

# Prise en compte de l'erreur de discrétisation pour l'estimation de probabilité de défaillance par surface de réponse

L. MELL<sup>a</sup>, V. REY<sup>a</sup>, F. SCHOEFS<sup>a</sup>

a. GeM-Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique-UMR 6183-CNRS-Ecole Centrale de Nantes-Université de Nantes, ludovic.mell@etu.univ-nantes.fr, valentine.rey@univ-nantes.fr, franck.schoefs@univ-nantes.fr

## Résumé : (16 gras)

*Cet article propose la construction d'un méta-modèle multi-fidélité pour l'évaluation de la probabilité de défaillance d'une structure mécanique. Un méta-modèle se basant sur le krigeage est construit à partir d'évaluations de l'état-limite pour plusieurs réalisations de variables aléatoires. L'exploitation d'estimateurs de l'erreur de discrétisation permet de garantir le signe de l'état-limite en ces points et d'adapter la taille du maillage des simulations éléments finis. Une illustration sur une plaque fissurée avec une variable aléatoire est réalisée.*

## Abstract : (16 gras)

*This paper presents the construction of a multi-fidelity metamodel in the context of safety analysis. A kriging-based meta-model is built from finite element computations for several realizations of random variables. This metamodel is then used to estimate the probability of failure of the mechanical structure. The use of discretization error estimators enables to guarantee the state (failure or safety) of the structure at the design points and to adapt the size of the mesh used for the simulations. We illustrate this approach on a 2D mechanical problem of a cracked plate.*

**Mots clefs : Fiabilité, probabilité de défaillance, surface de réponse, estimation d'erreur**

## Introduction

Dans un problème mécanique, certaines variables de conception peuvent être aléatoires. Cela peut entraîner une variabilité dans l'état (défaillant ou fonctionnel) d'un système qu'il n'est plus alors possible de garantir avec certitude. En modélisant les paramètres incertains par des variables aléatoires, il est possible de propager cette incertitude pour exprimer l'état du système par une probabilité de défaillance. Cette probabilité est généralement estimée grâce à la méthode de Monte-Carlo qui nécessite de simuler la performance de la structure pour de nombreuses réalisations des variables aléatoires d'entrée. Pour

des problèmes mécaniques complexes, trouver la solution analytique n'est pas envisageable et la solution est généralement approchée par la méthode des éléments finis.

Les appels à ce code étant souvent très coûteux en temps de calcul, un métamodèle est alors construit. Appeler ce modèle plutôt que le code éléments finis étant bien plus rapide, de nombreuses simulations peuvent être réalisées pour estimer la probabilité de défaillance du système à condition que le métamodèle soit fidèle du point de vue de la fiabilité c'est à dire du transfert des distributions [1]. Plusieurs types de métamodèle existent. Parmi eux, le Krigeage [2] présente l'avantage de donner une estimation de la variance, permettant ainsi d'enrichir le métamodèle aux endroits les plus incertains. Des méthodes sophistiquées couplant l'estimateur de Monte-Carlo avec un modèle de Krigeage ont ainsi été développées [3] pour l'estimation de la probabilité de défaillance. Dans le cas de simulations par éléments finis, la taille de maille a une influence sur la qualité de la solution mécanique et donc sur l'état défaillant ou non du système. L'objectif de cet article est d'exploiter des bornes sur l'erreur de discrétisation pour garantir l'état des échantillons utilisés dans la construction d'un méta-modèle par krigeage et ainsi améliorer la qualité de l'estimation de la probabilité de défaillance.

## Formulation du problème et erreur de discrétisation

### Problèmes continu et discret

On considère l'équilibre statique d'une structure occupant un domaine  $\Omega$ , soumise à une force volumique  $\underline{f}$ , à un effort  $\underline{g}$  sur  $\partial_g\Omega$  et à un déplacement imposé  $\underline{u}_d$  sur  $\partial_u\Omega$ . On fait l'hypothèse des petites perturbations et considérons que le comportement de la structure est linéaire élastique isotrope caractérisé par le tenseur  $\mathbb{H}$ . Notons  $\underline{u}$  le champ de déplacement,  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$  la partie symétrique du gradient de  $\underline{u}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  le tenseur des contraintes de Cauchy.  $d$  désigne la dimension spatiale.

Introduisons deux espaces affines et une forme :

- l'espace des champs cinématiquement admissibles  $CA = \left\{ \underline{u} \in (\mathbb{H}^1(\Omega))^d, \underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial_u\Omega \right\}$  et notons  $CA^0$  l'espace vectoriel associé.
- l'espace des champs statiquement admissibles (SA)

$$SA = \left\{ \underline{\underline{\tau}} \in (\mathbb{L}^2(\Omega))_{\text{sym}}^{d \times d}; \forall \underline{v} \in CA^0, \int_{\Omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega = \int_{\omega} \underline{f} \cdot \underline{v} d\Omega + \int_{\partial_g\Omega} \underline{g} \cdot \underline{v} dS \right\} \quad (1)$$

- l'erreur en relation de comportement [4] :  $e_{CR\Omega}(\underline{u}, \underline{\underline{\sigma}}) = \|\underline{\underline{\sigma}} - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})\|_{\mathbb{H}^{-1}, \Omega}$  où  $\|\underline{\underline{x}}\|_{\mathbb{H}^{-1}, \Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} (\underline{\underline{x}} : \mathbb{H}^{-1} : \underline{\underline{x}}) d\Omega}$

Le problème mécanique continu consiste alors à trouver la solution exacte  $(\underline{u}_{ex}, \underline{\underline{\sigma}}_{ex}) \in CA(\Omega) \times SA(\Omega)$  tels que  $e_{CR\Omega}(\underline{u}_{ex}, \underline{\underline{\sigma}}_{ex}) = 0$ . La solution existe et est unique. Néanmoins, il n'existe pas de forme explicite de  $\underline{u}_{ex}$  si bien qu'on calcule une approximation de cette solution en la cherchant dans un sous-espace de dimension fini  $CA_H$  : c'est le principe de la méthode des éléments finis. La solution de ce problème, notée  $\underline{u}_H$ , existe et est unique mais ne coïncide généralement pas avec  $\underline{u}_{ex}$ . Le champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}_H$  est obtenu à partir de  $\underline{u}_H$  et de la relation de comportement mais n'est pas statiquement admissible.

## Estimation de l'erreur de discrétisation

Puisque la solution discrète n'est pas la solution exacte, la méthode des éléments finis introduit une erreur appelée erreur de discrétisation et définie par  $e_{discr} = \|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_{ex} - \underline{u}_H)\|_{\mathbb{H}^{-1}, \Omega}$ . Cette erreur peut être estimée a posteriori par différentes méthodes [5]. Dans ce papier, nous utiliserons le théorème de Prager-Synge [6] dont la résultat fondamental est :

$$\forall (\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\sigma}}) \in \text{CA}(\Omega) \times \text{SA}(\Omega), \|\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_{ex}) - \underline{\underline{\varepsilon}}(\hat{\underline{u}})\|_{\mathbb{H}, \Omega}^2 + \|\underline{\underline{\sigma}}_{ex} - \hat{\underline{\sigma}}\|_{\mathbb{H}^{-1}, \Omega}^2 = e_{CR\Omega}^2(\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\sigma}}) \quad (2)$$

Ainsi, en choisissant  $\hat{\underline{u}} = \underline{u}_H \in \text{CA}(\Omega)$  et en construisant un champ de contrainte statiquement admissible  $\hat{\underline{\sigma}}_H$  (voir [7, 8] pour les techniques de reconstruction), on obtient une borne supérieure de l'erreur de discrétisation de la forme  $\|e_{discr}\|_{\Omega} \leq e_{CR\Omega}(\underline{u}_H, \hat{\underline{\sigma}}_H)$ .

Il est également possible d'estimer l'erreur sur une fonctionnelle linéaire  $\tilde{L}$  du champ de déplacement, dite erreur sur une quantité d'intérêt, en utilisant des extracteurs ([9]). Par exemple, il peut s'agir d'une valeur moyenne d'une composante de la contrainte dans une région de la structure. Après avoir défini l'espace  $\tilde{\text{SA}}(\omega) = \left\{ \underline{\underline{\tau}} \in (\mathbb{L}^2(\omega))_{\text{sym}}^{d \times d}; \forall \underline{v} \in \text{CA}^0(\omega), \int_{\omega} \underline{\underline{\tau}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\omega = \tilde{L}(\underline{v}) \right\}$ , on définit alors un second problème dit problème adjoint qui consiste à trouver  $(\tilde{\underline{u}}_{ex}, \tilde{\underline{\sigma}}_{ex}) \in \text{CA}^0(\Omega) \times \tilde{\text{SA}}(\Omega)$  tels que  $e_{CR\Omega}(\tilde{\underline{u}}_{ex}, \tilde{\underline{\sigma}}_{ex}) = 0$  dont la solution existe et est unique. Ce problème est alors résolu par la méthode des éléments finis et, comme pour le problème de référence, l'erreur de discrétisation du problème adjoint  $\tilde{e}_{discr}$  peut être majorée par  $e_{CR\Omega}(\tilde{\underline{u}}_H, \tilde{\underline{\sigma}}_H)$ . On peut alors obtenir un encadrement de l'erreur sur la quantité d'intérêt suivante comme le produit des erreurs de discrétisation des problèmes de référence et adjoint [10].

$$|\tilde{L}(\underline{u}_{ex}) - (\tilde{L}(\underline{u}_H) + I_{HH})| \leq \frac{1}{2} e_{CR\Omega}(\underline{u}_H, \hat{\underline{\sigma}}_H) e_{CR\Omega}(\tilde{\underline{u}}_H, \tilde{\underline{\sigma}}_H) \quad (3)$$

où

$$I_{HH} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\hat{\underline{\sigma}}_{\tilde{H}} + \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tilde{\underline{u}}_{\tilde{H}})) : \mathbb{H}^{-1} : (\hat{\underline{\sigma}}_H - \mathbb{H} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_H)) d\Omega \quad (4)$$

est un terme entièrement calculable.  $(\tilde{L}(\underline{u}_H) + I_{HH})$  est alors une nouvelle approximation de  $\tilde{L}(\underline{u}_{ex})$ . On observe qu'elle est une meilleure approximation de la solution exacte que  $\tilde{L}(\underline{u}_H)$  [11].

Remarquons que les deux problèmes éléments finis peuvent être résolus sur le même maillage ce qui aboutit à la résolution d'un système à second-membre multiple.

## Estimation de la probabilité de défaillance par un méta-modèle multi-fidélité

Pour représenter la variabilité, on modélise certaines grandeurs du problème (chargement, géométrie ou paramètres matériaux) comme des variables aléatoires. Dès lors, la réponse mécanique de la structure (le champ de déplacement ou le champ de contraintes) est aussi aléatoire.

### Probabilité de défaillance

Sans spécifier quelle quantité est aléatoire, regroupons les  $n$  variables aléatoires dans un vecteur  $\{X\}$  de densité conjointe de probabilité  $f_{\{X\}}(\{x\})$ . Définissons la sollicitation  $S$  égale à une forme linéaire

$L$  du champ de déplacement  $\underline{u}$ . La résistance est notée  $R$  et peut être déterministe ou aléatoire. Nous choisissons de définir la fonction d'état-limite par  $G = R - S$ . La probabilité de défaillance est alors

$$P_f = \int_{G(\{X\}) \leq 0} f_{\{X\}}(\{x\}) dx_1 \dots dx_n.$$

## Le krigeage

De nombreuses techniques sont disponibles pour la construction de méta-modèle. Dans ce papier, nous considérons un méta-modèle obtenu par krigeage [2]. Le krigeage consiste à considérer la fonction à reconstruire comme la réalisation d'un champ gaussien stationnaire  $Y$ . Cette fonction est de la forme  $Y(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + Z(\mathbf{x})$  avec  $\mu : \mathbf{x} \rightarrow \mu(\mathbf{x})$  déterministe et  $Z : \mathbf{x} \rightarrow Z(\mathbf{x})$  une fonction aléatoire d'espérance nulle.

L'objectif est de construire une approximation  $G'$  de  $Y$  à partir d'un échantillon contenant  $n_s$  observations  $(G(X_i))_{i=1..n_s}$  calculées en un ensemble de sites  $X_i$ . On souhaite obtenir un estimateur linéaire, non biaisé et à variance minimale vérifiant  $G'(X_i) = G(X_i)$ . Cela amène à l'écriture d'un problème de minimisation sous contraintes. Pour sa résolution, il est nécessaire de postuler *a priori* la forme de la covariance entre les données. Plusieurs techniques existent pour déterminer les paramètres de cette covariance (dits hyperparamètres du krigeage). Une fois ceux-ci calculés, la résolution du problème de minimisation sous contraintes permet d'obtenir une estimation  $G'$  ainsi que l'écart-type du krigeage  $\sigma$  pour un ensemble de  $n_c$  points ( $n_c \gg n_s$ ).

La solution exacte du problème mécanique étant inaccessible, il est impossible de construire une approximation  $G'_{ex}$  par krigeage de  $G_{ex}$  à partir de  $G_{ex}(X_i) = R - L(\underline{u}_{ex})$ . Notons que seule une approximation  $G'_H$  de  $G_H$  à partir des résolutions éléments finis et du calcul de  $G_H(X_i) = R - L(\underline{u}_H(X_i))$  est envisageable.

## Construction du méta-modèle multi-fidélité

La qualité de l'estimation de la probabilité de défaillance repose principalement sur la qualité de représentation de la surface de réponse au sens probabiliste [1]. En effet, puisque le méta-modèle n'est pas coûteux à évaluer, il est possible d'effectuer un grand nombre de tirages pour réduire la variance de l'estimateur de probabilité. De plus, la surface de réponse doit être précise aux environs de l'état-limite qui sépare le domaine de sûreté du domaine de défaillance. Ainsi, seule la connaissance du signe de  $G_{ex}(X_i)$  est importante. Supposons que la fonction état-limite soit évaluée en un point  $X_i$  sur un maillage grossier. En plus de la valeur  $G_H(X_i)$  les outils d'estimation d'erreur présentés précédemment permettent de calculer des bornes de  $L(\underline{u}_{ex}(X_i))$ . L'idée principale est d'exploiter le résultat (3) pour obtenir l'encadrement  $G_{i,H}^- \leq G_{ex}(X_i) \leq G_{i,H}^+$ . Si les bornes ne permettent pas de garantir le signe de la quantité  $G_{ex}(X_i)$ , les cartes d'erreur permettent de guider le remaillage de la structure pour obtenir une nouvelle approximation et de nouvelles bornes  $G_{i,h}^+$  et  $G_{i,h}^-$  garantissant le signe de  $G_{ex}(X_i)$  (éventuellement, une taille de maillage minimale peut être définie). Pour la construction du méta-modèle multi-fidélité, on propose alors la procédure suivante :

1. Choix d'un maillage grossier et évaluation de  $G_H(X_i)$  pour un nombre  $n_d$  de points.
2. Construction d'un méta-modèle de krigeage  $G'$  à partir des évaluations  $(G_H(X_i))_i$
3. Détermination du point  $X_j$  auquel enrichir le méta-modèle en suivant la fonction d'apprentissage usuelle (voir [3])
4. Evaluation de  $G_H(X_j)$  et des bornes  $G_{j,H}^+$  et  $G_{j,H}^-$  en ce point

5. Si le produit des bornes est négatif, remaillage jusqu'à ce que le signe de  $G_{ex}(X_i)$  soit sûr.
6. Actualisation du méta-modèle de krigeage  $G'$  avec la valeur  $R - (\tilde{L}(\underline{u}_h) + I_{hh})$  (milieu de l'intervalle d'erreur)

Une fois l'apprentissage terminé, la probabilité de défaillance est évaluée classiquement par échantillonnage du méta-modèle multi-fidélité. Si le maillage fin minimal ne permet pas de garantir le signe de l'état-limite, l'enrichissement est arrêté.

## Illustration numérique

On considère une plaque fissurée de largeur  $w$  et de hauteur  $L$  possédant une fissure ouverte de longueur  $a$ , comme illustré sur la figure 1. On suppose son comportement linéaire élastique homogène isotrope caractérisé par le tenseur de Hooke  $\mathbb{H}$  et travaillons dans le cadre des petites perturbations. L'hypothèse des déformations planes est admise. La structure est sollicitée en traction ( $P = 1Pa$ ), ce qui correspond à un mode d'ouverture I pur de la fissure. Plusieurs méthodes existent pour évaluer numériquement le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$ . Dans ce travail, on se base sur des méthodes globales d'intégrales sur des domaines en utilisant des solutions auxiliaires ou duales [12]. Ainsi, on peut montrer que  $K_I = Q(\underline{u})$  où  $Q$  est une fonctionnelle linéaire. Le scénario de ruine est celui associé à la propagation de la fissure via le critère de Griffith si bien que la fonctionnelle d'état-limite  $G$  est définie par  $G = K_{lim} - K_I$ , où  $K_{lim} = 11$  USI désigne la valeur critique supposée déterministe. La longueur de la fissure  $a$  est une variable aléatoire suivant une loi gaussienne de moyenne  $m_a = 3.5$  et de variance  $v_a = 0.01$ . Pour cette structure, l'expression analytique du facteur d'intensité de contraintes  $K_I$  est connue. La probabilité de défaillance exacte peut donc être évaluée. On obtient  $P_{f,ex} = 4.86 \cdot 10^{-3}$ . On applique ensuite l'algorithme AK-MCS sur 4 maillages différents ainsi que sur la solution exacte avec 4 points d'initialisation tirés selon la loi de  $a$ , un critère d'arrêt sur le coefficient de variation de la probabilité de 5%, un critère pour l'apprentissage fixé à 2 et une population initiale à classer de 1000 points. Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous où sont également indiqués les résultats du méta-modèle multifidélité pour lequel on a utilisé un maillage grossier  $H = 0.5$  et un maillage fin limite  $h_{lim} = 0.2$  ou  $h_{lim} = 0.05$ . On observe que l'approche multi-fidélité permet d'obtenir un résultat très proche de la probabilité exacte en un nombre d'appels réduit sur le maillage fin.

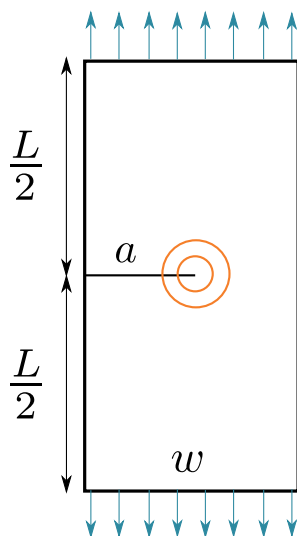


FIGURE 1 – Plaque fissurée : sollicitation en bleu et support du chargement adjoint en orange.

Méthode	Appels au solveur sur maillage $h$					$P_f$	$\frac{ P_f - P_{f,ex} }{P_{f,ex}}$
	0.5	0.2	0.1	0.05	0 ( $G_{ex}$ )		
AK-MCS	6					$4 \cdot 10^{-6}$	1
AK-MCS		7				$3.7 \cdot 10^{-4}$	0.92
AK-MCS			6			$1.3 \cdot 10^{-3}$	0.73
AK-MCS				6		$2.4 \cdot 10^{-3}$	0.50
AK-MCS					6	$4.63 \cdot 10^{-3}$	0.047
multi-fidélité	7	3				$2.6 \cdot 10^{-3}$	0.46
multi-fidélité	6	1		1		$4.5 \cdot 10^{-3}$	0.07

TABLE 1 – Probabilités de défaillance obtenues pour le krigeage classique et le krigeage multi-fidélité

## Références

- [1] F. Schoefs, Sensitivity approach for modelling the environmental loading of marine structures through a matrix response surface, *Reliability Engineering and System Safety*, 93(2008) 1004–1017.
- [2] DG. Krige, A statistical approach to some mine valuation and allied problems on the witwatersrand, *Mémoire de D.E.A., University of the Witwatersrand*, 1951.
- [3] B. Echard, N. Gayton and M. Lemaire, AK-MCS : an active learning reliability method combining Kriging and Monte Carlo simulation, *Structural Safety*, 33 (2011) 145–154.
- [4] P. Ladevèze, Comparaison de modèles de milieux continus, *Thèse de doctorat, Université P. et M. Curie*, 1975.
- [5] Babuška, I. and Rheinboldt, W. C., On the reliability and optimality of the finite element method, *Computers & Structures*, 10 (1979).
- [6] W. Prager and J. L. Synge, Approximations in elasticity based on the concept of functions spaces, *Quarterly of Applied Mathematics*, 5 (1947) 261–269.
- [7] F. Pled, L. Chamoin and L. Ladevèze, On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification : Performances on engineering examples, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 88 (2011) 409-441.
- [8] V. Rey, P. Gosselet and C. Rey Study of the strong prolongation equation for the construction of statically admissible stress fields : Implementation and optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 268 (2014) 82–104.
- [9] R. Backer and R. Rannacher, A feed-back approach to error control in finite element methods : Basic analysis and examples, *Journal of Numerical Mathematics*, 4 (1996) 237–264.
- [10] P. Ladevèze, Strict upper error bounds on computed outputs of interest in computational structural mechanics, *Computational Mechanics*, 42 (2008) 271–286.
- [11] P. Ladevèze, F. Pled, L. Chamoin, New bounding techniques for goal-oriented error estimation applied to linear problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(2013) 1345–1380
- [12] L. Gallimard et J. Panetier, Error estimation of stress intensity factors for mixed-mode cracks, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68 (2006) 299–316.