

Correction de profil à double pente pour les engrenages droits HCR

J. BRUYERE, P. VELEX

Univ. Lyon, INSA-Lyon, CNRS UMR5259, LaMCoS, F-69621, France ;
jerome.bruyere@insa-lyon.fr, philippe.velex@insa-lyon.fr

Résumé :

Les corrections de profil des engrenages cylindriques sont notamment employées pour minimiser la fluctuation des écarts cinématiques de transmission et améliorer le rendement. Elles peuvent également favoriser le niveau de contrainte au contact et dans la zone d'encastrement de la dent. Ce type de correction permettant de compenser des déplacements élastiques, les caractéristiques optimales sont généralement liées à une charge transmise.

Une approche simplifiée de l'engrènement de roues déformables permet une optimisation analytique de la correction de profil linéaire vis à vis des excitations générées. Dans le cas particulier des dentures droites ayant un rapport de conduite supérieur à 2 (denture HCR), la formulation proposée montre qu'une combinaison de corrections peut permettre la minimisation sur une plage de chargement. Des résultats de simulations quasi-statiques et dynamiques confirment l'intérêt que présentent les corrections à double pente. Des relations simples et générales peuvent être utilisées pour un premier niveau de conception des corrections de profils des dentures HCR ou pour l'initialisation d'une optimisation itérative plus précise.

Mots clefs : engrenages, écarts de transmission, correction de profil, denture HCR, vibrations

Abstract :

The profile modifications in cylindrical gear are used to minimize the kinematic transmissions error fluctuations and improve the efficiency. The stress level in contact and at the root of the tooth can also be improved by profile relieves. It allows to compensate the elastic displacements and the optimal characteristics are usually defined for a specific load.

An original analytical approach of meshing model with profile modifications in HCR spur gear is presented which is used to estimate optimum single and double slope tooth reliefs with regard to transmission error fluctuations. These optimum profile relieves can be combined to improve the gear behaviour over a broad range of loading conditions. Quasi-static and dynamic numerical results confirm the interest of the double slope tooth reliefs. Several original formulae are derived which can be useful for fast estimates at the early design stage or for defining initial conditions for more precise iterative numerical processes.

Key words: HCR gears, transmission error, profile modifications, vibrations

1 Introduction

Malgré la constante évolution des systèmes de motorisation, des éléments d'adaptation de la puissance sont encore généralement nécessaires pour obtenir les caractéristiques du mouvement adaptées à chaque utilisation. Dans ce domaine, les réducteurs à engrenages sont largement employés en raison principalement de leur rendement élevé et d'une maîtrise technologique ancienne qui a contribué à leur large diffusion et à un coût de fabrication relativement modeste. Un des inconvénients de l'engrènement est la génération de vibrations liées aux déformations élastiques des roues dentées et aux écarts géométriques. Ces vibrations sont susceptibles non seulement d'exciter des modes de structures mais également d'engendrer des surcharges dynamiques et du bruit. Dans un contexte général de réduction des niveaux sonores, ce problème devient plus saillant et, pour réduire les excitations, il est possible de jouer sur des paramètres de macro-géométrie et de micro-géométrie.

Après une courte présentation du modèle d'engrènement utilisé, cet article se focalise sur une définition analytique des corrections de profil qui permettent de rendre constants les écarts de transmission, dans le cas particulier des engrenages cylindriques à denture droite et à rapport de conduite supérieur à 2 (denture HCR). Une combinaison de certaines corrections (correction à double pente) permet non seulement un fonctionnement optimal à un couple donné, mais améliore aussi celui-ci sur une plage de chargement. Enfin, sur un cas particulier, ces résultats sont comparés à ceux obtenus avec des modèles numériques plus complets.

2 Optimisation des corrections de forme

2.1 Ecarts de transmission

La modélisation de l'engrènement utilisée ici est une version simplifiée de celles développés par Munro et Yildirim [1-3], Velez et Ajmi [4-5]. En faisant les hypothèses que les dentures sont étroites (rayons des roues supérieurs à leur largeur) et que les écarts d'orientation en fonctionnement sont négligeables, le modèle complet incluant les arbres et les paliers peut se ramener à un modèle à 2 ddl [6]. Le système de référence indéformable est constitué d'un pignon et d'une roue assimilés à des cylindres d'inertie J_1 et J_2 et leurs vitesses de rotations sont respectivement Ω_1 et Ω_2 . En chaque point de contact potentiel M , les écarts de forme par rapport l'hélicoïde développable nominal sont représentés par un écart normal équivalent $e(M)$. Par convention, le signe de $e(M)$ est positif en cas d'excès de matière et négatif en cas d'enlèvement. Pour un fonctionnement sans charge, le contact entre les dentures a lieu au point où $e(M)$ est maximum $\left(E_{\max} = \underset{\text{lignes de contact}}{\text{Max}} [e(M)] \right)$ et le transfert de vitesse suit la relation :

$$(r_{b1}\Omega_1 + r_{b2}\Omega_2) \cos \beta_b = - \frac{dE_{\max}(\tau)}{d\tau} \quad (1)$$

où τ est le temps adimensionné par la période d'engrènement, r_{b1} et r_{b2} sont les rayons de base et β_b est l'angle d'hélice de base.

Les dentures sont élastiques et la raideur linéique d'engrènement k_0 (normale au contact) est supposée constante. θ_1 et θ_2 sont les défections angulaires du pignon et de la roue par rapport au système de référence. L'écart de transmission quasi-statique sous charge [7] est défini par :

$$TE_s(\tau) = r_{b1}\theta_1 + r_{b2}\theta_2 - \frac{E_{\max}}{\cos\beta_b} = x - \frac{E_{\max}}{\cos\beta_b} \quad (2)$$

$TE_s(\tau)$ est un paramètre clé pour l'étude du bruit et des vibrations générés. L'amplitude de ses oscillations est reconnue pour être directement liée au niveau d'excitations produites par l'engrènement.

En chaque point M des lignes de contact potentielles, soit le contact n'a pas lieu car le rapprochement des dentures est inférieur à l'écart initial ($x\cos\beta_b - E_{\max} + e(M) < 0$), soit le module de la force linéique de contact est défini par $F_c(M, \tau) = k_0 [x\cos\beta_b - E_{\max} + e(M)]$

La déflexion statique moyenne δ_{m0} est le rapport de la force normale statique entre les dentures par la raideur moyenne d'engrènement $K_{m0} = k_0 \frac{b\varepsilon_\alpha}{\cos\beta_b}$ en l'absence d'écart normal. Les grandeurs adimensionnées par δ_{m0} portent une étoile (*) et celle adimensionnée par K_{m0} sont surmontées d'un accent circonflexe (^). Une combinaison des équations du mouvement, écrite sous forme adimensionnée, permet d'obtenir [8]:

$$\cos\beta_b TE_s^*(\tau) = \frac{1 - \int_{L(\tau,x)} \hat{k}_0 e^*(M) dM}{\int_{L(\tau,x)} \hat{k}_0 dM} = \frac{1 - \int_{L(\tau,x)} \hat{k}_0 e^*(M) dM}{\hat{k}_0 L(\tau,x)} \quad (3)$$

En raison des écarts normaux, l'ensemble des lignes de contact effectives $L(\tau,x)$ est éventuellement une partie des lignes de contact potentielles. Sa détermination dépend de façon implicite de l'ensemble des écarts normaux à chaque instant et de la charge transmise.

2.2 Corrections optimales pour une denture droite HCR

Considérons maintenant le cas des dentures droites où le seul écart normal à la denture provient des corrections de profil. Ces corrections sont apportées en tête de dent et elles sont supposées identiques sur le pignon et la roue. Elles correspondent à un enlèvement de matière qui, dans la zone modifiée, est proportionnelle à la position sur la ligne d'engrènement (figure 1). La profondeur de correction est notée E^* et sa longueur est paramétrée par Γ , une fraction du segment de conduite.

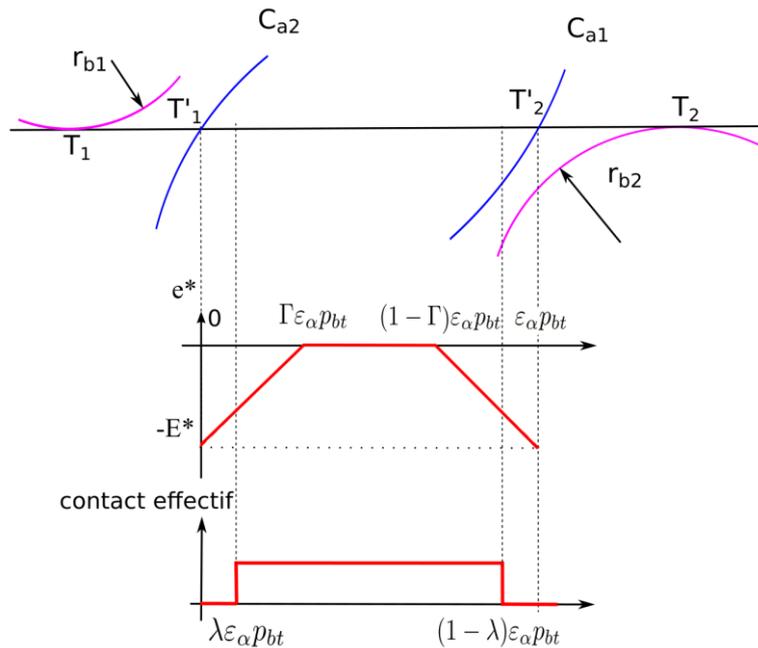


Figure 1 : Correction de profil linéaire et zone de contact effectif

Cette correction peut conduire à un retard à l'engagement effectif et à une fin de contact prématurée dans la zone de retrait. La symétrie du problème permet de prendre un unique paramètre λ qui caractérise l'éventuelle réduction de zone de contact. La détermination de λ s'appuie sur la relation $F_c(\lambda\varepsilon_\alpha, M) = 0$ (voir [9] pour plus de détails).

Suivant cette approche simplifiée, les intégrandes de (3) sont des fonctions périodiques qui peuvent s'exprimer sous forme de séries de Fourier. En passant par des sommes de Riemann, les intégrales se simplifient et il reste finalement :

$$TE_s^*(\tau) = \frac{1 + E^* \frac{(\Gamma - \lambda)^2}{\Gamma} \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \Omega_{ke}(k) \cos[\pi k(2\tau - \varepsilon_\alpha)] \right]}{(1 - 2\lambda) \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \text{Sinc}[k(1 - 2\lambda)\varepsilon_\alpha] \cos[\pi k(2\tau - \varepsilon_\alpha)] \right]} \quad (4)$$

Avec $\Omega_{ke}(k) = \frac{2}{\Gamma - \lambda} \left\{ (2\lambda - 1) \text{Sinc}[k\varepsilon_\alpha(1 - 2\lambda)] + (1 - \Gamma - \lambda) \text{Sinc}[k\varepsilon_\alpha(1 - \Gamma - \lambda)] \text{Sinc}[k\varepsilon_\alpha(\Gamma - \lambda)] \right\}$

et Sinc est le sinus cardinal $\text{Sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$

Sous les hypothèses précédentes, on remarque que l'expression des écarts de transmission dépend d'un nombre réduit de paramètres. Pour un rapport de conduite ε_α supérieur à 2, il existe 3 familles de corrections de profil qui rendent les écarts de transmission constants au cours du temps [6,9]. Elles sont définies dans le tableau 1 et ces résultats peuvent être synthétisés graphiquement par 3 courbes dans le plan (E^*, Γ) figure 2. Ces courbes concordent avec résultats obtenus par simulations numériques sur les modèles plus complets [6,9]. Dans les cas a et c, la correction est dite « longue » et dans le cas b, la correction est dite « courte ».

Conditions	E^*	λ	TE_{s0}^*
$\frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2\varepsilon_\alpha} < \Gamma_a \leq \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{\varepsilon_\alpha}$	$E_a^* = \frac{\Gamma_a \varepsilon_\alpha}{2\Gamma_a - 1 + 1/\varepsilon_\alpha}$	$\lambda_a = 1 - \Gamma_a - \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$	$\frac{\Gamma_a - \lambda_a}{\Gamma_a} E_a^*$
$\frac{\varepsilon_\alpha - 2}{2\varepsilon_\alpha} < \Gamma_b \leq \frac{\varepsilon_\alpha - 2}{\varepsilon_\alpha}$	$E_b^* = \frac{\Gamma_b \varepsilon_\alpha}{2(2\Gamma_b - 1 + 2/\varepsilon_\alpha)}$	$\lambda_b = 1 - \Gamma_b - \frac{2}{\varepsilon_\alpha}$	$\frac{\Gamma_b - \lambda_b}{\Gamma_b} E_b^*$
$\frac{1}{\varepsilon_\alpha} \leq \Gamma_c \leq \frac{\varepsilon_\alpha + 1}{2\varepsilon_\alpha}$	$E_c^* = \frac{\Gamma_c \varepsilon_\alpha}{1 - 2\Gamma_c + 1/\varepsilon_\alpha}$	$\lambda_c = \Gamma_c - \frac{1}{\varepsilon_\alpha}$	$\frac{\Gamma_c - \lambda_c}{\Gamma_c} E_c^*$

Tableau 1 : Paramètres de correction de profil conduisant à des écarts de transmission constant

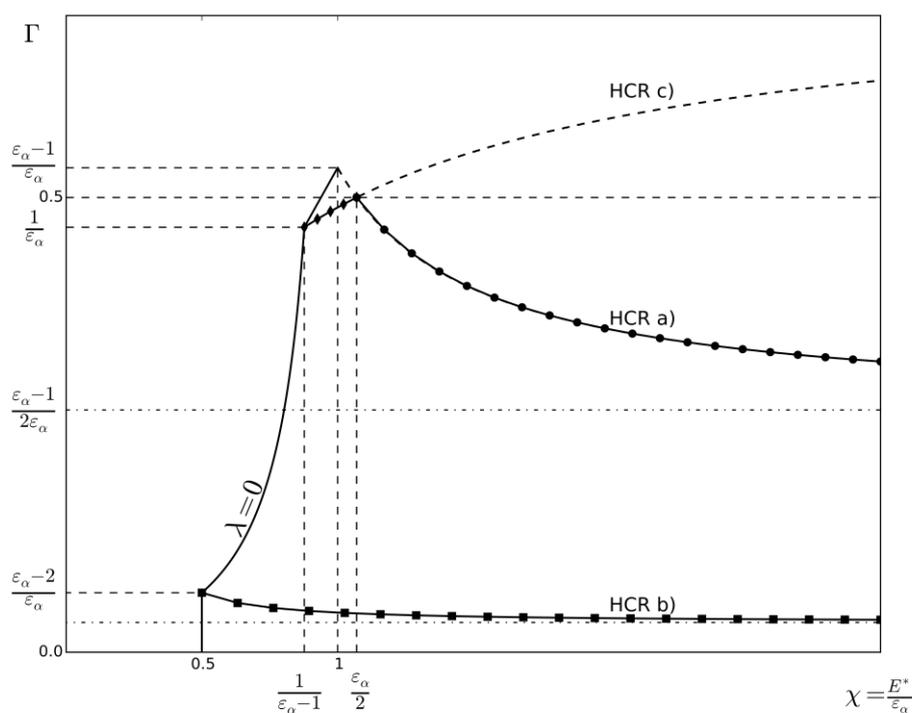


Figure 2 : Les 3 familles de correction de profil optimales

Comme l'illustre la figure 3, les résultats basés sur les relations analytiques précédentes sont assez proches des résultats expérimentaux de Yildirim et Munro [2] obtenus avec l'engrenage dont les paramètres sont définis dans le tableau 2 et pour une correction courte.

	pignon	roue
Nombre de dents	54	54
Module (mm)		3.738
ε_α		2.16
Couple nominal (N/mm)		530
Raideur des dentures par unité de longueur (N/mm/μm)		12

Tableau 2 : Paramètres de l'engrenage

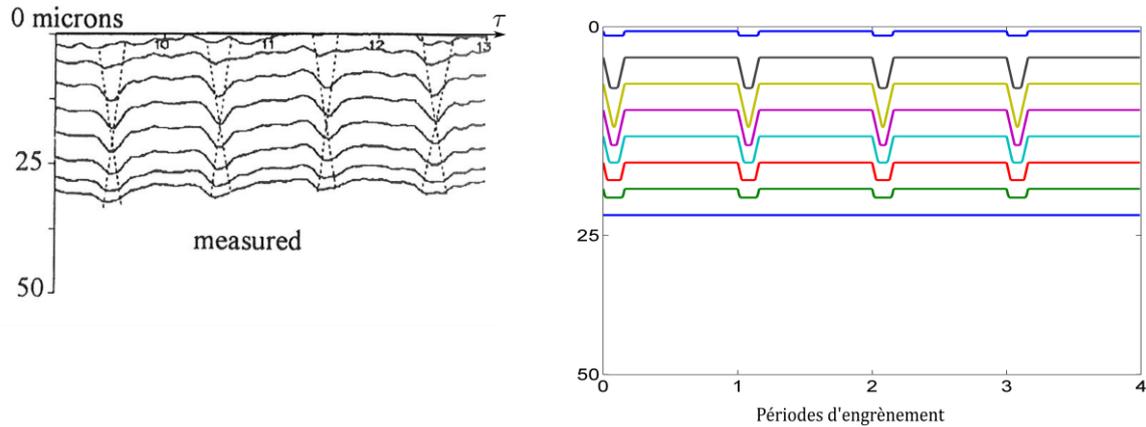


Figure 3 : Ecart de transmission mesurés [2] et prédits à différentes charges pour une correction courte

3 Correction à 2 pentes

3.1 Définition

D'après les résultats précédents, trois ensemble de correction de profil rendent les écarts de transmission constant pour une denture HCR :

$$TE_{S0}^{*(i)} = \left(1 - \int_{L(\tau,x)} \hat{k}_0 e_{OPT}^{*(i)}(M) dM \right) / L^{(i)}(\tau, x) \quad (5)$$

Où l'exposant $i \in \{a, b, c\}$ fait référence aux familles de solution du tableau 1. Une combinaison linéaire de ses équations s'écrit :

$$\sum_i \alpha_i TE_{S0}^{*(i)} = \sum_i \alpha_i \left[\left(1 - \int_{L(\tau,x)} \hat{k}_0 e_{OPT}^{*(i)}(M) dM \right) / L^{(i)}(\tau, x) \right] \quad (6)$$

En supposant que la longueur de contact soit la même pour chaque équation (indépendante de i) et avec $\sum_i \alpha_i = 1$, l'équation (6) devient :

$$TE_{S\Sigma}^* = \left(1 - \int_{L(\tau,x)} \hat{k}_0 \sum_i \alpha_i e_{OPT}^{*(i)}(M) dM \right) / L(\tau, x) \quad (7)$$

Ce qui montre qu'une combinaison de corrections optimales adimensionnées peut encore conduire à l'annulation des fluctuations de TEs^* .

La condition sur la longueur de contact implique que le paramètre λ soit identique pour toutes les modifications. La longueur de contact nominale (ie maximale, $\lambda=0$) est utilisée pour définir la charge nominale de conception des corrections, ce qui conduit (tableau 1) aux longueurs de correction $\Gamma_a = 1 - 1/\varepsilon_\alpha$, $\Gamma_b = 1 - 2/\varepsilon_\alpha$ et $\Gamma_c = 1/\varepsilon_\alpha$. Pour une denture HCR, la valeur de Γ_a est supérieure à 0,5, ce qui n'est pas acceptable compte tenu de la symétrie de la correction. La combinaison des deux corrections acceptables est illustrée figure 4.

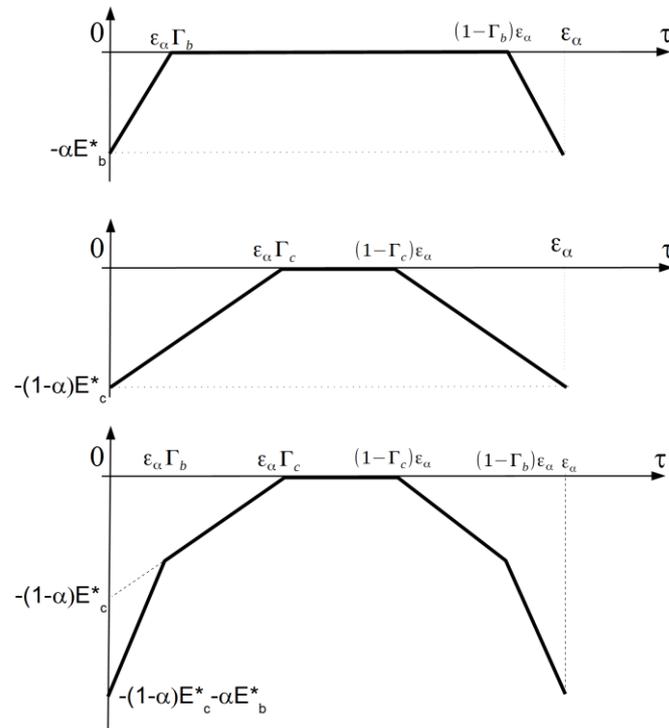


Figure 4 : Correction de profil courte, longue et à double pente

Pour une correction à double pente, la profondeur maximale de correction adimensionnée est donnée par

$$\alpha E_b^* + (1-\alpha)E_c^* = \alpha \frac{\varepsilon_\alpha}{2} + (1-\alpha) \frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha - 1} \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad (8)$$

En notant C_{m0} le couple nominal appliqué au pignon, les profondeurs des corrections courte et longue sont données par :

$$E_b = \frac{C_{m0}}{2k_0 b r_{b1}} \quad \text{et} \quad E_c = \frac{C_{m0}}{(\varepsilon_\alpha - 1)k_0 b r_{b1}} \quad (9)$$

Les profondeurs de correction réelles étant définies, les variations du couple de fonctionnement modifient la déflexion statique et donc la valeur de E^* . Sur la figure 2, une diminution du couple produit une augmentation de E^* et à un déplacement du point caractéristique vers la droite. Ainsi, pour une correction longue, deux minimum des fluctuations de TEs^* peuvent être obtenus (figure 5) :

- Au couple nominal C_{m0} , avec une combinaison pondérée de E_b et E_c et $\lambda = 0$;
- A un couple optimum secondaire C_{ms0} , plus faible, pour lequel la réduction de longueur de contact a effacé l'influence de la correction courte et le point caractéristique se trouve sur la courbe optimale « a » :

$$\lambda_a = \Gamma_b = 1 - \frac{2}{\varepsilon_\alpha} \quad (10)$$

Ce qui conduit à l'amplitude suivante:

$$(1-\alpha)E_c^* = (1-\alpha)E_c k_{m0} \frac{r_{b1}}{C_{ms0}} = \frac{\varepsilon_\alpha}{3-\varepsilon_\alpha} \quad (11)$$

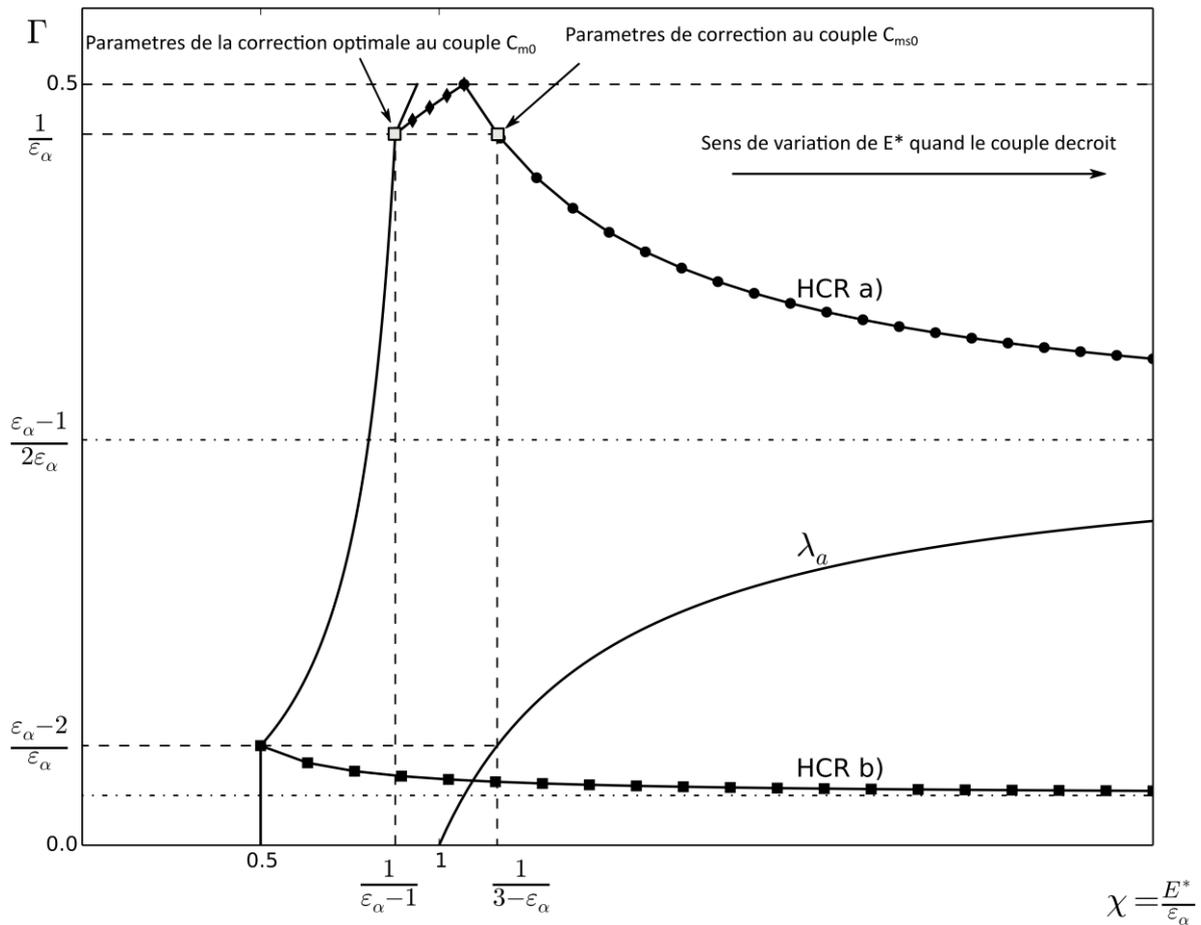


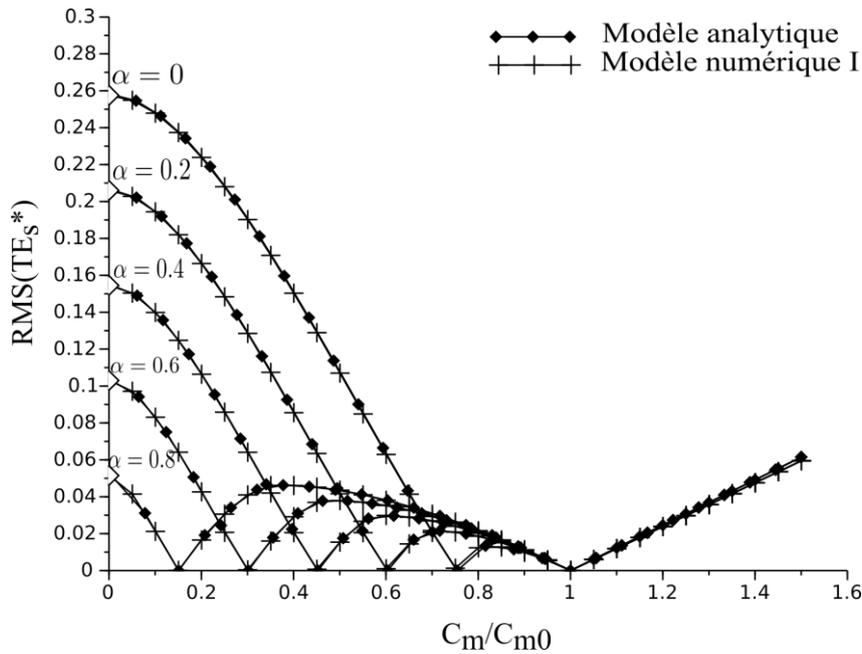
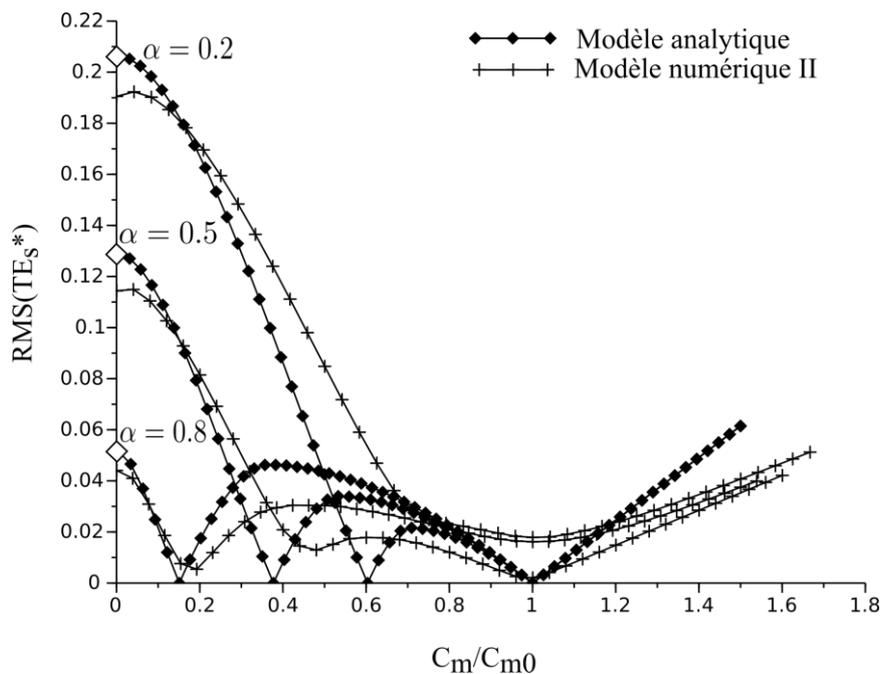
Figure 5 : Configuration pour le couple optimum secondaire

En combinant (10) and (11), la valeur du second couple optimum peut être obtenue en fonction du couple nominal:

$$C_{ms0} / C_{m0} = (1 - \alpha) \frac{3 - \varepsilon_\alpha}{\varepsilon_\alpha - 1} \quad (12)$$

3.3 Analyse des résultats

Les résultats suivant (figures 6 et 7) montrent des comparaisons du RMS de $TEs^*(\tau)$ obtenus par i) la formulation en série de Fourier (4), ii) un modèle numérique I à 2 ddl avec une raideur linéique constante et iii) un modèle numérique II à 72 ddl où les arbres et les paliers sont pris en compte et où la raideur d'engrènement évolue en fonction de la charge et de la position du point de contact [4,5,10,11]. Des corrections de profil double pente sont appliquées avec différentes valeurs de α . Dans les modèles numériques, les lignes de contact sont discrétisées en cellules. L'intégration temporelle est réalisée par un schéma de Newmark et, à chaque pas de temps, un algorithme détermine les cellules en contact. L'écart de transmission est adimensionné par la déflexion statique correspondant au couple nominal C_{m0} .

Figure 6 : Evolution du RMS de TE_s^* en fonction de la charge et du paramètre α Figure 7 : Evolution du RMS de TE_s^* en fonction de la charge et du paramètre α , avec le modèle numérique II

Pour une raideur linéique d'engrènement constante (figure 6), la concordance entre les résultats numériques et analytiques est excellente. L'existence des deux couples optimaux est confirmée et leur valeur relative est correctement estimée par (12). En prenant un modèle plus réaliste concernant la raideur d'engrènement ainsi que le comportement élastique des arbres et paliers (figure 7), les écarts avec les résultats analytiques sont plus importants mais les allures restent les mêmes et la concordance reste globalement acceptable. Les deux couples optimum se distinguent pour $\alpha \geq 0,5$.

4 Conclusion

Une approche analytique originale de la définition des corrections de profil des engrenages à dentures droites HCR est présentée. Elle permet de déterminer les paramètres optimum vis-à-vis des fluctuations des écarts de transmission, pour une correction simple ou double pente. Cette dernière est obtenue par superposition d'une correction courte et d'une correction longue et son intérêt réside dans la combinaison des avantages de ces deux types de correction. Plusieurs relations analytiques simples permettent une définition aisée des paramètres de correction optimum à un couple fixé ou sur une plage de fonctionnement. Ces résultats sont obtenus avec des hypothèses de modélisation assez fortes et ils ne sont donc que des approximations. Cependant, ils peuvent être utiles en conception préliminaire ou comme valeurs initiales d'un processus itératif d'optimisation des corrections de forme avec un modèle plus détaillé.

Références

- [1] Munro, R. G., Yildirim, N., and Hall, D. M., 1990, Optimum Profile Relief and Transmission Error in Spur Gears, Proceedings of the First International Conference on Gearbox Noise and Vibration, Cambridge, pp. 35–41.
- [2] Yildirim, N., and Munro, R. G., 1999, A Systematic Approach to Profile Relief Design of Low and High Contact Ratio Spur Gears, Proc. Inst. Mech. Eng., Part C: J. Mech. Eng. Sci., 213(6), pp. 551–562.
- [3] Yildirim, N., and Munro, R. G., 1999, A New Type of Profile Relief for High Contact Ratio Spur Gears, Proc. Inst. Mech. Eng., Part C: J. Mech. Eng. Sci., 213(6), pp. 563–568.
- [4] Velex, P., and Maatar, M., 1996, A Mathematical Model for Analyzing the Influence of Shape Deviations and Mounting Errors on Gear Dynamics, J. Sound Vib., 191(5), pp. 629–660.
- [5] Maatar, M., and Velex, P., 1997, Quasi-Static and Dynamic Analysis of Narrow-Faced Helical Gears With Profile and Lead Modifications, ASME J. Mech. Des., 119(4), pp. 474–480.
- [6] P. Velex, J. Bruyère, D.R. Houser, Some analytical results on transmission errors in narrow-faced spur and helical gears—influence of profile modifications, J. Mech. Des. 133 (3) (2011), <http://dx.doi.org/10.1115/1.4003578> (11 pp.).
- [7] Velex, P., and Ajmi, M., 2006, On the Modelling of Excitations in Geared Systems by Transmission Errors, J. Sound Vib., 290(3–5), pp. 882–909.
- [8] J. Bruyère, P. Velex, Derivation of optimum profile modifications in narrow-faced spur and helical gears using a perturbation method, J. Mech. Des. 135 (7) (2013), <http://dx.doi.org/10.1115/1.4024374> (8 pp.).
- [9] P. Velex, J. Bruyère and X. Gu; An alternative approach to the definition of profile modification in High-contact-ratio spur gears ; Journal of mechanical Design, MARCH 2015, Vol. 137, DOI: 0.1115/1.4029321
- [10] X. Gu, P. Velex, P. Sainsot, J. Bruyère, Analytical Investigations on the Mesh Stiffness Function of Solid Spur and Helical Gears, Journal of mechanical Design J. Mech. Des. 2015 ; 137(6):063301-063301-7. MD-14-1762 ; doi: 10.1115/1.4030272
- [11] P. Velex, M. Ajmi, On the modelling of excitations in geared systems by transmission errors, Journal of Sound and Vibration 290 (2006) 882–909, doi:10.1016/j.jsv.2005.04.033