIGURE 2 – Distributions postérieures obtenues (a) avec une matrice de covariance de rang un; (b) en utilisant seulement le premier vecteur propre. Les croix représentent les échantillons des paramètres d'entrée associés aux données expérimentales (c.-à-d. l'inverse du modèle numérique).

Comme les deux stratégies d'actualisation bayésienne décrites ci-dessus ne sont pas satisfaisantes, la prochaine section est axée sur la formulation d'une approche alternative.

3 Approche proposée

Les données expérimentales ne peuvent pas être utilisées pour déterminer l'écart-type associé à l'ensemble suivant :

$$\mathbf{y}^* = ((\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \cdot \varphi_K, \dots, (\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}) \cdot \varphi_M) \quad (3)$$

Il est donc possible de fixer l'écart-type associé à chaque composante de cet ensemble à zéro ou à l'infini, comme discuté dans la section précédente. La situation intermédiaire peut également être prise en compte, et l'écart-type peut présenter une valeur finie, non nulle.

La matrice de covariance des données expérimentales est impliquée dans la procédure d'actualisation bayésienne ; son expression générale est de la forme :

$$C = \Phi^t (C_1 + C_2) \Phi \quad (4)$$

où C_1 est la contribution de la matrice de covariance complètement caractérisée par les données expé-

riméntales avec :

$$C_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \sigma_{K-1}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

où $\sigma_1^2, \dots, \sigma_{K-1}^2$ désigne les valeurs propres non nulles.

La matrice C_2 est la contribution qui ne peut être identifiée à partir des données expérimentales, sa forme générique est :

$$C_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & & S & \\ 0 & \dots & 0 & & & \end{array} \right] \quad (6)$$

où S est une matrice complète. Les composantes de cette matrice ne peuvent pas être identifiées à partir des données expérimentales, car elles sont associées aux valeurs propres nulles.

Les Equations (4)-(6) peuvent être injectées dans l'expression de la fonction de vraisemblance, qui donne :

$$\begin{aligned} p(\mathcal{D}|\mathbf{x}, S) &= \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi C)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})C^{-1}(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}})\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi C_1)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{y}'(x)C_1^{-1}\mathbf{y}'(x)\right) \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi S)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{y}^*C_2^{-1}\mathbf{y}^*\right) \\ &= p_1(\mathcal{D}|\mathbf{x}) p_2(\mathcal{D}|\mathbf{x}, S) \end{aligned} \quad (7)$$

La fonction de vraisemblance est donc exprimée comme le produit de deux fonctions ; p_1 représente la contribution des valeurs propres non nulles, obtenues à partir des données expérimentales et p_2 représente la dépendance associée à la matrice S . Comme les données expérimentales ne contiennent pas suffisamment d'information pour identifier les composantes de cette matrice, il est suggéré ici d'utiliser un modèle de variables aléatoires basé sur la distribution à priori et sur le modèle numérique. Un ensemble de $M - K + 1$ échantillons *auxiliaires* des variables d'entrée est généré et une actualisation bayésienne est appliquée en considérant seulement les valeurs propres non nulles (c'est-à-dire avec la deuxième stratégie décrite dans Section 2). La densité de probabilité conjointe associée à ces échantillons est donc :

$$p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{M-K+1}|\mathcal{D}) = \prod_{i=1}^{M-K+1} \frac{p_1(\mathcal{D}|\mathbf{x}_i) p(\mathbf{x}_i)}{p(\mathcal{D})} \quad (8)$$

Les réponses du modèle numérique associé à ces échantillons peuvent être calculées. La covariance du modèle associé à la valeur propre non nulle est la même pour les données expérimentales et pour les échantillons générés, car la vraisemblance correspondante p_1 est impliquée dans l'Equation (8). Pour

chaque jeu d'échantillons, les composantes de la matrice S peuvent être identifiées (la méthode du maximum de vraisemblance est utilisée ici). La sortie du modèle numérique est donc utilisée pour déterminer la valeur correspondante de la matrice S . La fonction de vraisemblance du problème d'actualisation bayésienne devient :

$$p(\mathcal{D}|\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\mathcal{D}|\mathbf{x}, S(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{M-K+1})) p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{M-K+1}|\mathcal{D}) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_{M-K+1} \quad (9)$$

L'Equation (9) peut être directement injecté dans la formule du problème d'actualisation bayésienne défini dans l'Equation (1).

L'idée générale de la procédure proposée peut être résumée comme suit :

1. Des échantillons *auxiliaires* des variables aléatoires sont générés à l'aide d'une procédure d'actualisation impliquant les valeurs propres non nulles, de sorte que la matrice de covariance de la réponse du système devienne inversible ;
2. Ces échantillons sont ensuite utilisés pour définir une distribution à priori des termes manquants de la matrice de covariance ;
3. Cette distribution est mise à jour en utilisant la fonction de vraisemblance (Equation (9)) ;
4. La vraisemblance actualisée est finalement introduite dans l'Equation (1).

4 Exemples

4.1 Problème à une variable

Le premier exemple implique une seule variable aléatoire x et le modèle numérique est la fonction identité, c'est-à-dire $y(x) = x$. Les données expérimentales consistent en une seule réalisation avec $y^{(1)} = 1,5$ et il n'est donc pas possible d'estimer la variance associée à ce modèle. La distribution à priori est uniforme dans la fourchette de $[-3,3]$. La Figure 3a montre la distribution postérieure obtenue à la fin de la procédure. La région de la masse centrale se trouve à proximité de l'échantillon utilisé pour la procédure d'actualisations et les queues des distributions sont importantes. La Figure 3b montre un nuage de points des deux échantillons utilisés dans la procédure (même si l'échantillon auxiliaire est uniquement utilisé pour la définition de la vraisemblance) ; une forte dépendance est observée. La Figure 3c compare les fonctions de distribution cumulative obtenues en utilisant la procédure proposée et les deux stratégies discutées dans Section 2.

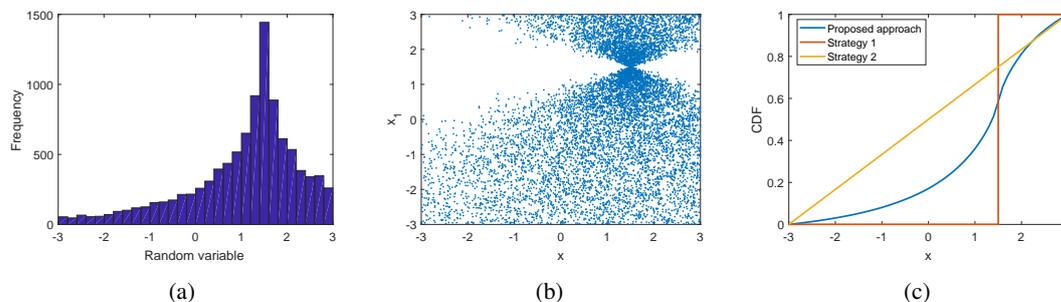


FIGURE 3 – Résultats de la procédure d'actualisation (a) Distribution à postérieure. (b) Nuage de points de la variable *principale* x et de la variable *auxiliaire* x_1 . (c) Comparaison de la fonction de répartition obtenue avec celles associées aux deux stratégies discutées en Section 2.

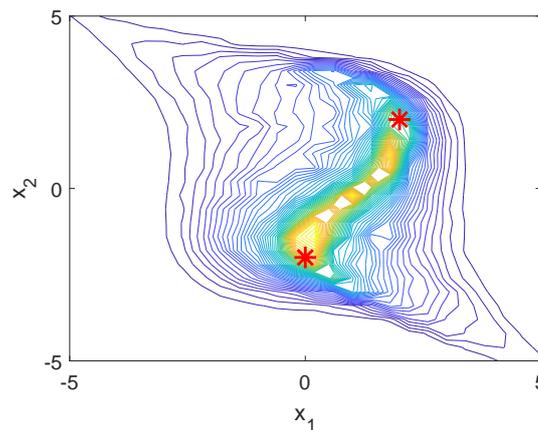


FIGURE 4 – Courbes de niveau de la densité à postériori. Les étoiles représentent les valeurs associées aux données expérimentales.

4.2 Problème non linéaire bidimensionnel

Le deuxième exemple implique deux variables aléatoires et le modèle numérique est le suivant

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y_1(\mathbf{x}) \\ y_2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_1^2 + 2x_2 + x_2^2 \\ 2x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

La distribution à priori est uniforme dans l'intervalle $[-6,6]$ pour les deux variables et les données expérimentales comprennent deux réalisations. La matrice de covariance des données expérimentales est donc de rang 1 car il manque une réalisation pour obtenir une matrice de rang complet. La Figure 4 montre la distribution postérieure ; sa valeur est maximale le long d'une courbe reliant les valeurs associées aux données expérimentales. Cette courbe n'est pas une droite car le modèle numérique est non linéaire.

5 Conclusions

Cet article traite de l'application de l'actualisation bayésienne avec des données expérimentales réduites. Dans ce contexte, la matrice de covariance associée aux données est non-inversible et la définition de la fonction de vraisemblance devient problématique. Une nouvelle procédure est proposée ; elle repose sur la génération d'échantillons *auxiliaires* supplémentaires des paramètres d'entrée. La réponse associée à ces échantillons est ensuite utilisée pour définir une distribution à priori des termes de la matrice de covariance, qui est ensuite mise à jour. La méthode est appliquée à deux exemples numériques.

Références

- [1] V. Arora. Comparative study of finite element model updating methods. *Journal of Vibration and Control*, 17(13) :2023–2039, 2011.
- [2] J.L. Beck and L.S. Katafygiotis. Updating models and their uncertainties. i : Bayesian statistical framework. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(4) :380–391, 1998.
- [3] J.L. Beck and K.M. Zuev. Asymptotically independent Markov sampling : A new MCMC scheme for Bayesian inference. *International Journal for Uncertainty Quantification*, 3(2) :445–474, 2013.

-
- [4] J. Ching and Y.-C. Chen. Transitional markov chain monte carlo method for Bayesian model updating, model class selection, and model averaging. *Journal of Engineering Mechanics*, 133(7) :816–832, 2007.
- [5] Sergio Gustavo Ferreira Cordeiro, Edson Denner Leonel, and Pierre Beaurepaire. Quantification of cohesive fracture parameters based on the coupling of bayesian updating and the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 74 :49 – 60, 2017.
- [6] M. Friswell and J. E. Mottershead. *Finite element model updating in structural dynamics*. Springer Science & Business Media, 1995.
- [7] B. Goller. *Stochastic Model Validation of Structural Systems*. PhD thesis, University of Innsbruck, June 2011.
- [8] B. Goller, H.J. Pradlwarter, and G.I. Schuëller. Robust model updating with insufficient data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(37) :3096 – 3104, 2009.
- [9] M. Imregun and W. J. Visser. A review of model updating techniques. *Shock and Vibration Digest*, 23(1) :9–20, 1991.
- [10] L.S. Katafygiotis and J.L. Beck. Updating models and their uncertainties. ii : Model identifiability. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(4) :463–467, 1998.
- [11] J.B. Nagel and B. Sudret. A unified framework for multilevel uncertainty quantification in Bayesian inverse problems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 43(Supplement C) :68 – 84, 2016.
- [12] D. Straub and I. Papaioannou. Bayesian updating with structural reliability methods. *Journal of Engineering Mechanics*, 141(3) :04014134, 2015.
- [13] M.P. Wand and M.C. Jones. *Kernel Smoothing*. Chapman and Hall/CRC, 1995.