

# Principe du Travail Maximal en Mécanique des Milieux Continus et Plasticité Regardé Comme Conséquence et Solution d'un Problème d'Optimisation Variationnelle en Utilisant la Théorie Constructale

A. GAVRUS<sup>a</sup>

a. INSA Rennes - LGCGM (EA 3913), Université Bretagne Loire (UBL), 20 Av. des Buttes de Coësmes, 35708, Rennes, France, adinel.gavrus@insa-rennes

## Résumé

*Cette recherche scientifique propose une application fondamentale de la Théorie Constructale développée par Prof. Adrian BEJAN de Duke University afin de prouver, d'un point de vue mathématique, que le Principe de Travail Maximal utilisé par la théorie de la plasticité des matériaux peut être considéré comme une conséquence et solution d'un problème général d'optimisation variationnelle. Selon la première et la deuxième loi de la thermodynamique, le principe de la Théorie Constructale cherche à les compléter avec le principe de la tendance naturelle de tout système de taille finie à minimiser les pertes et à maximiser l'entropie afin d'évoluer vers une configuration spatio-temporelle optimale. En ce sens, en ce qui concerne le processus de déformation plastique, tout écoulement d'un matériau avec des conditions aux limites et de chargement bien spécifiées est celui qui minimise la somme des puissances dissipées par la déformation et le frottement. Ainsi, toutes les variables mécaniques définissant l'état mécanique réel (vitesses, contraintes, déformation, vitesse de déformation) sont celles qui minimisent la puissance totale des dissipations. On peut alors obtenir un problème variationnelle de minimisation sous contraintes. En exploitant aussi le Principe des Puissances Virtuelles on montre au final que le Principe de Travail Maximal, utilisé notamment en plasticité des métaux, est une conséquence d'un problème de minimisation sous contraintes obtenu à partir de la Théorie Constructale. Ceci généralise son application à tout type de milieux continu et permet de prouver une forme équivalente pour les contraintes de frottement agissant sur les interfaces de contact ensemble avec les propriétés de convexité à la fois du potentiel plastique et du celui de friction. Les lois d'écoulement associées à un potentiel deviennent ainsi les seules à pouvoir respecter l'ensemble des principes de la thermodynamique. Des applications concernant la compression plane et l'écrasement cylindrique montrent la faisabilité de la formulation du problème de minimisation proposée pour pouvoir définir une solution approchée analytique de l'écoulement. Afin de valider l'ensemble de la théorie présentée, des comparaisons sont effectuées en utilisant les analyses classiques s'appuyant sur les théorèmes de la borne supérieure et inférieure, conséquentes du problème variationnelle, la méthode des tranches et une modélisation numérique éléments finis (MEF).*

## Abstract :

*This scientific research proposes a fundamental application of the Constructal Theory developed by Prof. Adrian BEJAN of Duke University to prove, from a mathematical point of view, that the*

*Maximum Working Principle used by the theory of plasticity of materials can be considered as a consequence and solution of a general problem of variational optimization. According to the first and second law of thermodynamics, the principle of Constructal Theory seeks to complement them with the principle of the natural tendency of any finite size system to minimize losses and to maximize entropy in order to evolve towards an optimal space-time configuration. In this sense, with respect to a plastic deformation process, any flow of materials with well-specified boundary and loading conditions is one that minimizes the sum of the dissipated power of deformation and of friction. Thus, all the mechanical variables defining the real mechanical state (speeds, stresses, deformation, strain rate) are those which minimize the total dissipated power. It is then obtained a variational minimization problem under a lot of constraints. By exploiting also the Principle of Virtual Powers it is shown finally that the Principle of Maximum Work, used particularly in metals plasticity, is a consequence of a minimization problem under constraints obtained from the Constructal Theory. This generalizes its application to any type of continuous media and allows proving an equivalent form for the friction stresses of contact interfaces together with the convexity properties of both the plastic and the friction potential. The flow laws associated with a potential thus become the only ones able to respect the thermodynamics principles. Applications concerning plane compression and cylindrical crushing show the feasibility of the proposed minimization problem formulation to define flow approximate analytical solutions. In order to validate the whole presented theory, comparisons are made using classical analyzes based on the upper and lower bound theorems, obtained that consequences of optimization variational problem, the slice method and a finite element modeling (FEM).*

**Mots clefs : Théorie Constructale, Approches Thermodynamiques, Plasticité des Milieux Continus, Optimisation Variationnelle, Théorème du « Principe » de Travail Maximal**

## **1 Introduction**

Pendant les vingt derniers années le professeur Adrian BEJAN de Duke University a développé des recherches théoriques et appliquées concernant l'optimisation thermodynamique des systèmes complexes basées sur le principe qu'il a appelé constructale définissant leurs évolutions par la maximisation de l'entropie, la minimisation de la résistance et des pertes liés aux flux d'écoulements locaux ou globaux et la maximisation de la vitesse à atteindre un état d'équilibre stable. Comme mentionner dans des travaux scientifiques antérieurs [1-2], la Théorie Constructale du professeur Adrian BEJAN peut être vue comme définition et résolution d'un problème général d'optimisation sous contraintes tenant compte du postulat que: «afin qu'un système de taille finie persiste dans le temps (afin de pouvoir survivre), il doit évoluer de manière à faciliter au maximum l'accès sous les flux des contraintes et pertes imposés ou qui les traversent ». De plus il est aussi constaté que tous les systèmes cherchent à optimiser la distribution de leurs imperfections afin de faciliter l'écoulement et de minimiser la résistance locale ou les puissances de transformation requises. De nombreuses études concernant des problèmes thermiques, d'écoulement de fluide ou de milieux poreux, des phénomènes naturels ou même de comportements économiques ou sociétaux confirment ce principe [2]. Partant des travaux scientifiques récents de l'auteur, cet article propose de consolider une preuve mathématique générale du « Principe » de Travail Maximal (PTM) en mécanique à travers sa définition comme un théorème qui découle de l'application du Principe Constructal vu comme étant un postulat plus général du point de vue thermodynamique et valable pour tout type de système matériel [3,4]. Il est bien connu que le Principe de Travail Maximal est utilisé par la théorie de la plasticité [5] pour obtenir des lois

d'écoulement associées ou définissant les équations constitutives de l'écoulement liées à la résistance d'un matériau, voir pour développer des calculs analytiques ou numériques, en particulier lors des procédés de formage. Des travaux antérieurs [6-7] cherchent à expliquer et à postuler le Principe de Travail Maximal uniquement par une approche purement phénoménologique et seulement pour des matériaux métalliques polycristallins partant des glissements locaux suivant les plans atomiques de densité maximale. En exploitant le Principe de Puissances Virtuelles (PPV) définissant l'équilibre dynamique du point de vue mécanique et suite à la Théorie Constructale, le Principe de Travail Maximal peut être obtenu comme une conséquence directe d'un problème général d'optimisation variationnelle qui cherche à minimiser la résistance lors de l'écoulement du matériau, voir la somme des énergies de dissipations du système. Après des bases théoriques accompagnées de leurs conséquences concernant la convexité et la règle de normalité des potentiels rhéologique et tribologique liées au comportement en volume et aux interfaces de contact, seront rappelés les théorèmes de la borne supérieure et inférieure ensemble avec des applications concernant la compression plane d'un échantillon parallélépipédique et l'écrasement d'une éprouvette cylindrique prenant en compte un comportement rigide-plastique et un frottement plastique de type Tresca. Une validation des techniques proposées avec l'ensemble des solutions analytiques obtenues sera fait à travers des comparaisons entre les estimations de l'évolution des efforts de compression et les résultats numériques données par une Modélisation Eléments Finis en utilisant Forge2®.

## 2 Considérations Théoriques

Selon la théorie de la mécanique des milieux continus, prenant en compte un écoulement de matière dans un volume  $\Omega$  bien défini, l'équilibre mécanique dynamique local peut être écrit en utilisant le principe de puissances virtuelles (PPV) sous la forme suivante:

$$\int_{\Omega} [\sigma] : [\dot{\epsilon}^*] dV + \int_{\partial\Omega} -\bar{\tau} \cdot \Delta \bar{v}^* dS = \int_{\partial\Omega'} \bar{T} \cdot \bar{v}^d dS' + \int_{\partial\Omega''} \bar{T}^d \cdot \bar{v}^* dS'' + \int_{\Omega} \rho \bar{f} \cdot \bar{v}^* dV - \int_{\Omega} \rho \frac{d\bar{v}^*}{dt} \cdot \bar{v}^* dV \quad (1)$$

Il est connu que ce principe, équivalent à la loi fondamentale de Newton, est valable pour tout champ de vitesses virtuelles admissibles  $\bar{v}^*$  respectant les conditions aux limites avec la prise en compte du tenseur de contrainte de Cauchy  $[\sigma]$ , du tenseur vitesse de déformation virtuelle  $[\dot{\epsilon}^*] = \frac{1}{2} \{ [grad(\bar{v}^*)] + [grad(\bar{v}^*)]^T \}$ , du vecteur du contrainte de frottement  $\bar{\tau}$  agissant sur la surface de contact ou surface des discontinuités de la vitesse  $\partial\Omega$ , du chargement spécifique  $\bar{T}$ , de la vitesse imposée  $\bar{v}^d$  sur la partie de frontière  $\partial\Omega'$ , de la charge spécifique imposée  $\bar{T}^d$  sur la partie de frontière  $\partial\Omega''$ , des forces de masse  $\bar{f}$  et de la masse volumique  $\rho$ .

Si l'on considère le champ de vitesse réel d'écoulement  $\bar{v}$  l'équilibre mécanique est bien décrit par:

$$\int_{\Omega} [\sigma] : [\dot{\epsilon}] dV + \int_{\partial\Omega} -\bar{\tau} \cdot \Delta \bar{v} dS = \int_{\partial\Omega'} \bar{T} \cdot \bar{v}^d dS' + \int_{\partial\Omega''} \bar{T}^d \cdot \bar{v} dS'' + \int_{\Omega} \rho \bar{f} \cdot \bar{v} dV - \int_{\Omega} \rho \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot \bar{v} dV \quad (2)$$

### 2.1 Théorème du « Principe » de Travail Maximal

En utilisant la loi constructale, dans le cas d'un matériau déformable ou lors d'un processus de formage, on peut postuler que l'écoulement du matériau s'effectue tel qu'il minimise la somme des puissances dissipées correspondant à l'écoulement du matériau, au frottement aux interfaces de contact ou des discontinuités de vitesses et aux charges imposées. Par conséquent, les valeurs réelles de toutes les variables cinématiques et mécaniques (vitesses, contraintes, déformations, vitesses de déformation) sont celles qui minimisent la puissance totale de dissipation. Ainsi, pour tout état de la matière défini

par des variables virtuelles, les variables réelles doivent minimiser la fonctionnelle de puissance de dissipation totale. On peut alors en conclure que, pour tous les matériaux plastiques (métalliques ou non métalliques) et tout état virtuel, le tenseur de vitesse de déformation réelle  $[\dot{\epsilon}]$  et le tenseur réel des contraintes  $[\sigma]$  correspondant au flux d'écoulement de la matière peuvent être obtenus en minimisant la somme de la puissance plastique dissipée, de la puissance de frottement ou des discontinuités de vitesses et de la puissance des charges imposées. De plus, la plasticité du matériau est généralement régie en termes de tenseur de contrainte et du vecteur de frottement à travers un critère plastique défini par une fonction scalaire à variables multiples  $\Phi_p([\sigma])=0$  ensemble avec la forme similaire concernant le frottement  $\Psi_f(\bar{\tau})=0$ . Dans ce cas, à partir de tous les autres champs de vitesse virtuels admissibles  $v^*$  (différentes de celui réel) caractérisés par le tenseur de vitesse de déformation virtuelle  $[\dot{\epsilon}^*] \neq [\dot{\epsilon}]$  et un tenseur de contraintes plastiques virtuelles  $[\sigma^*]$  ( $\Phi_p([\sigma^*])=0$  et  $\Psi_f(\bar{\tau}^*)=0$ ), l'état réel de l'écoulement plastique du matériau peut être obtenu à partir du problème de minimisation de la fonctionnelle définie à travers la puissance totale virtuelle dissipée:

$$\dot{W}_d = \text{Min}(\dot{W}_d^*) \text{ où } \dot{W}_d^* = \int_{\Omega} [\sigma^*] : [\dot{\epsilon}^*] dV + \int_{\partial\Omega} -\bar{\tau}^* \cdot \Delta \bar{v}^* dS + \int_{\partial\Omega''} -\bar{T}^d \cdot \bar{v}^* dS'' \quad (3)$$

En utilisant les conditions aux limites concernant la cinématique et le chargement du matériau, un problème variationnel de minimisation sous contraintes est alors obtenu. La solution correspond bien pour l'état d'écoulement réel. Ainsi pour tous les états virtuels, l'on a l'inégalité suivante :

$$\int_{\Omega} [\sigma] : [\dot{\epsilon}] dV + \int_{\partial\Omega} -\bar{\tau} \cdot \Delta \bar{v} dS + \int_{\partial\Omega''} -\bar{T}^d \cdot \bar{v} dS'' \leq \int_{\Omega} [\sigma^*] : [\dot{\epsilon}^*] dV + \int_{\partial\Omega} -\bar{\tau}^* \cdot \Delta \bar{v}^* dS + \int_{\partial\Omega''} -\bar{T}^d \cdot \bar{v}^* dS'' \quad (4)$$

Pour des matériaux consistants et des conditions quasi-statiques, la masse et les forces d'inertie peuvent être négligées. Le principe PPV peut alors être écrit sous la forme simplifiée:

$$\int_{\Omega} [\sigma] : [\dot{\epsilon}] dV + \int_{\partial\Omega} -\bar{\tau} \cdot \Delta \bar{v} dS + \int_{\partial\Omega''} -\bar{T}^d \cdot \bar{v} dS'' = \int_{\Omega} [\sigma] : [\dot{\epsilon}^*] dV + \int_{\partial\Omega} -\bar{\tau} \cdot \Delta \bar{v}^* dS + \int_{\partial\Omega''} -\bar{T}^d \cdot \bar{v}^* dS'' \quad (5)$$

En partant de (4) et (5), on obtient pour tout état de contrainte virtuelle  $[\sigma^*]$  ( $\Phi_p([\sigma^*])=0$ ) ou de frottement  $\bar{\tau}^*$  ( $\Psi_f(\bar{\tau}^*)=0$ ) et tout domaine  $\Omega$  la forme équivalente suivante:

$$\int_{\Omega} ([\sigma^*] - [\sigma]) : [\dot{\epsilon}^*] dV + \int_{\partial\Omega'} (\bar{\tau} - \bar{\tau}^*) \cdot \Delta \bar{v}^* dS' \geq 0 \quad (6)$$

Celle-ci impose d'avoir des valeurs positives pour chaque terme :

$$([\sigma^*] - [\sigma]) : [\dot{\epsilon}^*] \geq 0, \forall [\sigma^*], \Phi_p([\sigma^*])=0 \text{ et } -(\bar{\tau} - \bar{\tau}^*) \cdot \Delta \bar{v}^* \geq 0, \forall \bar{\tau}^*, \Psi_f(\bar{\tau}^*)=0 \quad (7)$$

En effet si l'on considère qu'il existe un état virtuel des contraintes ou de frottement pour lequel les termes sont négatives l'on pourrait construire un autre état virtuel adjoint identique avec l'état réel de contraintes en dehors du domaine pour lequel les termes des intégrales sont négatives (donc avec des intégrales nulles en dehors de ce domaine) et l'on obtiendrait une valeur négative pour l'inégalité (6) ce qui contredit bien la valeur positive à respecter. Dans le sens inverse, prenant en compte l'écoulement plastique réel caractérisé par le champ de vitesse  $v$ , le tenseur de vitesse de déformation  $[\dot{\epsilon}]$  et des contraintes  $[\sigma]$ , tout autre état des contraintes admissibles doit aussi vérifier:

$$([\sigma] - [\sigma^*]) : [\dot{\epsilon}] \geq 0, \forall [\sigma^*], \Phi_p([\sigma^*])=0 \text{ et } -(\bar{\tau} - \bar{\tau}^*) \cdot \Delta \bar{v} \geq 0, \forall \bar{\tau}^*, \Psi_f(\bar{\tau}^*)=0 \quad (8)$$

En utilisant les relations ci-dessus obtenues (7) et (8), il est possible de prouver mathématiquement la forme convexe des fonctions définissant les critères de plasticité et du frottement et par la suite la propriété connue de normalité au critère. En conséquence la vitesse de déformation plastique devrait donc être proportionnelle au gradient du critère par rapport aux composantes de contrainte i.e.:

$$[\dot{\epsilon}] = \lambda_p \partial \Phi_p / \partial [\sigma], \lambda_p \geq 0 \quad (9)$$

Dans le même sens la loi de frottement associée peut être écrite sous la forme:

$$\Delta \bar{v} = -\lambda_f \partial \Psi_f / \partial \bar{\tau}, \lambda_f \geq 0 \quad (10)$$

Dans ce cas, en s'appuyant sur la propriété de convexité des critères  $\Phi_p([\sigma^*])$  et  $\Psi_f(\bar{\tau}^*)$ , les deux inégalités exprimées par (8) peuvent être étendues aux contraintes virtuelles respectant  $\Phi_p([\sigma^*]) \leq 0$  et  $\Psi_f(\bar{\tau}^*) \leq 0$ . Il est alors possible de conclure que pour tout état de contraintes virtuelles on a:

$$([\sigma] - [\sigma^*]) : [\dot{\epsilon}] \geq 0, \forall [\sigma^*], \Phi_p([\sigma^*]) \leq 0 \text{ et } -(\bar{\tau} - \bar{\tau}^*) \cdot \Delta \bar{v} \geq 0, \forall \bar{\tau}^*, \Psi_f(\bar{\tau}^*) \leq 0 \quad (11)$$

La première inégalité est connue dans la théorie de plasticité en tant que Principe du Travail Maximal [4-7]. Il est prouvé ici que celle-ci peut être obtenue comme une conséquence de la Théorie Constructale [1], [3] et du principe des puissances virtuels. La deuxième inégalité traduit le même principe pour l'état de contrainte de frottement.

## 2.2 Conséquences Pratiques et Synthèse

En utilisant les preuves théoriques ci-dessus présentés, on peut conclure que le Principe de Travail Maximal peut être appliqué pour tout type de milieux continu: fluide, matériau massif ou pâteux, métallique ou non métallique, ainsi que pour définir sous une forme similaire le principe de puissance maximale concernant les contraintes de frottement. Des expressions spécifiques concernant le critère convexe de plasticité ou de frottement  $\Phi_p([\sigma]) = 0, \Psi_f(\bar{\tau}) = 0$  peuvent être proposées et utilisées pour définir le comportement plastique isotrope ou anisotrope des matériaux, respectivement des lois constitutives de glissement aux interfaces de contact. Il est aussi possible d'obtenir et démontrer les théorèmes de la borne inférieure et supérieure (Fig. 1) [5-7]. Celles-ci peuvent également être considérées comme des formulations d'optimisation variationnelle et sont fréquemment utilisées pour obtenir des estimations analytiques des efforts appliqués lors d'un processus de formage des matériaux dans des hypothèses particulières. Elles sont également utilisées pour comparer et valider les résultats obtenus par une Modélisation Eléments Finis (MEF).

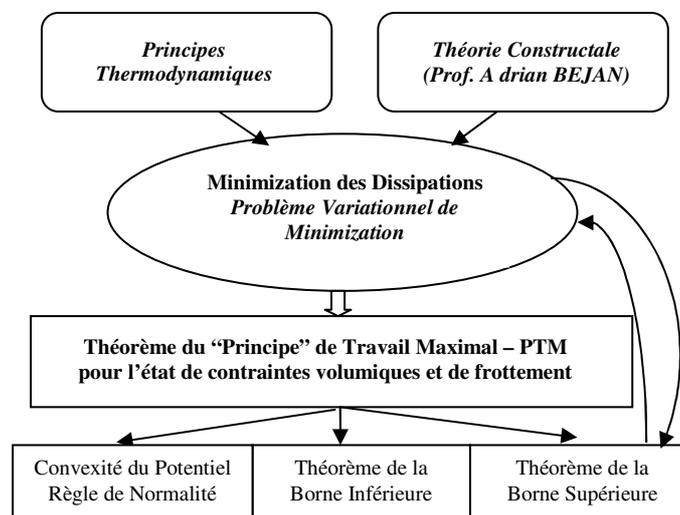


Fig. 1. Organigramme concernant la formulation du problème variationnel de minimisation des dissipations basé sur la Théorie Constructale et l'obtention du « Principe » de Travail Maximal (PTM) ensemble avec les propriétés/théorèmes caractéristiques

En ce qui concerne le théorème de la borne supérieure [7], il est constaté que l'on obtient en effet une forme équivalente du problème variationnel de minimisation (3). On peut donc conclure sur la cohérence et surtout l'équivalence entre le Principe de Travail Maximal et le Principe de Minimisation des Dissipations totales obtenu à partir de la Théorie Constructale.

### 3 Applications: Compression Plane et Ecrasement Cylindrique

Afin de valider le principe variationnel de minimisation des dissipations exprimé par le problème d'optimisation (3) postulant l'état réel d'un matériau lors d'une déformation plastique, on considère deux cas de formage simple : compression plane et écrasement cylindrique (Figure 2a et Figure 2b).

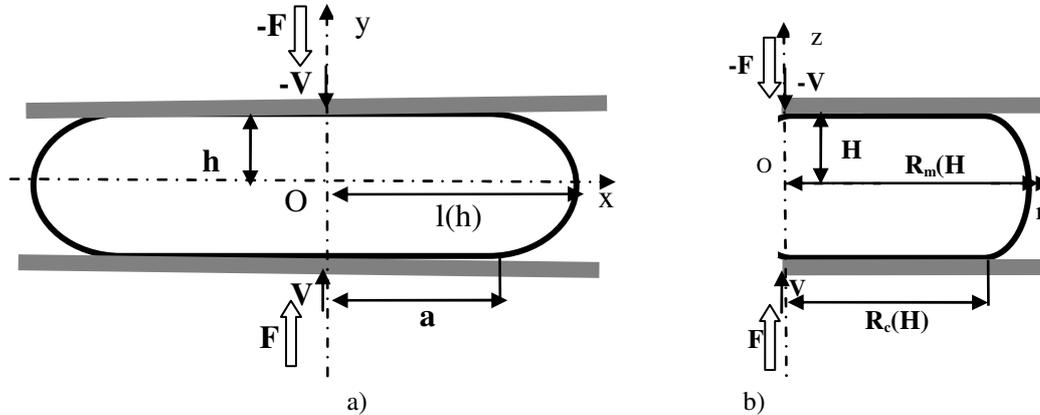


Fig. 2. Configuration des formages simples : a) compression plane, b) écrasement cylindrique

Tableau 1. Définition du facteur d'élancement  $e$ , des fonctions de forme par rapport au paramètre cinématique adimensionnel  $\beta$ , de la puissance de référence totale  $P$  et de la fonctionnelle exprimant la puissance virtuelle de dissipations  $\dot{W}_d^*$ .

		Compression Plane	Ecrasement Cylindrique
$e$		$a/h$	$R/H$
$\alpha(\beta)$	$\beta \neq 0$	$\beta e / 2$	$ \beta  e / 2$
	$\beta \rightarrow 0$	0	0
$\phi[\alpha(\beta)]$	$\beta \neq 0$	$\sqrt{1+\alpha(\beta)^2} + \frac{\ln[\alpha(\beta) + \sqrt{1+\alpha(\beta)^2}]}{\alpha(\beta)}$	$8\alpha(\beta) \left[ \left( \frac{1}{12} + \alpha(\beta)^{-2} \right)^{3/2} - \left( \alpha(\beta)^{-2} \right)^{3/2} \right]$
	$\beta \rightarrow 0$	2	1
$\varphi(\beta)$	$\beta \neq 0$	$\beta \exp(-\beta) / [1 - \exp(-\beta)]$	$2(\beta/2) \exp(-\beta/2) / [1 - \exp(-\beta/2)]$
	$\beta \rightarrow 0$	1	2
$\beta_{opt}$		Condition nécessaire $2 \frac{d\phi}{d\beta} + \bar{m} e \frac{d\varphi}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\phi}{d\alpha} + \bar{m} \frac{d\varphi}{d\beta} = 0$	Condition nécessaire $2 \frac{d\phi}{d\beta} + \frac{\bar{m} e}{3\sqrt{3}} \frac{d\varphi}{d\beta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{ \beta } \frac{d\phi}{d\alpha} + \frac{\bar{m}}{3\sqrt{3}} \frac{d\varphi}{d\beta} = 0$
$P$		$\frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_0 a L V = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 S_p V$	$\sigma_0 \pi R^2 V = \sigma_0 S_c V$
$\dot{W}_d^*(\beta)$		$P [\phi[\alpha(\beta)] + \bar{m} e \varphi(\beta) / 2]$	$P [2\phi[\alpha(\beta)] + \bar{m} e \varphi(\beta) / 3\sqrt{3}]$
$\dot{W}_d^*(0)$		$\dot{W}_d^*(0) = 2P \left[ 1 + \bar{m} \frac{e}{4} \right]$	$\dot{W}_d^*(0) = 2P \left[ 1 + \bar{m} e / 3\sqrt{3} \right]$

On suppose un matériau avec comportement rigide-plastique parfait défini par une contrainte équivalente de Von-Mises constante  $\sigma_0$  (i.e.  $\Phi_p([\sigma^*]) = \bar{\sigma}^* - \sigma_0 = 0$ ). Au vu des grandes déformations plastiques générées lors d'un procédé de compression ou d'écrasement sur une presse double-effet à vitesse constante  $V$  l'on prend en compte au niveau des contacts pièce-outils un frottement de Tresca  $\tau = \bar{m}\sigma_0 / \sqrt{3}$  où  $\bar{m} \in [0, 1]$ . Dans les systèmes des coordonnées de la Fig. 2, en tenant compte des symétries axiales, respectivement de révolution, pour chaque instant du temps  $t$  la géométrie de l'échantillon parallélépipédique pour la compression plane est définie par une surface transversale  $S_t = 2a \times 2h$  et une surface longitudinale  $S_p = 2a \times L$ , alors que dans le cas d'écrasement cylindrique l'éprouvette est définie par une surface cylindrique  $S_c$  de rayon  $R \approx R_m(H) \approx R_c(H)$  et par une hauteur  $2H$ . Pour pouvoir exploiter le principe variationnel exprimant l'état réel de l'écoulement à travers le problème de minimisation (3), l'on définit une cinématique virtuelle à travers un champ de vitesses incompressible ( $\text{div}(\vec{v}^*) = 0$ ) et cinématiquement admissible (conforme aux conditions limites de la Fig. 2) en exprimant les composantes avec les expressions ci-dessous proposées par Avitzur dans le cas d'une compression plane respectivement d'un écrasement cylindrique [8]:

$$\begin{aligned} v_x^*(x, y) &= AV \frac{x}{h} \exp(-\beta y / h) & v_r^*(r, z) &= A'V \frac{r}{H} \exp(-\beta z / 2H) \\ v_y^*(y) &= AV [\exp(-\beta y / h) - 1] / \beta & v_z^*(z) &= 4A'V [\exp(-\beta z / 2H) - 1] / \beta \\ v_x^*(0, y) &= 0, v_y^*(0) = 0, v_y^*(h) = -V & v_r^*(0, z) &= 0, v_\theta^*(r, z) = 0, v_z^*(0) = 0, v_z^*(H) = -V \\ A &= \beta / [1 - \exp(-\beta)], x \in [0, a], y \in [0, h] & A' &= \beta / 4 [1 - \exp(-\beta / 2)], r \in [0, R], z \in [0, H] \end{aligned} \quad (12)$$

Ici  $\beta$  représente un paramètre adimensionnel faisant varier la forme du champ virtuelle de vitesses. Partant du problème variationnel (3), la puissance totale réelle de dissipations  $\dot{W}_d$  doit respecter :

$$\dot{W}_d = \text{Min } \dot{W}_d^* \leq \text{Min } \dot{W}_d^*(\beta) \quad (13)$$

Vu que l'on a  $\bar{T}^d = 0$  la sous-famille de la puissance totale virtuelle des dissipations est définie par:

$$\dot{W}_d^*(\beta) = \int_{\Omega} [\sigma^*] : [\dot{\epsilon}^*] dV + \int_{\partial\Omega} -\bar{t}^* \cdot \Delta \vec{v}^* dS = \int_{\Omega} \sigma_0 \dot{\epsilon}^* dV + \int_{\partial\Omega} (\bar{m}\sigma_0 / \sqrt{3}) \cdot |\Delta \vec{v}^*| dS \quad (14)$$

avec:

$$\dot{\epsilon}^* = \sqrt{(2/3) \text{Trace}\{[\dot{\epsilon}^*]^2\}} \quad \text{et} \quad [\dot{\epsilon}^*] = \frac{1}{2} \{ [\text{grad}(\vec{v}^*)] + [\text{grad}(\vec{v}^*)]^T \} \quad (15)$$

La synthèse du calcul analytique de l'ensemble des termes intervenants dans l'évaluation de  $\dot{W}_d^*$  est présenté dans le Tableau 1 sur la base des évaluations détaillées dans des travaux précédents [3] et [4], voir [6-10]. Etant donnée la complexité de calcul du  $\beta_{opt}$  minimisant  $\dot{W}_d^*(\beta)$  l'on restreint ici l'étude à la condition nécessaire  $\dot{W}_d \leq \text{Min } \dot{W}_d^*(\beta) \leq \dot{W}_d^*(0)$ .

Ainsi concernant la compression plane l'effort réel  $F$  doit vérifier:

$$F \leq \tilde{F} = \frac{\dot{W}_d^*(0)}{2V} = \frac{4aL\sigma_0}{\sqrt{3}} [1 + \bar{m}e / 4] = \frac{2\sigma_0 S_p}{\sqrt{3}} [1 + \bar{m}e / 4] \quad (16)$$

A partir de théorème de la borne inférieure, en utilisant un état de contrainte virtuel statiquement admissible ( $\text{Div}([\sigma]^*) = 0$ ) bien spécifique [3], tout en s'appuyant sur le PPV et le PTM conséquent du problème de minimisation (3), l'on a :

$$F \geq \tilde{\tilde{F}} = \frac{4aL\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[ \sqrt{1 - \bar{m}^2} + \bar{m}e / 4 \right] = \frac{2\sigma_0 S_p}{\sqrt{3}} \left[ \sqrt{1 - \bar{m}^2} + \bar{m}e / 4 \right] \quad (17)$$

Il est facile de constater que l'on pourrait évaluer l'effort réel de compression par la valeur moyenne  $F \approx (\tilde{F} + \tilde{\tilde{F}}) / 2$  avec une erreur maximale d'estimation de  $(1 - \sqrt{1 - \bar{m}^2}) / (1 + \bar{m}e / 4)$  où  $\bar{m} \in [0, 1]$ .

Dans le cas particulier de l'absence du frottement ( $\bar{m}=0$ ) l'on a  $\tilde{F}=\tilde{\tilde{F}}$  et donc  $F = \frac{4aL\sigma_0}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_0 S_p$ .

Cette expression est identique avec celle obtenue par une étude analytique basée sur la résolution de l'équation différentielle d'incompressibilité (définissant le champ réel de vitesses par  $v_x(x)=Vx/h$ ,  $v_y(y)=-Vy/h$ ), de l'équation d'équilibre statique et de la loi de normalité du potentiel rigide-plastique (avec comme solution le tenseur des contraintes  $\sigma_{xx}=0, \sigma_{yy}=-2\sigma_0/\sqrt{3}, \sigma_{zz}=-\sigma_0/\sqrt{3}$ ) [6]. Il est important de noter que dans ce cas, en choisissant  $\beta=0$  (car au vu du Tab. 1  $\beta_{opt}=0$  si  $\bar{m}=0$ ), l'on trouve pratiquement le minimum global de l'expression (13), ce qui prouve bien que l'écoulement réel est la solution du problème variationnel d'optimisation (3). Une analyse similaire pour l'écrasement cylindrique donne :

$$F \leq \tilde{F} = \frac{\dot{W}_d^*(0)}{2V} = \pi R^2 \sigma_0 \left[ 1 + \bar{m}e / 3\sqrt{3} \right] = \sigma_0 S_c \left[ 1 + \bar{m}e / 3\sqrt{3} \right] \quad (18)$$

Partant des résultats détaillés dans [4] l'on obtient:

$$F \geq \tilde{\tilde{F}} = \pi R^2 \sigma_0 \left[ \sqrt{1-\bar{m}^2} + \bar{m}e / 3\sqrt{3} \right] = \sigma_0 S_c \left[ \sqrt{1-\bar{m}^2} + \bar{m}e / 3\sqrt{3} \right] \quad (19)$$

L'effort moyen d'écrasement peut-être défini par  $F \approx (\tilde{F} + \tilde{\tilde{F}}) / 2$  avec une erreur d'estimation maximale autour de  $(1 - \sqrt{1-\bar{m}^2}) / (1 + \bar{m}e / 3\sqrt{3})$ . Pour le cas d'écrasement sans frottement  $F = \tilde{F} = \tilde{\tilde{F}} = \pi R^2 \sigma_0$  i.e  $F = \sigma_0 S_c$ . De la même manière l'on constate que celle-ci coïncide avec la solution analytique (champ de vitesses réel défini par  $v_r(r)=Vr/H$ ,  $v_z(z)=-Vz/H$  et tenseur de contrainte diagonal  $\sigma_{rr}=0, \sigma_{\theta\theta}=0, \sigma_{zz}=-\sigma_0$ ) [6]. L'on obtient la même conclusion c'est-à-dire que l'on a pratiquement  $\beta_{opt}=0$  ce qui justifie de nouveau l'obtention du minimum global du problème d'optimisation (3), voire de la condition exprimé par (13).

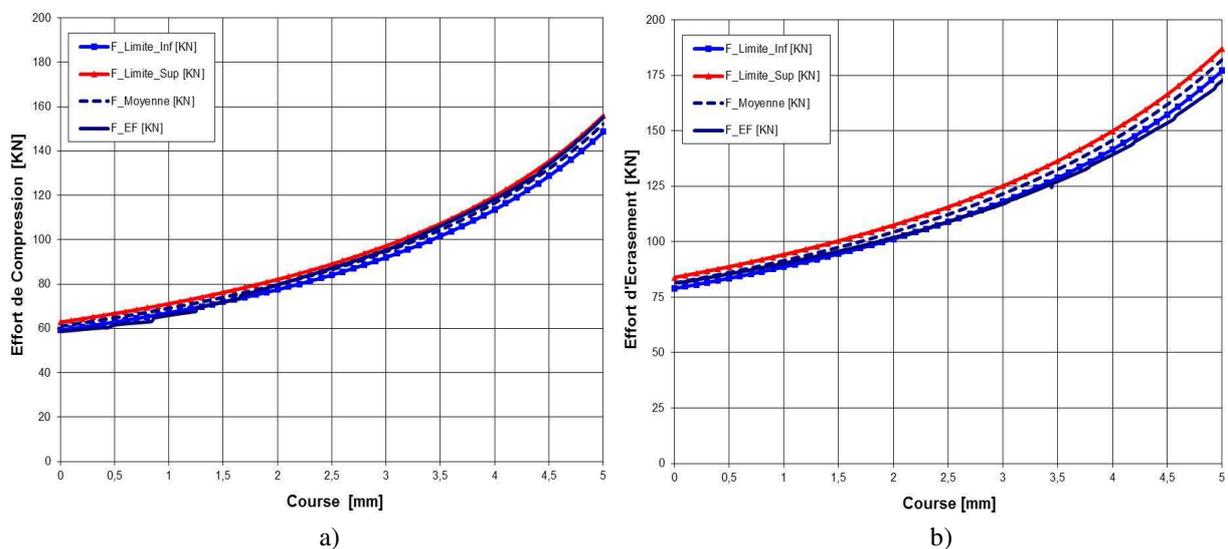


Fig. 3. Comparisons des évolutions des efforts avec le déplacement des tas de compression obtenues par estimations analytiques et numériques : a) compression plane, b) écrasement cylindrique

Pour illustrer le degré de précision des estimations analytiques des efforts de formage par rapport à une modélisation Eléments Finis (EF) en utilisant le logiciel Forge2® l'on considère un échantillon parallélépipédique des dimensions 20 mm x 20 mm x 20 mm avec un élancement initial  $e_0 = 1$  et une éprouvette cylindrique de volume équivalent définie par un rayon de 10 mm, une hauteur de 20 mm et d'un même élancement initial  $e_0 = 1$ . En supposant  $\sigma_0 = 250$  MPa et un frottement moyen défini par  $\bar{m} = 0.35$  l'on obtient les courbes d'évolutions de l'effort représentées dans les Fig. 3a et Fig. 3b.

Il est facile de constater que dans les deux cas (compression plane et écrasement cylindrique) la solution EF de l'évolution de l'effort se trouve bien entre les limites théoriques supérieure  $\tilde{F}$  et inférieure  $\tilde{F}$  avec des valeurs très proches de celles donnée par l'estimation moyenne  $F \approx (\tilde{F} + \tilde{F})/2$  (erreur inférieure à 1%) alors que l'erreur de l'estimation de l'effort pour un taux de déformation logarithmique maximale d'environ 70%, vu par la différence de variation entre la limite inférieure et supérieure, est de maximum 6.5%. Dans le cas idéal sans frottement les courbes analytiques sont confondues avec des valeurs pratiquement égales à l'estimation numérique éléments finis. De plus pour un élanement initial identique et un volume de matière presque équivalent (avec un rapport de  $4/\pi$ ) la force d'écrasement cylindrique est d'environ 1.15-1.25 fois plus grande que dans le cas d'une compression plane, en retrouvant ainsi le rapport  $2/\sqrt{3}$  entre les deux modes de déformation.

## 4 Conclusions

Au cours du contenu de cet article, il a été prouvé que pour un écoulement plastique de tous milieux continus, à partir d'un principe général défini par la Théorie Constructale concernant la minimisation de l'énergie totale dissipée caractérisant l'évolution d'un corps matériel déformable de taille finie, l'on obtient et l'on démontre dans une forme plus générale le « Principe » de Travail Maximal à la fois en ce qui concerne l'état de contraintes volumiques et celui du frottement. L'application pour une compression plane et un écrasement cylindrique d'un matériau rigide-plastique montre la faisabilité de la formulation proposée à travers un problème variationnel de minimisation de l'énergie dissipée totale avec possibilités d'obtenir des estimations analytiques de l'évolution des efforts de formage requises. Ainsi les expressions et les valeurs analytiques optimales des limites supérieures et inférieures au niveau de l'évolution de la force de compression doivent être vues comme conséquences du problème variationnel d'optimisation proposé. Les comparaisons avec les résultats de simulation obtenus par une modélisation éléments finis montrent la faisabilité et surtout le degré de précision obtenu.

## Références

- [1] A. Bejan, Shape and Structure: From Engineering to Nature, UK Cambridge Univ. Press Ed., 2000
- [2] A. Bejan, S. Lorente, Design with Constructal Theory, New Jersey, John Wiley & Sons Inc., 2008
- [3] A. Gavrus, The Maximum Work Principle Regarded as a Consequence of an Optimization Problem Based on Mechanical Virtual Power Principle and Application of Constructal Theory, AIP Conference Proceedings 1896 (2017) 100009-1-6
- [4] A. Gavrus, Application of Constructal Theory to Write Mechanical Maximum Work Principle and Equilibrium State of Continuum Media Flow as a Solution of a Variational Optimization Problem, Int. Journal of Modeling and Optimization, 8(4) (2018) 227-231
- [5] G. A. Maugin, The thermodynamics of plasticity and fracture, UK: Cambridge Univ. Press, 1992
- [6] M. Bellet, J-L. Chenot, L. Fourment, E. Massoni, P. Montmitonnet, Plasticity Seminary: Elements Finis et Mise en Forme des Métaux, Ed. Sophia-Antipolis, France : ENSMP, Paris, 1994.
- [7] E. Felder, Plasticité en mise en forme – Comportement rigide-plastique, Tech. Ing. : M3003, Paris, France, 2007
- [8] B. Avitzur, Metal Forming: Processes and Analysis, New-York, USA: McGraw-Hill, 1968
- [9] A. Gavrus, H. Francillette, Identification of Anisotropic Hill Criteria from the Channel Die Compression Test. Application to a Normal Anisotropy of Zirconium 702 $\alpha$ , Journal de Physique IV (Eur. Phys. J.) (105) (2003) 11-18.
- [10] R. Ebrahimi and A. Najafizadeh, A new method for evaluation of friction in bulk metal forming, J. of Mat. Proc. Tech. 152 (2004) 136-143