

Analyse par le calcul à la rupture de la résistance de poutres en béton armé soumises à l'action combinée d'un chargement axial et d'un chargement transversal

**Amal WAHBI^{a,b}, Duc Toan PHAM^a, Ghazi HASSEN^b, Denis GARNIER^b,
Patrick de BUHAN^b, Romain MEGE^a**

a. Université Paris-Est, Centre Scientifique et Technique du Bâtiment (CSTB), 84 avenue Jean Jaurès, Champs-sur-Marne, 77447 Marne-la-Vallée Cedex 2, France
amal.wahbi@cstb.fr, ductoan.pham@cstb.fr, romain.mege@cstb.fr

b. Université Paris-Est, Laboratoire Navier (Ecole des Ponts ParisTech, IFSTTAR, CNRS UMR 8205), 6-8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne-la-Vallée Cedex 2, France
ghazi.hassen@enpc.fr, denis.garnier@enpc.fr, patrick.debuhan@enpc.fr

Résumé :

En s'appuyant sur le raisonnement de l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture, le présent travail propose et développe une méthode originale de dimensionnement des poutres en béton armé soumises à l'action combinée d'un chargement axial et d'un chargement transversal. Elle consiste à considérer un mécanisme de ruine virtuel dans lequel la poutre est "découpée" en deux blocs par un plan à travers lequel apparaît une discontinuité de vitesse. Chaque bloc est animé d'un mouvement virtuel de translation ainsi que de rotation autour de l'appui sur lequel il repose. A titre de comparaison, une simulation numérique du même problème est ensuite réalisée à l'aide d'un logiciel de calcul aux éléments finis.

Abstract: Yield design analysis of reinforced concrete beams subjected to axial and transverse loadings

The upper bound kinematic approach of yield design is developed for analyzing the stability of reinforced concrete beams subjected to the combined transverse and axial loadings. It consists in considering a virtual collapse mechanism in which the beam is divided into two rigid blocks separated by a plane through which a discontinuity of the velocity fields appears. Each block is given a virtual motion of translation as well as of rotation about its support. A numerical simulation of the same problem with the help of a finite element-based limit analysis software is then carried out for comparison purpose.

Mots clefs : Poutres, chargement axial, chargement transversal, calcul à la rupture, béton armé.

1 Introduction

À ce jour, le nombre de paramètres qui interviennent, ainsi que la dispersion des résultats expérimentaux n'ont pas permis l'établissement d'une méthode de calcul fiable pour le dimensionnement des poutres en béton armé soumises à l'action combinée d'un chargement axial et d'un chargement transversal. En effet, l'état des champs de contrainte, la présence et la position des armatures de renforcement longitudinales et transversales, ainsi que les différents modes de chargement sont autant de paramètres qui compliquent l'analyse du problème et l'interprétation des résultats. Au plan international, on trouve de grandes différences entre les méthodes de dimensionnement des codes de construction. La majorité d'entre eux (voir par exemple EN 1992-1-1, 2004 [1]; BAEL 91, 2000 [2]; ACI 318-08, 2008 [3]; CSA 23.3-04, 2004 [4]; ou Model Code of FIB, 2010 [5]) propose une prise en compte des efforts axiaux par des approches empiriques ou semi-empiriques, ne couvrant pas l'ensemble des configurations pouvant être rencontrées.

Dans ce contexte, le présent travail propose et développe une méthode originale de dimensionnement des poutres en béton armé soumises à l'action combinée d'un chargement axial et d'un chargement transversal, à visée applicative pour l'ingénieur. La méthode proposée repose très largement sur la théorie du Calcul à la Rupture (Salençon, 1983 [6], 2013 [7]; de Buhan, 2007 [8]) dont l'objet est la détermination directe des charges de ruine de la structure sans qu'il soit nécessaire de prendre en compte toute l'histoire de chargement. Plus précisément, il s'agit ici de procéder au calcul d'un *majorant* (ou *borne supérieure*) du domaine de résistance dans le plan (*effort axial-effort transversal*) de la poutre, à l'aide de l'approche cinématique par l'extérieur. Ce calcul consiste à considérer un mécanisme de ruine virtuel dans lequel la poutre est "découpée" en deux blocs par un plan à travers lequel apparaît une discontinuité de vitesse. Chaque bloc est animé d'un mouvement virtuel de translation ainsi que de rotation autour de l'appui sur lequel il repose. Les prédictions théoriques obtenues seront ensuite comparées avec les résultats d'une simulation numérique réalisée à l'aide du logiciel de calcul aux éléments finis OptumG2 (Krabbenhoft, 2018 [9]) afin de qualifier la solution proposée.

2 Position du problème de calcul à la rupture

2.1 Géométrie et conditions aux limites du problème

La structure considérée est un tronçon de poutre modélisé comme un solide ayant la forme d'un parallélépipède de longueur L , largeur b et hauteur h comme schématisée sur la figure 1. Cette poutre est constituée d'un béton supposé homogène et est :

- longitudinalement renforcée par deux lits d'armatures de section A_{s1} et A_{s2} repérés respectivement par leurs coordonnées ξ_{s1} et ξ_{s2} , avec $-h/2 \leq \xi_{s1}, \xi_{s2} \leq +h/2$,
- transversalement renforcée par des cadres d'armatures de section A_{st} uniformément espacés d'une distance s selon Ox .

La poutre est disposée en position horizontale sur deux appuis simples (de portée l) laissant libre le déplacement horizontal. Elle est soumise à un chargement défini comme suit (Fig. 1).

- Forces de volume nulles.
- Un chargement transversal P appliqué à une distance a par rapport à l'appui gauche, $a \leq l/2$. Un chargement axial N et un moment de flexion supplémentaire M_0 à chaque extrémité de la poutre. Ce moment supplémentaire, souvent négatif, représente par exemple les moments aux appuis d'une poutre continue sur plusieurs appuis ou le cas où les rotations aux appuis ne sont pas entièrement libres.

- Les bords latéraux de la poutre sont libres d'efforts.

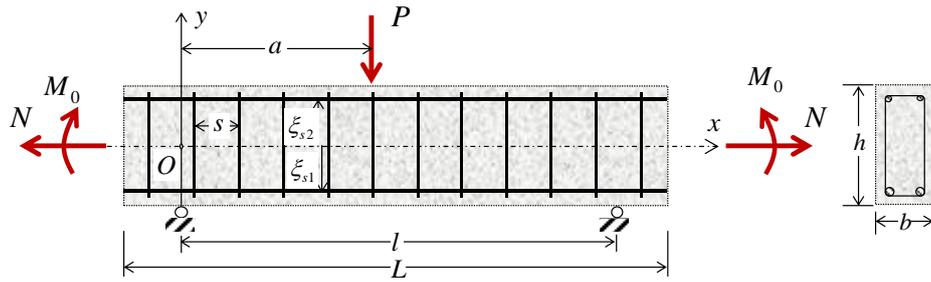


Fig. 1. Tronçon de poutre en béton armé

2.2 Description du mécanisme et calcul de la puissance virtuelle des efforts extérieurs

La démarche suivie consiste à considérer un mécanisme de ruine virtuelle dans lequel la poutre est "découpée" en deux blocs par une ligne de discontinuité de vitesse. Cette ligne est formée à partir du point d'application de la charge transversale P et fait un angle α avec l'axe horizontal de la poutre. Les deux blocs sont animés respectivement des mouvements rigidifiants virtuels de translation horizontale $-\dot{\delta}_1 \underline{e}_x$ et $\dot{\delta}_2 \underline{e}_x$, ainsi que de taux de rotation $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ autour de leurs appuis respectifs (voir Fig. 2).

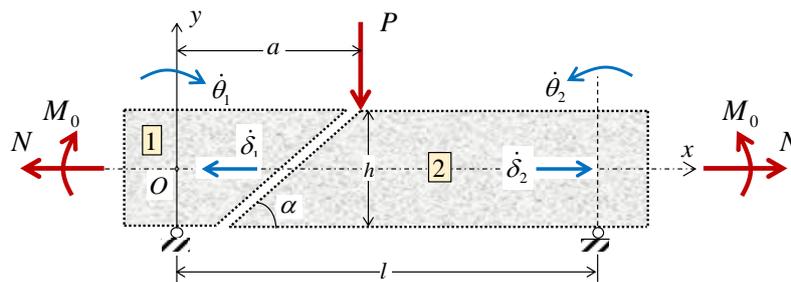


Fig. 2. Mécanisme de ruine de la poutre

Dans ces conditions, la puissance virtuelle des efforts extérieurs développée dans un tel mécanisme :

$$P_{ext} = M_0(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) + P\dot{\theta}_2(l-a) + N \left((\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) - \frac{h(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)}{2} \right) \quad (1)$$

est indépendante de l'angle α du plan (ligne dans le plan de la Fig. 2) de discontinuité.

2.3 Calcul des sauts de vitesse à la traversée de la ligne de discontinuité et de la puissance résistante maximale

Dans le mécanisme ainsi considéré, les vitesses d'un point (x_0, y_0) situé sur la ligne de discontinuité séparant les deux blocs s'écrivent :

$$\begin{aligned} \underline{U}^{(1)}(x_0, y_0) &= \left[-\dot{\delta}_1 + \dot{\theta}_1 \left(y_0 + \frac{h}{2} \right) \right] \underline{e}_x - \dot{\theta}_1 x_0 \underline{e}_y \\ \underline{U}^{(2)}(x_0, y_0) &= \left[\dot{\delta}_2 - \dot{\theta}_2 \left(y_0 + \frac{h}{2} \right) \right] \underline{e}_x + \dot{\theta}_2 (x_0 - l) \underline{e}_y \end{aligned} \quad (2)$$

conduisant à un saut de vitesse à la traversée de cette ligne de discontinuité égal à :

$$[\underline{U}](x_0, y_0) = \underline{U}^{(1)} - \underline{U}^{(2)} = \underbrace{\left[-(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \left(y_0 + \frac{h}{2} \right) \right]}_{U_x(x_0, y_0)} \underline{e}_x + \underbrace{\left[-(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x_0 + \dot{\theta}_2 l \right]}_{U_y(x_0, y_0)} \underline{e}_y \quad (3)$$

avec :

$$y_0 = (x_0 - a) \tan \alpha + \frac{h}{2} \quad (4)$$

Il en résulte que ses projections sur les deux lits d'armatures longitudinales peuvent s'écrire :

$$i = 1, 2 : U_{l,i} = U_x(y_0 = \xi_{si}) = -(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2) + (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \left(\xi_{si} + \frac{h}{2} \right) \quad (5)$$

tandis que sa projection sur la direction transversale au niveau d'un cadre j situé à la coordonnée x_j sur la ligne de discontinuité s'écrit :

$$a - h / \tan \alpha \leq x_j \leq a : U_{t,j} = U_y(x_0 = x_j) = -(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)x_j + \dot{\theta}_2 l \quad (6)$$

Par ailleurs, pour décrire les propriétés de résistance du béton, on adopte un critère de Mohr-Coulomb entièrement tronqué en traction défini par :

$$f^b(\underline{\sigma}) = \sup_{i,j=1,2,3} \left\{ \sigma_i(1 + \sin \varphi) - \sigma_j(1 - \sin \varphi) - f_c(1 - \sin \varphi) ; \sigma_i \right\} \leq 0 \quad (7)$$

où σ_i , $i = 1, 2, 3$, sont les valeurs principales du tenseur de contrainte, tandis que f_c et φ désignent respectivement la résistance à la compression uni-axiale et l'angle de frottement interne. Dans ce cas, la fonction d'appui d'un tel critère peut être calculée en lien avec la détermination de la condition de pertinence associée pour une discontinuité de vitesse donnée (Salençon, 1983 [6]; 2013 [7]) :

$$[\underline{U}] \cdot \underline{n} \geq |[\underline{U}]| \sin \varphi \quad : \quad \pi^b([\underline{U}], \underline{n}) = \frac{f_c}{2} \left(|[\underline{U}]| - [\underline{U}] \cdot \underline{n} \right) \quad (8)$$

où $[\underline{U}]$ désigne la discontinuité de vitesse à la traversée d'une surface de discontinuité en suivant la normale unitaire \underline{n} . En tenant compte de (3), la contribution du béton à la puissance résistante maximale développée dans ce mécanisme peut s'écrire :

$$P_m^b = \int_S \pi^b([\underline{U}], \underline{n}) dS = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{f_c}{2} \left(\sqrt{U_x^2 + U_y^2} + U_x \sin \alpha - U_y \cos \alpha \right) b \frac{dy}{\sin \alpha} \quad (9)$$

avec la condition de pertinence associée :

$$-U_x \sin \alpha + U_y \cos \alpha \geq \sqrt{U_x^2 + U_y^2} \sin \varphi \quad (10)$$

Quant aux renforcements, les barres d'armature longitudinales et transversales sont modélisées comme des éléments continus unidimensionnels (1D) parfaitement adhérents au béton environnant dont les propriétés de résistance sont caractérisées par la condition portant sur la force axiale n :

$$|n| \leq f_y A_s \quad (11)$$

où f_y et A_s sont respectivement la résistance à la traction/compression de l'acier constitutif de l'armature et l'aire de la section de cette dernière. Dans ce cas, les contributions dues aux deux lits de renforcements longitudinaux et aux cadres de renforcements transversaux qui traversent cette ligne de discontinuité peuvent s'écrire :

$$P_m^r = P_{rm}^l + P_{rm}^t = \sum_i f_{y,i} A_{s,l,i} U_{l,i} + \sum_j f_{y,j} A_{s,t,j} U_{t,j} \quad (12)$$

D'où finalement l'expression de la puissance résistante maximale totale :

$$P_m = P_m^b + P_m^r \quad (13)$$

La condition nécessaire de stabilité déduite de l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture :

$$P_{ext} \leq P_{rm} \quad (14)$$

aboutira ensuite, pour une valeur donnée du moment supplémentaire M_0 , à l'obtention d'une approche par l'extérieur du domaine de résistance dans le plan *effort axial-effort transversal* (N, P). On procède alors à une minimisation de cette majoration sous la condition de pertinence du critère de rupture du béton (Eq. 10), les quatre paramètres de minimisation étant respectivement l'angle de la ligne de discontinuité $\alpha \in [\arctan(h/a); \pi/2]$, la somme des vitesses de translation $\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2 \in]-\infty; \infty[$, et les deux taux de rotation $\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2 \in]-\infty; \infty[$.

3 Exemples numériques et comparaison avec une simulation de poutre sans renforcement transversal

A titre illustratif, la poutre considérée est de section rectangulaire largeur×hauteur = 20×30 cm² et de portée 2,2 m, la longueur totale de la poutre étant de 3,92 m. Elle est constituée d'un béton dont la résistance à la compression $f_c = 33,8$ MPa, l'angle de frottement étant pris égal à 37°. Elle est renforcée par deux lits d'armatures longitudinales de 2Ø25 HA de résistance à la traction/compression $f_y = 550$ MPa, avec 3 cm d'enrobage par rapport aux faces inférieure et supérieure. Cette poutre est soumise à l'action combinée d'un chargement transversal ponctuel P à une distance $a = 1$ m par rapport à l'appui gauche, d'un chargement axial N et d'un moment de flexion supplémentaire M_0 à chaque extrémité de la poutre. La figure 3 présente le domaine de résistance dans le plan (N, P) correspondant aux différents moments supplémentaires M_0 respectivement égaux à 0, -60 kN.m et -128,7 kN.m. On observe immédiatement que l'allure du domaine de résistance dans le plan (N, P) en l'absence du moment supplémentaire négatif ($M_0 = 0$) est différente de celles des deux cas où M_0 n'est pas nul. De plus, il existe un plateau horizontal sur lequel la charge transversale ultime reste constante et indépendante tant de la charge axiale N que du moment supplémentaire M_0 .

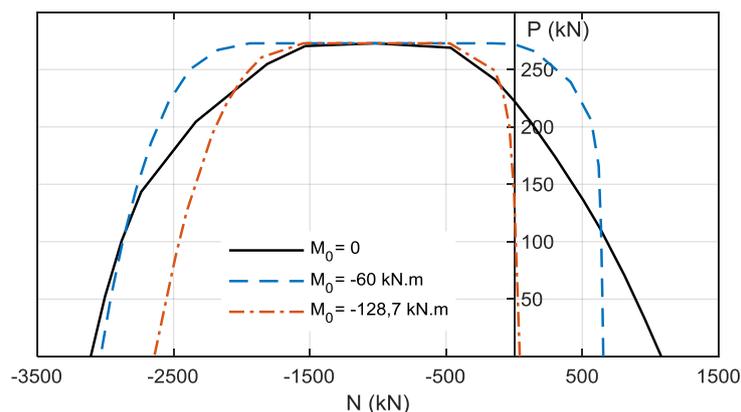


Fig. 3. *Domaine de résistance dans le plan (N, P) pour différents moments supplémentaires M_0*

Afin de qualifier la solution semi-analytique ainsi proposée, les prédictions théoriques sont comparées aux résultats d'une simulation numérique du même problème réalisée à l'aide du logiciel de calcul à la rupture (analyse limite) par éléments finis OptumG2 (Krabbenhoft, 2018 [9]). A ce titre, la comparaison des résultats numériques avec ceux obtenus par notre modèle est montrée sur la figure 4. Il ressort de cette comparaison que les deux résultats sont en très bon accord pour le cas $M_0 = 0$ (Fig. 4 - gauche). La comparaison pour le cas $M_0 = -60$ kN.m (Fig. 4 - droite), bien que moins bonne que celle de la figure 4 - gauche, reste cependant tout à fait correcte.

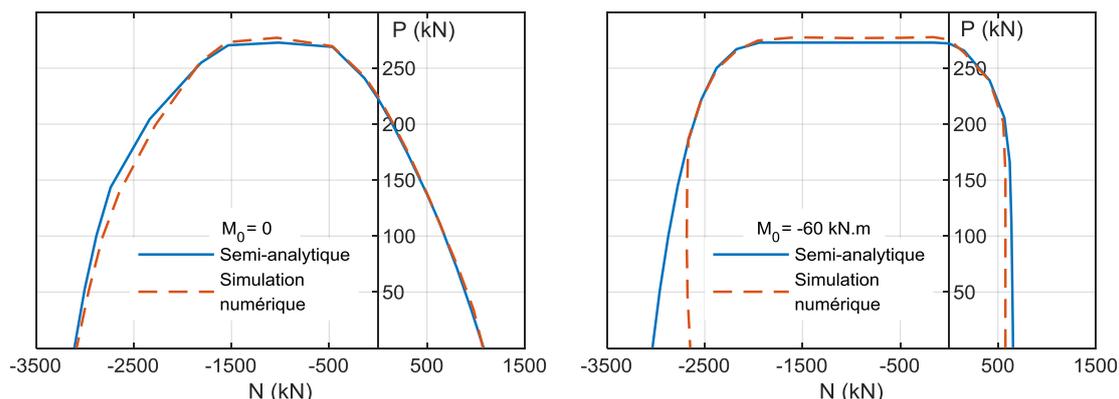


Fig. 4. Comparaison des résultats obtenus par le calcul semi-analytique (présent travail) et par le logiciel OptumG2

4 Conclusion

La présente contribution propose et développe une méthode originale de dimensionnement des poutres en béton armé soumises à l'action combinée d'un chargement axial et d'un chargement transversal, à visée applicative pour l'ingénieur. Un domaine de résistance de la poutre dans le plan (*effort axial-effort transversal*) peut être obtenu par l'approche cinématique par l'extérieur du calcul à la rupture, en utilisant des mécanismes simples mettant en jeu un plan de discontinuité de vitesse séparant la poutre en deux blocs animés de mouvements rigidifiants. Grâce à la simplicité des formulations analytiques impliquées dans l'analyse, le modèle et la méthode de calcul associée sont particulièrement bien adaptés pour un dimensionnement préliminaire des poutres en béton armé soumises à ce type de sollicitations combinées. La comparaison faite entre les prédictions théoriques et celles d'une simulation numérique réalisée à l'aide d'un logiciel aux éléments finis a permis de qualifier la méthode de calcul proposée.

Références

- [1] EN 1992-1-1. Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1-1: General rules and rules for buildings, 2004.
- [2] Règles BAEL 91 révisées 99, Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et constructions en béton armé suivant la méthode des états limites, 2000.
- [3] ACI 318-08 (American Concrete Institute), Building code requirement for structural concrete and commentary, 2008.
- [4] CSA 23.3-04 (Canadian Standards Association), Design of concrete structures, 2004.
- [5] FIB, Model Code 2010, First Complete Draft, 2010.
- [6] J. Salençon, Calcul à la Rupture et analyse limite, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 1983.
- [7] J. Salençon, Yield design, ISTE Ltd and John Wiley and Sons, Inc., Great Britain and the United States, 2013.
- [8] P. de Buhan, Plasticité et Calcul à la Rupture, Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, 2007.
- [9] K. Krabbenhoft, Optum G2 Theory. Optum Computational Engineering, 2018.