

Une double procédure incrémentale variationnelle pour les matériaux composites élasto-(visco)-plastiques avec écrouissage cinématique linéaire et/ou isotrope

A. Lucchetta^a, F. Auslender^b, M. Bornert^c, D. Kondo^a

a. Université Pierre et Marie Curie, Institut Jean Le Rond ∂ 'Alembert
antoine.lucchetta@upmc.fr, djimedo.kondo@upmc.fr

b. Université Clermont Auvergne, Institut Pascal, francois.auslender@uca.fr

c. Université Paris-Est, Laboratoire Navier, michel.bornert@enpc.fr

Résumé :

Nous étudions le comportement non linéaire de composites élasto-(visco)-plastiques avec ou sans écrouissage cinématique linéaire et isotrope en nous appuyant sur les principes incrémentaux variationnels introduits par Lahellec et Suquet [5]. Nous profitons également d'une formulation alternative, récemment proposée par Agoras et al. [1] pour les composites visco-plastiques sans écrouissage, qui consiste en une double application de la procédure variationnelle de Ponte-Castañeda [8]. Dans cet article nous développons cette approche dans le cas de composites dont les phases sont élasto-(visco)-plastiques, avec une combinaison d'écrouissage cinématique linéaire et/ou isotrope. La première application de la procédure variationnelle permet de linéariser le comportement local avec écrouissage, y compris l'écrouissage, et conduit à un Milieu Linéaire de Comparaison (MLC) thermoélastique avec un champ de polarisation hétérogène intraphase. La seconde traite de l'hétérogénéité de la polarisation et donne lieu à un nouveau MLC thermoélastique à champ de polarisation homogène par phase, dont le comportement effectif peut ensuite être estimé par les schémas d'homogénéisation linéaires classiques. Nous développons et mettons en œuvre cette nouvelle procédure incrémentale variationnelle pour les composites constitués de particules sphériques élastiques linéaires réparties de manière aléatoire et isotrope dans une matrice élasto-(visco)-plastique. Les prédictions du modèle sont comparées aux résultats disponibles dans la littérature pour les chargements cycliques proportionnels. De nouveaux résultats pour les composites élasto-plastiques avec de l'écrouissage isotrope et cinématique combiné sont également fournis. Ils sont en bon accord avec les calculs éléments finis que nous avons effectués, aux échelles locale et macroscopique.

Abstract :

We investigate the nonlinear behavior of elasto-(visco)-plastic composites with or without isotropic and linear kinematic hardening. We first rely on the incremental variational principles introduced by Lahellec and Suquet [5]. We also take advantage of an alternative formulation, recently proposed by Agoras et al [1] for visco-plastic composites without hardening, which consists in a double application of the variational procedure of Ponte-Castañeda. In this paper we extend this approach to elasto-(visco)-plastic

composites with or without combined linear kinematic and isotropic work-hardening. The first application of the variational procedure linearizes the local behavior, including hardening, and leads to a thermo-elastic Linear Comparison Composite (LCC) with a heterogeneous polarization field inside the phases. The second one deals with the heterogeneity of the polarization and results in a new thermo-elastic LCC with a per-phase homogeneous polarization field, which effective behavior can then be estimated by classical linear homogenization schemes. We develop and implement this new incremental variational procedure for composites comprised of linear elastic spherical particles randomly and isotropically distributed in an elasto-(visco)-plastic matrix. The predictions of the model are compared with results available in the literature for cyclic proportional loadings. New results for elasto-plastic composites with combined isotropic and kinematic hardening are also provided. They are in good agreement with the finite element computations we carried out, at both local and macroscopic scales.

Mots clefs : Composites élasto-(visco)-plastiques ; écrouissage cinématique linéaire ; écrouissage isotrope ; homogénéisation non linéaire ; procédures variationnelles

1 Introduction

Les 25 dernières années ont révélé un intérêt croissant pour la prédiction de la réponse effective des composites non linéaires. La plupart des travaux réalisés sur ce sujet ont été effectués dans le cas où un seul potentiel régit le comportement non linéaire : l'énergie libre dans le cas de matériaux élastiques et le potentiel de dissipation dans le cas de matériaux visco-plastiques. Ces théories sont basées sur des principes variationnels associés à des schémas de linéarisation et d'homogénéisation linéaire. Au début, seul les moments d'ordre un par phase étaient utilisés dans les schémas de linéarisation. Grâce à des arguments variationnels, différents auteurs ont souligné l'importance de travailler avec les moments d'ordre deux par phase afin d'améliorer la prédiction des modèles (Ponte Castañeda [8]). De plus, Ponte Castañeda [10] a montré que le fait de considérer les moments d'ordre un et deux de chaque phase permet d'obtenir de meilleurs résultats qu'en ne considérant qu'un seul d'entre eux.

Une nouvelle étape a été franchie par Lahellec et Suquet [5] qui ont introduit de nouveaux principes variationnels incrémentaux aux échelles locale et globale. Leur principe variationnel local repose sur l'introduction d'un potentiel unique, le potentiel incrémental condensé qui tient compte à la fois de l'énergie stockée et de l'énergie dissipée. Ce dernier est construit comme la somme de l'énergie libre et du potentiel de dissipation qui décrivent le comportement local des matériaux standards généralisés (MSG) (Halphen et Nguyen [2]). À partir du potentiel incrémental condensé, Lahellec et Suquet ont déterminé un principe variationnel incrémental effectif décrivant le comportement de matériaux hétérogènes à comportement héréditaire, grâce auquel il devient possible d'étendre la plupart des idées développées dans le cadre variationnel de l'homogénéisation non linéaire pour des composites dont le comportement est décrit par un seul potentiel. Lahellec et Suquet [5] ont appliqué cette méthode pour étendre la procédure variationnelle introduite par Ponte Castañeda [8] aux composites non linéaires comprenant des phases élasto-visco-plastiques sans écrouissage.

En 2013, Lahellec et Suquet [6] ont proposé un nouveau principe variationnel incrémental pour obtenir de nouvelles estimations du comportement local et global des composites comprenant des phases élasto-visco-plastiques avec de l'écrouissage cinématique linéaire et isotrope. Cette nouvelle procédure repose

sur deux étapes qui sont réalisées simultanément. Tout d'abord, en utilisant la procédure variationnelle, ils obtiennent une approximation sécante du comportement (en le linéarisant) conduisant à un MLC thermoélastique à polarisation hétérogène. Simultanément, ils introduisent au sein du potentiel incrémental linéarisé des variables internes effectives permettant d'obtenir un MLC à polarisation homogène par phase.

Plus récemment, Agoras et al. [1] ont proposé une formulation alternative de la procédure variationnelle incrémentale de Lahellec et Suquet [6] pour aborder le comportement global et local des composites élasto-visco-plastiques. Cette procédure est composée de deux étapes. La première consiste à utiliser la procédure variationnel de Ponte Castañeda [8] pour linéariser le comportement afin d'obtenir un MLC avec des propriétés par phase non uniformes. La seconde, qui est inspirée de Lahellec et al. [4], permet d'approcher le MLC hétérogène par phase par un MLC homogène avec des propriétés uniformes par phase, que l'on peut ensuite homogénéiser grâce aux méthodes classiques de l'homogénéisation linéaire. L'approche présentée dans cette étude est basée sur l'idée clé présentée par Agoras et al. [1] pour gérer séquentiellement la linéarisation du comportement local puis la prise en compte de l'hétérogénéité du MLC. Nous proposons d'étendre cette idée, initialement appliquée aux composites élasto-visco-plastiques sans écrouissage, aux composites élasto-plastiques avec de l'écrouissage cinématique linéaire et isotrope puis aux composites élasto-visco-plastiques sans écrouissage. Nous avons d'abord décrit le comportement local et utilisé les principes variationnels initiaux aux échelles locale et globale présentés par Lahellec et Suquet [5]. Nous avons ensuite appliqué deux fois la procédure variationnelle de Ponte Castañeda, conformément aux travaux d'Agoras et al. [1]. La première application de la procédure variationnelle, destinée à linéariser le comportement, nous a conduit à un MLC à polarisation hétérogène par phase. La seconde application à permis d'approcher ce MLC par un MLC à polarisation homogène par phase. Nous avons ensuite comparé notre modèle au modèle RVP de Lahellec et Suquet [6] ainsi qu'à des calculs FFT effectués par ces derniers, dans le cas, d'une part, d'une matrice parfaitement plastique, avec de l'écrouissage cinématique linéaire et/ou isotrope, et d'autre part, pour une matrice élasto-visco-plastique sans écrouissage pour une extension isochore.

2 Matériaux composites élasto-plastique avec écrouissage

2.1 Comportement local et principes variationnels incrémentaux

On considère un Volume Élémentaire Représentatif (VER) Ω d'un matériau composite de N -phases avec $\Omega^{(r)}$ le volume de la phase r ($r = 1, \dots, N$). On suppose que les phases sont des MSG ayant un comportement local élasto-plastique associée à la théorie J_2 de la plasticité avec de l'écrouissage cinématique linéaire et de l'écrouissage isotrope non linéaire. Ceci correspond à un matériau décrit par deux potentiels convexes associés aux variables internes $\alpha = (\varepsilon^p, p)$ décrivant les phénomènes irréversibles, où ε^p représente le champ des déformations plastiques et p la déformation plastique cumulée. Le premier potentiel convexe est l'énergie libre $w^r(\varepsilon, \varepsilon^p, p)$ dans laquelle ε représente le champ des déformations locales

$$w^{(r)}(\varepsilon, \varepsilon^p, p) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^p) : \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^p) + \frac{1}{2} \varepsilon^p : \mathbb{H}^{(r)} : \varepsilon^p + \hat{w}^{(r)}(p), \quad (1)$$

où $\mathbb{L}^{(r)}$ représente le tenseur d'élasticité, $\mathbb{H}^{(r)}$ le tenseur d'ordre 4 caractérisant l'écrouissage cinématique linéaire, $\hat{w}^r(p)$ une fonction scalaire, dépendant de p , qui correspond à l'énergie stockée due à l'écrouissage isotrope et $R^{(r)}(p)$ qui dans ce cas s'exprime comme $R^{(r)}(p) = \frac{d\hat{w}^{(r)}}{dp}(p)$, est une fonction

scalaire caractérisant l'érouissage isotrope.

Le second potentiel est le potentiel de dissipation $\varphi^{(r)}(\dot{\alpha})$, dont l'expression a été déterminée par [3]

$$\varphi^{(r)}(\dot{\epsilon}^p, \dot{p}) = \phi^{(r)}(\dot{\epsilon}_{eq}^p) + \Phi_C(\dot{\epsilon}^p, \dot{p}), \quad (2)$$

avec

$$\phi^{(r)}(\dot{\epsilon}_{eq}^p) = \sigma_y^{(r)} \dot{\epsilon}_{eq}^p \quad \text{et} \quad \Phi_C(\dot{\epsilon}^p, \dot{p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\dot{\epsilon}^p, \dot{p}) \in \mathcal{C} \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3)$$

où Φ_C représente la fonction indicatrice de l'ensemble convexe \mathcal{C} définie par

$$\mathcal{C} = \{(\dot{\epsilon}^p, \dot{p}) / g(\dot{\epsilon}^p, \dot{p}) = \dot{\epsilon}_{eq}^p - \dot{p} \leq 0\}. \quad (4)$$

Suivant Lahellec et Suquet [5], une approximation des équations constitutives des MSG peut être obtenue à l'aide des équations suivantes en utilisant un schéma d'Euler implicite

$$\sigma_{n+1} = \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \epsilon_{n+1}}(\epsilon_{n+1}, \alpha_{n+1}) \quad \frac{\partial w^{(r)}}{\partial \alpha_{n+1}}(\epsilon_{n+1}, \alpha_{n+1}) + \frac{\partial \varphi^{(r)}}{\partial \dot{\alpha}_{n+1}}\left(\frac{\alpha_{n+1} - \alpha_n}{\Delta t}\right) = 0. \quad (5)$$

L'intervalle de temps de l'étude $[0, T]$ a été discrétisé en N pas de temps et on définit $\Delta t = t_{n+1} - t_n$. Par ailleurs, la notation f_n représente la valeur $f(t_n)$ de la fonction f au temps t_n . Afin de simplifier les notations, on omettra l'indice $n + 1$ pour les variables calculées au temps t_{n+1} (i.e. $\epsilon = \epsilon_{n+1}$).

Similairement à Lahellec et Suquet [5] on introduit le potentiel incrémental condensé J qui est défini comme la somme de l'énergie libre $w^{(r)}$ et du potentiel de dissipation $\varphi^{(r)}$ multiplié par Δt , i.e., $J^{(r)} = w^{(r)} + \Delta t \varphi^{(r)}$. Ce potentiel est non-homogène par phase du fait de la présence du champ $\epsilon_n^p(x)$. De plus, on introduit l'énergie libre condensée w_Δ et l'énergie libre condensée effective \tilde{w}_Δ définies par

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) = \inf_{\epsilon / \langle \epsilon \rangle = \mathbf{E}} \langle w_\Delta(\epsilon) \rangle = \inf_{\epsilon / \langle \epsilon \rangle = \mathbf{E}} \left\langle \inf_{\alpha = (\epsilon^p, p)} J(x, \epsilon, \epsilon^p, p) \right\rangle. \quad (6)$$

Lahellec et Suquet [5] ont montré, grâce à la relation $\sigma = \partial w_\Delta / \partial \epsilon$ et au lemme de Hill, que la contrainte macroscopique $\Sigma = \langle \sigma \rangle$ est donnée par

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{w}_\Delta}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}). \quad (7)$$

2.2 Application de la double procédure variationnelle

La procédure incrémentale variationnelle, proposée par Lahellec and Suquet [5], conduit à la définition d'un MLC avec une polarisation homogène par phase, caractérisé par une énergie libre w_0 . La procédure variationnelle est appliquée une seule fois pour traiter à la fois la non linéarité des phases et l'hétérogénéité intraphase du MLC. Dans cette méthode, après l'introduction du potentiel incrémental linéarisé J_0 , la linéarisation et l'uniformisation du comportement sont réalisées en une seule et même étape. Agoras et al. [1] ont introduit une méthode plus systématique dans laquelle la linéarisation et l'uniformisation sont étudiées en deux étapes distinctes. La première étape fait appel à la procédure variationnelle de Ponte Castañeda [8] pour obtenir un MLC avec une polarisation hétérogène dans les phases. La seconde étape repose aussi sur la procédure variationnelle et utilise la méthode proposée par Lahellec et al. [4] afin d'obtenir un MLC avec des propriétés homogènes intraphase.

Dans cet article, on adopte l'idée principale proposée par Agoras et al. [1] (qui consiste à traiter séparément

la linéarisation et l'uniformisation du comportement local). Initialement appliquée à des phases parfaitement plastiques, on l'étend ici au cas de matériaux composites composés de phases élasto-plastiques avec de l'écroutissage. On considère à la fois de l'écroutissage cinématique linéaire et de l'écroutissage isotrope. Afin de distinguer notre approche des précédents travaux de la littérature traitant du même problème, nous soulignons le fait que notre formulation s'appuie sur le principe variationnel incrémental initialement introduit par Lahellec et Suquet [5] dans une formulation totale et non dans une formulation en taux comme Agoras et al. [1]. De plus, notre approche repose sur une formulation primale (basée sur $w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon})$ et sur $\varphi^{(r)}(\dot{\boldsymbol{\alpha}})$) alors que Agoras et al. [1] ont fondé leur approche sur une formulation duale.

Du fait du caractère non quadratique du potentiel de dissipation $\varphi^{(r)}$, le potentiel incrémental J est difficile à homogénéiser. Pour surmonter cette difficulté, un potentiel incrémental linéarisé $J_L^{(r)}$ est introduit afin d'approcher le potentiel de dissipation $\varphi^{(r)}$ par une fonction quadratique de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ dépendant de la viscosité $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ qui est uniforme dans la phase r .

$$J_L^{(r)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \eta_{\varepsilon^p}^{(r)}) = w^{(r)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p) - \hat{w}^{(r)}(p) + \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p). \quad (8)$$

L'idée principale de la procédure variationnelle consiste alors à décomposer le potentiel J à partir du potentiel incrémental linéarisé J_L sous la forme $J = J_L + J - J_L$. On notera que le premier terme J_L peut être homogénéisé à l'aide de schémas d'homogénéisation linéaire classiques grâce à son caractère quadratique, tandis que le second terme $\Delta J = J - J_L$ pourra être évalué séparément.

On obtient une expression de \tilde{w}_Δ à partir de (6) qui dépend de J_L et de ΔJ . De plus, comme $\Phi_C(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) = +\infty$ quand $g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) > 0$, la borne inférieure dans l'expression de \tilde{w}_Δ est obtenue sous la condition $g\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t}, \frac{p - p_n}{\Delta t}\right) \leq 0$.

En reprenant la démarche suivit par Lahellec et Suquet dans [5], on a approché l'énergie libre effective \tilde{w}_Δ par

$$\tilde{w}_\Delta(\boldsymbol{E}) \approx \tilde{w}_\Delta^{var}(\boldsymbol{E}, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) = \inf_{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \boldsymbol{E}} \left\{ \inf_{(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p)/h(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p) \leq 0} \langle J_L(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \rangle + \left\langle \text{stat}_{(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p})/g(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p}) \leq 0} \Delta J_{bis}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \{\eta_{\varepsilon^p}\}) \right\rangle \right\}, \quad (9)$$

où $h(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p) = (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) : (\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \frac{3}{2}(p - p_n)^2$ est une réécriture de la fonction g (cf. Eq.(4)), le potentiel ΔJ_{bis} est défini par $\Delta J - \Delta t \Phi_C$ et la notation $\{\eta_{\varepsilon^p}\}$ représente l'ensemble $\{\eta_{\varepsilon^p}^{(1)}, \dots, \eta_{\varepsilon^p}^{(N)}\}$.

On doit maintenant calculer les conditions de stationnarité :

— La stationnarité de ΔJ_{bis} en fonction de $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{p})$ conduit à :

$$\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} = \frac{1}{3 \widehat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{eq}^{(r)}} \left[\frac{\partial \phi^{(r)}}{\partial \widehat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{eq}^{(r)}} \left(\widehat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{eq}^{(r)} \right) + R^{(r)} \left(p_n^{(r)} + \Delta t \widehat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{eq}^{(r)} \right) \right] = \eta_{\phi, sct}^{(r)} \left(\widehat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{eq}^{(r)} \right) + \eta_h^{(r)} \left(\widehat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{eq}^{(r)} \right). \quad (10)$$

— La stationnarité de \tilde{w}_Δ^{var} en fonction de $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$ donne :

$$\widehat{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{eq}^{(r)} = \overline{\overline{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}}^{(r)} = \sqrt{\frac{2}{3} \left\langle \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t} \right) : \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}^p - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p}{\Delta t} \right) \right\rangle^{(r)}}. \quad (11)$$

— La stationnarité de J_L en fonction de $(\boldsymbol{\varepsilon}^p, p)$ permet d'obtenir :

1. Le taux de déformation plastique cumulée p uniforme par phase et qui est défini par :

$$p^{(r)} = p_n^{(r)} + \Delta t \overline{\overline{\varepsilon^p}}^{(r)}$$

2. L'expression de la viscosité sécante :

$$\eta_{\varepsilon^p}^{(r)} = \eta_{\phi, sct}^{(r)} \left(\overline{\overline{\varepsilon^p}}^{(r)} \right) + \eta_h^{(r)} \left(\overline{\overline{\varepsilon^p}}^{(r)} \right) = \frac{\sigma_y^{(r)} + R^{(r)}(p^{(r)})}{3 \overline{\overline{\varepsilon^p}}^{(r)}} \quad (12)$$

3. L'expression du champ des déformations plastiques :

$$\varepsilon^p = \left[\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} + \mathbb{H}^{(r)} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \mathbb{K} \right]^{-1} : \left[\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : \varepsilon + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} \varepsilon_n^p \right]. \quad (13)$$

En introduisant l'expression de ε^p dans la définition de $J_L^{(r)}$ (cf. Eq.(8)), on montre que l'énergie $w_L^{(r)}$ prend la forme

$$w_L^{(r)}(\underline{x}, \varepsilon) = \inf_{(\varepsilon^p, p)} J_L^{(r)}(\varepsilon, \varepsilon^p, p) = J_L^{(r)}(\varepsilon, \varepsilon^p(\varepsilon, \varepsilon_n^p)) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{L}_L^{(r)} : \varepsilon + \tau_L^{(r)}(\underline{x}) : \varepsilon + \frac{1}{2} f_L^{(r)}(\underline{x}). \quad (14)$$

Les expressions de $\mathbb{L}_L^{(r)}$, $\tau_L^{(r)}$ et $f_L^{(r)}$ sont fournis dans [7]. Une telle énergie correspond à un MLC à polarisation intraphase hétérogène, $\tau_L^{(r)}$ et $f_L^{(r)}$ dépendant de \underline{x} à travers ε_n^p . L'énergie effective de ce MLC est définie par $\tilde{w}_L(\mathbf{E}) = \inf_{\langle \varepsilon \rangle = \mathbf{E}} \langle w_L(\mathbf{E}) \rangle$. En raison des conditions de stationnarité de ΔJ_{bis} en fonction de ε_{eq}^p et de \tilde{w}_Δ^{var} en fonction de $\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}$, on obtient

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{w}_\Delta}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \tilde{w}_L}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}). \quad (15)$$

Nous avons ensuite fait appel à la procédure proposée par Lahellec et al. [4] pour un comportement élasto-plastique avec de l'écroutissage isotrope et cinématique linéaire, pour lequel $w_L^{(r)}(\underline{x}, \varepsilon)$ est défini par (14) avec des modules constants $\mathbb{L}_L^{(r)}$ et une polarisation hétérogène $\tau(\underline{x})$ et $f_L^{(r)}(\underline{x}) \neq 0$. Ainsi, la procédure variationnelle est appliquée une seconde fois pour obtenir un MLC homogène avec une énergie $w_0^{(r)}$, qui approche le MLC hétérogène $w_L^{(r)}$, et qui est défini par

$$w_0(\underline{x}, \varepsilon) = \sum_{r=1}^N w_0^{(r)}(\varepsilon) \chi^{(r)}(\underline{x}), \quad \text{avec } w_0^{(r)}(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{L}_0^{(r)} : \varepsilon + \tau_0^{(r)} : \varepsilon + \frac{1}{2} f_0^{(r)}. \quad (16)$$

Le détail de l'application de cette procédure pour obtenir les modules $\mathbb{L}_0^{(r)}$ et $\tau_0^{(r)}$ en fonction de $\mathbb{L}_L^{(r)}$ et $\tau_L^{(r)}$ est fournie dans [7]. L'énergie effective du MLC $w_0^{(r)}$ est donnée par Willis [11]

$$\tilde{w}_0(\mathbf{E}) = \inf_{\langle \varepsilon \rangle = \mathbf{E}} \langle w_0(\underline{x}, \varepsilon) \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \tilde{\mathbb{L}}_0 : \mathbf{E} + \tilde{\tau}_0 : \mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{f}_0. \quad (17)$$

L'estimation de l'énergie effective par une méthode d'homogénéisation linéaire permet d'obtenir, à l'aide des formules classiques fournies par Ponte Castañeda et Suquet [9], les moments d'ordre un et deux de la déformation ε_0 associée au MLC $w_0^{(r)}$. De plus, Lahellec et al. [4] ont montré que les moments d'ordre un et deux du champ des déformations ε_L dans le MLC $w_L^{(r)}$ peuvent être approchés par ceux du MLC $w_0^{(r)}$. On obtient alors

$$\overline{\overline{\varepsilon_L}}^{(r)} = \overline{\overline{\varepsilon_0}}^{(r)}, \quad \langle \varepsilon_L \otimes \varepsilon_L \rangle^{(r)} = \langle \varepsilon_0 \otimes \varepsilon_0 \rangle^{(r)}. \quad (18)$$

Le comportement effectif du composite non linéaire peut maintenant être approché à partir de l'estimation

$$\Sigma = \frac{\partial \tilde{w}_\Delta}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \tilde{w}_L}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}) = \tilde{\mathbb{L}}_0 : \mathbf{E} + \tilde{\tau}_0. \quad (19)$$

Dans ce qui suit, nous appliquons la procédure développée au cas de matériaux élasto-plastiques renforcés par des particules élastiques linéaires sphériques distribuées de manière aléatoire et isotrope ($N = 2$, avec N le nombre de phases). Pour cela, afin de calculer le comportement effectif du composite ainsi que les moments d'ordre un et deux des différents champs de chaque phase, nous avons utilisé l'estimation de Hashin Shtrikman.

2.3 Applications et discussions

2.3.1 Cas d'une matrice soit parfaitement plastique soit à écrouissage cinématique linéaire ou isotrope

Cette section traite des matériaux composites constitués d'une matrice élasto-plastique, idéalement plastique ou à écrouissage cinématique linéaire ou isotrope, renforcée par des inclusions sphériques élastiques ayant un comportement linéaire isotrope. Ces particules sont distribuées de manière aléatoire et isotrope dans la matrice.

Les composites étudiés sont soumis au chargement utilisé par Lahellec et Suquet dans [6]. Ces derniers ont considéré un tenseur de déformation macroscopique \mathbf{E} correspondant à une extension isochore dans la direction axiale

$$\mathbf{E}(t) = E_{33}(t) \left(-\frac{1}{2}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right). \quad (20)$$

Les résultats de notre modèle sont comparés aux prédictions du modèle RVP développé par Lahellec et Suquet [6] et à leurs simulations FFT effectuées sur un VER composé de 50 inclusions sphériques réparties aléatoirement et de manière isotrope dans la matrice.

Les paramètres matériaux utilisés sont ceux pris en compte par Lahellec et Suquet dans [6]. Les valeurs de ces paramètres par phase sont les suivantes

$$\begin{aligned} \text{Inclusion : } c^{(1)} &= 0.17, \quad E^{(1)} = 16.368 \text{ GPa}, \quad \nu^{(1)} = 0.4999999 \\ \text{Matrix : } E^{(2)} &= 8.1846 \text{ GPa}, \quad \nu^{(2)} = 0.4999999, \quad \sigma_0^{(2)} = 100 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (21)$$

L'écrouissage cinématique linéaire est supposé décrit par $\mathbb{H}^{(2)} = a^{(2)}\mathbb{K}$ où \mathbb{K} représente classiquement le projecteur d'ordre 4 sur l'espace des déviateurs.

La figure 1 présente la variation de la contrainte macroscopique sous chargement isochore pour une matrice parfaitement plastique ($a^{(2)} = 0$ et $R^{(2)}(p) = 0$), pour une matrice avec de l'écrouissage cinématique linéaire ($a^{(2)} = 300$ MPa et $R^{(2)}(p) = 0$) et pour une matrice avec de l'écrouissage isotrope ($a^{(2)} = 0$ MPa et $R^{(2)}(p) = \beta^{(2)}p^{\gamma^{(2)}}$ où $\beta^{(2)} = 100$ MPa et $\gamma^{(2)} = 0.4$). On observe, dans les trois cas, un bon accord entre notre modèle, que l'on appellera désormais le modèle DIV (double incremental variational model), et le modèle RVP pour la contrainte axiale macroscopique E_{33} . Comme le modèle RVP, la formulation proposée est capable de reproduire l'effet Bauschinger. On remarque de plus que le modèle DIV reproduit correctement les simulations FFT. En raison de l'approximation du potentiel de dissipation $\sigma_y^{(r)} \dot{\varepsilon}_{eq}^p$ par un potentiel quadratique $\frac{\eta_{\varepsilon^p}^{(r)}}{\Delta t} (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p) : (\varepsilon^p - \varepsilon_n^p)$ le modèle surestime néanmoins légèrement la contrainte macroscopique.

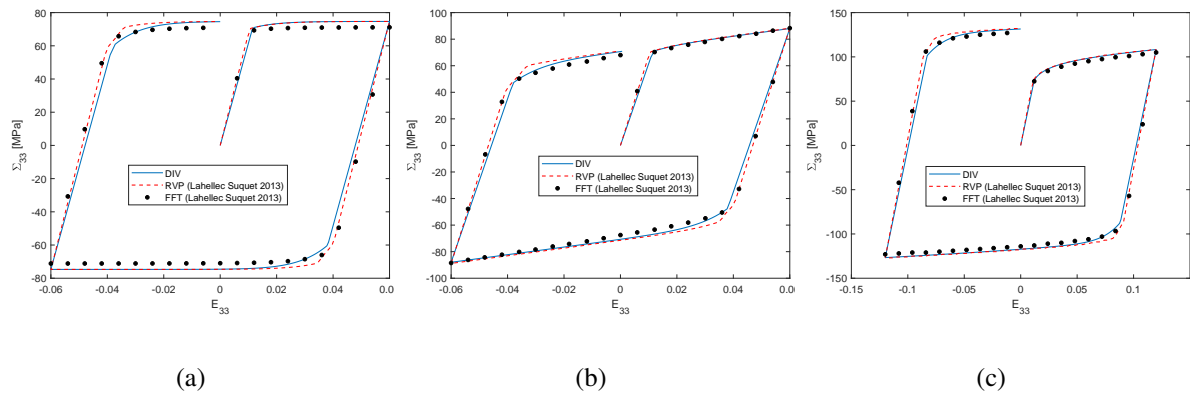


FIGURE 1: Composite à matrice élasto-plastique renforcée par des particules sphériques élastique. Cas d'une extension isochore. Evolution de la contrainte axiale macroscopique. Comparaison entre le modèle actuel (trait continu), le modèle RVP [6] (ligne pointillée) et les simulations en champ complet [6] (points). (a) Matrice parfaitement plastique, (b) Matrice avec écrouissage cinématique linéaire, (c) Matrice avec écrouissage isotrope.

2.3.2 Cas d'une matrice avec de l'écrouissage isotrope pour un chargement multi-cycles

Dans cette partie, nous examinons les prédictions du modèle DIV lorsque plusieurs cycles de chargement sont pris en compte. Nous étudions le cas d'une matrice élasto-plastique dont l'écrouissage isotrope est caractérisé par la loi puissance

$$R^{(2)}(p) = \beta^{(2)} p^{\gamma^{(2)}}. \quad (22)$$

Nous considérons à nouveau le composite traité par Lahellec et Suquet [6] dont les paramètres matériaux sont définis par Eq.(21) pour les propriétés élastiques des phases et par les paramètres suivants pour l'écrouissage isotrope

$$\beta^{(2)} = 100 \text{ MPa}, \quad \gamma^{(2)} = 0.4. \quad (23)$$

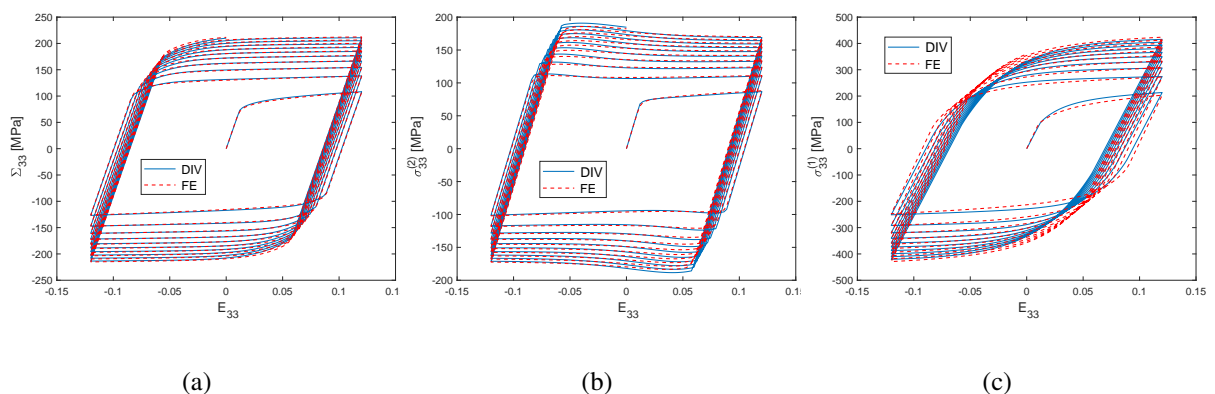


FIGURE 2: Composite renforcé par des particules élastiques soumis à une extension isochore de 10 cycles. Cas d'une matrice élasto-plastique avec de l'écrouissage isotrope. $c^{(1)} = 0.17$. (a) Contrainte axiale macroscopique, (b) Moyenne de la contrainte axiale dans la matrice, (c) Moyenne de la contrainte axiale dans l'inclusion.

Sur la figure 2 sont représentées, pour un chargement de 10 cycles, les évolutions de la contrainte axiale

et des moyennes de la contrainte axiale sur les phases pour la formulation DIV et pour des simulations réalisées par Éléments Finis (EF). Les calculs EF, ont été effectués sur un huitième d'une cellule cubique constituée d'une inclusion sphérique en son centre entourée d'une matrice élasto-plastique. Pour cela, nous avons pris en compte les conditions de symétrie et de périodicité vérifiées par la cellule. Dans l'ensemble, on observe un bon accord entre la formulation DIV et les simulations EF, en particulier pour la contrainte axiale macroscopique et pour la contrainte axiale moyenne dans la matrice. Comme on peut l'observer sur les contraintes axiales macroscopiques, la dissymétrie caractérisant l'effet Bauschinger augmente de manière continue avec le nombre de cycles, passant de 24.6 MPa pour le premier cycle à 40.6 MPa pour le dixième cycle. Cette évolution de la dissymétrie caractérisant l'effet Bauschinger est reproduite avec précision par la formulation DIV. Enfin, on peut constater que les réponses macroscopiques et locales tendent vers un cycle élasto-plastique limite, ce qui montre que l'approche DIV, en accord avec les simulations EF, prédit une accommodation élasto-plastique lorsque la matrice plastique présente de l'écroutissage isotrope.

2.3.3 Cas d'une matrice avec écroutissage cinématique linéaire et isotrope combiné

Dans cette partie, on considère le cas où la matrice du composite présente à la fois de l'écroutissage cinématique linéaire et de l'écroutissage isotrope. Le modèle est comparé aux simulations EF. La fonction caractérisant l'écroutissage isotrope $R^{(2)}$ est définie par :

$$R^{(2)}(p) = \left(RM - \sigma_y^{(2)} \right) \left(1 - e^{-Bp} \right). \quad (24)$$

où B et RM sont deux paramètres définissant l'écroutissage isotrope. Au cours des calculs, les paramètres élastiques des phase sont toujours identiques à ceux définis dans (21), et les paramètres pour l'écroutissage isotrope et cinématique sont fixés de la manière suivante :

$$\sigma_y^{(2)} = 100 \text{ MPa}, \quad RM = 2.1 \text{ GPa}, \quad B = 0.26, \quad a^{(2)} = 100 \text{ MPa}. \quad (25)$$

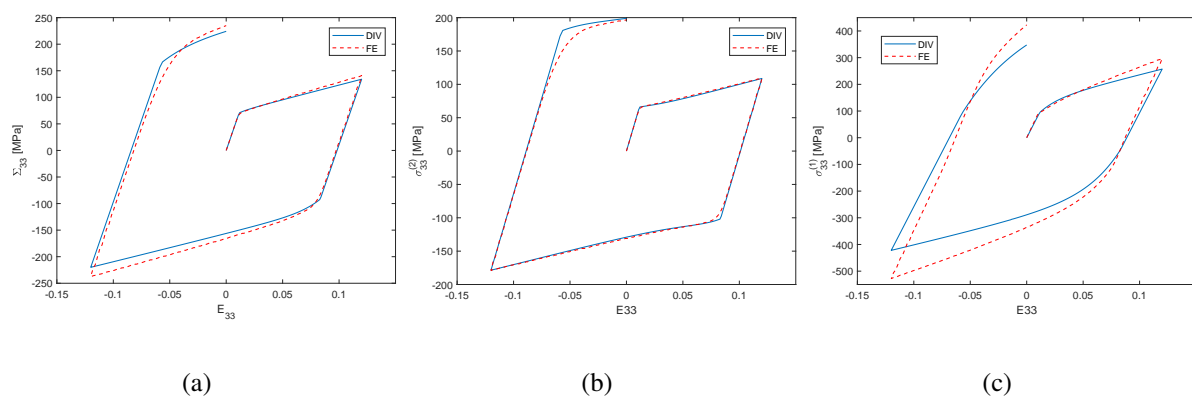


FIGURE 3: Composite renforcé sous extension isochore. Cas d'une matrice à écroutissage cinématique linéaire et isotrope. Comparaison entre le modèle DIV (ligne continue) et les simulations EF (ligne pointillée). (a) Contrainte macroscopique axiale, (b) Contrainte axiale moyenne dans la matrice, (c) Contrainte axiale moyenne dans l'inclusion.

Le composite est soumis à une extension cyclique isochore selon l'axe 3. Nous observons sur la Fig.3 que les prédictions du modèle DIV pour la moyenne des contraintes dans la matrice sont confondues

avec les données EF, à l'exception de l'effet Bauschinger qui est surestimé par le modèle. Par ailleurs, on observe que l'évolution de la moyenne des contraintes dans l'inclusion reproduit les tendances obtenues par EF, mais que le modèle les sous-estime avec une erreur maximale d'environ 11 %. De plus, la pente entre le modèle DIV et les EF est différente. On suppose que cette différence provient de l'anisotropie du problème à résoudre car la géométrie de la cellule unitaire est cubique contrairement à la microstructure représentée par le modèle DIV qui est supposée isotrope en raison de l'utilisation de l'estimation de Hashin Shtrikman. Ces observations expliquent pourquoi la contrainte macroscopique prédite par le modèle, qui est la moyenne des contraintes dans les phases, a approximativement la même pente que les EF mais la sous-estime légèrement avec une erreur maximale d'environ 3 %. On observe enfin que le modèle DIV est capable de reproduire l'effet Bauschinger.

3 Matériaux composites élasto-visco-plastique sans écrouissage

3.1 Application de la double procédure variationnelle

On considère un VER d'un matériau composite de N-phases. On suppose que les phases sont des MSG ayant un comportement local élasto-visco-plastique sans écrouissage associée à la théorie J_2 de la plasticité. Ceci correspond à un matériau défini par deux potentiels convexes avec pour variable interne $\alpha = (\varepsilon^{vp})$ décrivant les phénomènes irréversibles, où ε^{vp} représente la déformation visco-plastique. Les deux potentiels convexes sont : l'énergie libre $w^r(\varepsilon, \varepsilon^{vp})$

$$w^{(r)}(\varepsilon, \varepsilon^{vp}) = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^{vp}) : \mathbb{L}^{(r)} : (\varepsilon - \varepsilon^{vp}), \quad (26)$$

et le potentiel de dissipation $\varphi^{(r)}(\dot{\varepsilon}^{vp})$

$$\varphi^{(r)}(\dot{\varepsilon}^{vp}) = \sigma_0^{(r)} \dot{\varepsilon}_{eq}^{vp} + \frac{\eta^{(r)} \dot{\varepsilon}_0}{m+1} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{m+1}, \quad (27)$$

avec $\sigma_0^{(r)}$ la contrainte limite d'écoulement (qui peut être nulle dans le cas de l'élasto-visco-plasticité sans seuil), $\eta^{(r)}$ le module visqueux de la phase r , $\dot{\varepsilon}_0$ un taux de déformation de référence et m un exposant caractérisant la sensibilité de la vitesse (avec $m \leq 1$).

Les principes variationnels incrémentaux dans le cas de composites élasto-visco-plastiques sans écrouissage sont exactement les mêmes que ceux considérés dans le cas des composites élasto-plastiques avec écrouissage et présentés dans la partie 2.1.

Le potentiel $\varphi^{(r)}$ de l'Eq.(27) n'étant pas quadratique, on introduit un potentiel linéarisé ayant la même forme que celui considéré dans le cas de l'élasto-plasticité (voir Eq.(8))

$$J_L^{(r)}(\underline{x}, \varepsilon, \varepsilon^{vp}, \eta_{\varepsilon^{vp}}^{(r)}) = w^{(r)}(\varepsilon, \varepsilon^{vp}) + \frac{\eta_{\varepsilon^{vp}}^{(r)}}{\Delta t} (\varepsilon^{vp} - \varepsilon_n^{vp}) : (\varepsilon^{vp} - \varepsilon_n^{vp}), \quad (28)$$

où $\eta_{\varepsilon^{vp}}^{(r)}$ représente une viscosité homogène par phase. Utilisant la décomposition $J = J_L + \Delta J$, on obtient à partir de (6) une expression de \tilde{w}_Δ qui dépend de J_L et de ΔJ . En reproduisant à nouveau la

démarche développée par Lahellec et Suquet [5], on peut approcher l'énergie libre effective \tilde{w}_Δ par

$$\tilde{w}_\Delta(\mathbf{E}) \approx \tilde{w}_\Delta^{var}(\mathbf{E}, \{\eta_{\varepsilon^{vp}}\}) = \inf_{\langle \varepsilon \rangle = \mathbf{E}} \left\{ \inf_{\varepsilon^{vp}} \langle J_L(\varepsilon, \varepsilon^{vp}, \{\eta_{\varepsilon^{vp}}\}) \rangle + \left\langle \text{stat}_{\dot{\varepsilon}^{vp}} \Delta J(\dot{\varepsilon}^{vp}, \{\eta_{\varepsilon^{vp}}\}) \right\rangle \right\}, \quad (29)$$

qui est le pendant de l'Eq.(9) mais pour des phases élasto-visco-plastiques sans écrouissage. En développant les différentes conditions de stationnarités, on obtient

— Une expression de la viscosité sécante

$$\eta_{\varepsilon^{vp}}^{(r)} = \frac{\sigma_0^{(r)} + \eta^{(r)} \left(\widehat{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}}^{(r)} / \dot{\varepsilon}_0 \right)^m}{3 \widehat{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}}^{(r)}}. \quad (30)$$

— Une relation entre $\widehat{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}}^{(r)}$ et $\overline{\dot{\varepsilon}^{vp}}^{(r)}$

$$\widehat{\dot{\varepsilon}_{eq}^{vp}}^{(r)} = \overline{\dot{\varepsilon}^{vp}}^{(r)} \Rightarrow \eta_{\varepsilon^{vp}}^{(r)} = \frac{\sigma_0^{(r)} + \eta^{(r)} \left(\overline{\dot{\varepsilon}^{vp}}^{(r)} / \dot{\varepsilon}_0 \right)^m}{3 \overline{\dot{\varepsilon}^{vp}}^{(r)}}. \quad (31)$$

— Une expression des déformations visqueuses

$$\varepsilon^{vp} = \left[\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^{vp}}^{(r)}}{\Delta t} \mathbb{K} \right]^{-1} : \left[\mathbb{K} : \mathbb{L}^{(r)} : \varepsilon + 2 \frac{\eta_{\varepsilon^{vp}}^{(r)}}{\Delta t} \varepsilon_n^{vp} \right]. \quad (32)$$

On observe que l'expression des déformations visco-plastiques est similaire à l'expression (13) des déformations plastiques dans le cas de matériaux élasto-plastiques avec écrouissage. La seule différence entre ces deux équations réside dans l'expression différentes de la viscosité sécante (12) et (31). Ceci implique qu'en introduisant ε^{vp} dans l'expression (28) de J_L , l'énergie $w_L^{(r)}$ du MLC hétérogène à la même forme que l'équation (14) avec ε_n^{vp} à la place de ε_n^p dans les coefficients définissant l'énergie. On obtient aussi la même relation (15) entre le tenseur des contraintes macroscopique et le tenseur des déformations macroscopique.

Le traitement de l'hétérogénéité du MLC $w_L^{(r)}$ est exactement identique que celui réalisé dans la partie 2.2. En faisant appel à la procédure de Lahellec et al. [4] on approche le MLC à polarisation hétérogène par un MLC à polarisation homogène par phase. On peut alors estimer les moment d'ordre un et deux des déformations dans le MLC hétérogène par ceux du MLC homogène (cf. Eq.(18)). Par conséquent, le comportement effectif du composite non linéaire est obtenu par l'estimation Eq.(19).

Enfin, comme dans le cas des matériaux élasto-plastiques avec écrouissage, nous avons appliqué cette procédure dans le cas de composites élasto-visco-plastiques renforcés par des particules sphériques linéaires élastiques distribuées aléatoirement et de façon isotrope ($N = 2$, avec N le nombre de phases). En utilisant les estimations de Hashin Shtrikman, il est possible de calculer le comportement effectif du composite ainsi que les moments d'ordre un et deux des différents champs de chaque phase.

3.2 Applications et discussions

Cette partie traite des matériaux composites constitués d'une matrice élasto-visco-plastique sans écrouissage renforcée par des inclusions sphériques ayant un comportement élastique linéaire isotrope. Ces particules sont distribuées de manière aléatoire et isotrope dans la matrice. Les paramètres matériaux sont les mêmes que ceux issus de Lahellec et Suquet [6] et données par (21). Les composites étudiés

sont soumis à l'extension isochore (20). Les prédictions du modèles sont comparées au modèle RVP et aux simulations de FFT effectuées par Lahellec et Suquet [6].

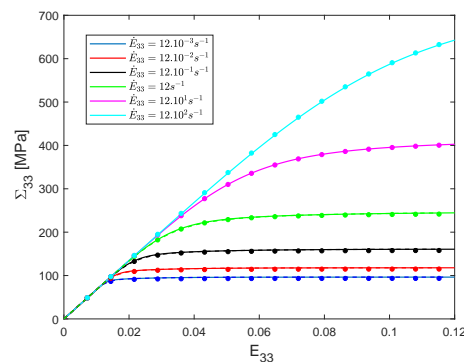


FIGURE 4: Composite renforcé à matrice élasto-visco-plastique sous extension isochore (20) pour différentes vitesses de chargement. Comparaison entre le modèle actuel (trait continu), le modèle RVP [6] (ligne pointillée) et les simulations FFT en champs complets [6] (points).

La figure 4 présente la variation de la contrainte macroscopique axiale du composite renforcé à matrice élasto-visco-plastique soumis à une extension isochore monotone pour différentes vitesses \dot{E} de chargement. Pour chacune de ces vitesses, on observe un bon accord entre les prédictions du modèle DIV et le modèle RVP. En effet, les deux modèles sont quasiment confondus. On observe, pour les vitesses de chargement allant de $12.10^{-3} s^{-1}$ à $12 s^{-1}$, que les deux modèles surestiment légèrement les données de FFT. Pour une vitesse de $12.10^1 s^{-1}$, les deux modèles sont confondus avec les données FFT. Enfin, pour une vitesse de $12.10^2 s^{-1}$ les deux modèles sous-estiment légèrement les simulations en champs complets.

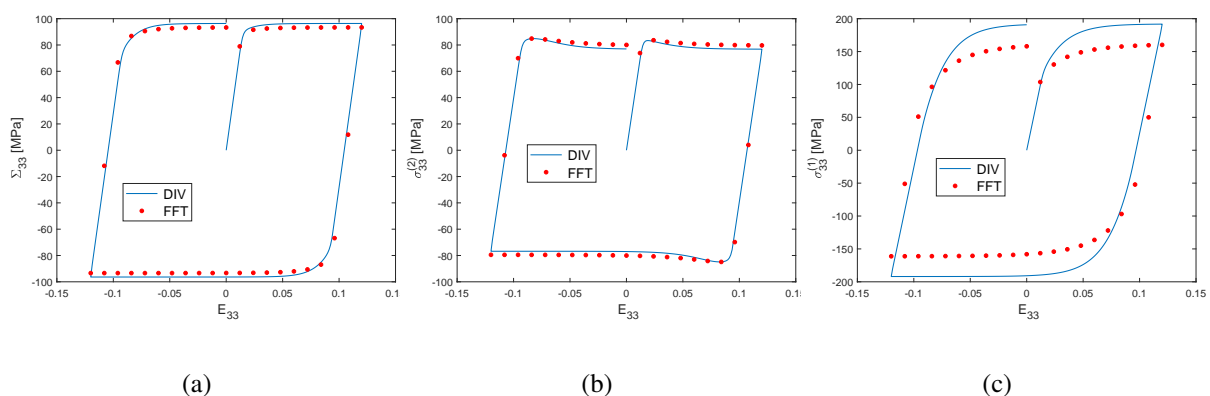


FIGURE 5: Composite renforcé à matrice élasto-visco-plastique soumis à une extension isochore pour une vitesse de $12.10^{-2} s^{-1}$. $c^{(1)} = 0.17$. (a) Contrainte axiale macroscopique, (b) Moyenne de la contrainte axiale dans la matrice, (c) Moyenne de la contrainte axiale dans l'inclusion.

La figure 5 décrit l'évolution des contraintes axiales macroscopiques et des moyennes par phase des contraintes axiales pour la formulation DIV et pour les simulations FFT dans le cas d'une extension isochore cyclique associée à une vitesse de chargement de $12.10^{-2} s^{-1}$. On observe un bon accord entre les prédictions du modèle et les simulations en champs complets. Concernant le comportement macroscopique, le modèle réussit à reproduire l'effet Baushinger, et comme observé sur la figure 4, il surestime légèrement les données FFT. On remarque également que le modèle DIV restitue assez

précisément l'adoucissement du comportement dans la matrice et reproduit qualitativement l'évolution de la contrainte moyenne dans l'inclusion.

4 Conclusion

Dans cette étude, nous avons proposé une procédure incrémentale variationnelle pour déterminer le comportement effectif, d'une part, des composites élasto-plastiques avec de l'écroutissage cinématique linéaire et isotrope, et d'autre part, des composites élasto-visco-plastiques sans écroutissage. Cette méthode est basée sur la démarche proposée par Agoras et al. [1] mais utilise un autre principe variationnel, celui présenté par Lahellec et Suquet dans [5]. Nous avons considéré des composites dont les phases sont des MSG définies chacune par deux potentiels convexes (l'énergie libre et le potentiel de dissipation). D'après Lahellec et Suquet [5], les principes variationnels locaux et macroscopiques s'obtiennent avec l'introduction d'un potentiel incrémental condensé. En se référant à la procédure variationnelle de Ponte Castañeda [8] et à la démarche d'Agoras et al. [1], ce potentiel est approché par un potentiel linéarisé qui conduit à un MLC $w_L^{(r)}$ à polarisation hétérogène au sein des phases. En tirant parti de la méthode proposée par Lahellec et al. [4], le MLC $\tilde{w}_L^{(r)}$ à polarisation hétérogène est approché par un MLC $w_0^{(r)}$ à polarisation homogène dont il devient possible de calculer les propriétés effectives ainsi que les moments d'ordre un et deux des champs locaux à l'aide des méthodes d'homogénéisation linéaires classiques. Les prédictions du modèle obtenu ont été comparées à celles du modèle RVP (Lahellec et Suquet [6]) et aux simulations FFT [6] dans le cas d'une extension isochore cyclique ou monotone. Dans le cas, d'une part, d'une matrice élasto-plastique parfaitement plastique ou avec écroutissage cinématique linéaire ou isotrope, et d'autre part d'une matrice élasto-visco-plastique sans écroutissage, nous avons constaté un bon accord entre le modèle DIV, le modèle RVP et les simulations FFT pour la contrainte macroscopique. On notera cependant que la contrainte effective des deux modèles DIV et RVP surestime légèrement les simulations numériques. Dans le cas d'un composite à matrice élasto-plastique avec de l'écroutissage isotrope et cinématique linéaire combiné, soumis à une extension isochore cyclique, les prédictions du modèle DIV ont été comparées aux simulations EF que nous avons réalisées. On observe que le modèle DIV reproduit les simulations EF pour la contrainte macroscopique et la contrainte moyenne dans la matrice alors qu'une différence de pente est observée pour la contrainte moyenne dans l'inclusion.

Références

- [1] Agoras M., Avazmohammadi R., Ponte Castañeda P. Incremental variational procedure for elasto-viscoplastic composites and application to polymer- and metal-matrix composites reinforced by spheroidal elastic particles. *International Journal of Solids and Structures*, 97-98 :668–686, 2016.
- [2] Halphen B., Nguyen Q. Sur les matériaux standard généralisés. *Journal de Mécanique*, 17 :39–63, 1975.
- [3] Ladeveze P. Mécanique non linéaire des structures : nouvelle approche et méthodes de calcul non incrémentales. *Hermès*, 1996.
- [4] Lahellec N., Ponte Castañeda P., Suquet P. Variational estimates for the effective response and field statistics in thermoelastic composites with intra-phase property fluctuations. *Proceeding of the Royal Society A*, 447 :2224–2246, 2011.
- [5] Lahellec N., Suquet P. On the effective behavior of nonlinear inelastic composites : I. Incremental variational principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55 :1932–1963, 2007.

-
- [6] Lahellec N., Suquet P. Effective response and field statistics in elasto-plastic and elasto-viscoplastic composites under radial and non radial loading. *International Journal of Plasticity*, 42 :1–30, 2013.
- [7] Lucchetta A., Auslender F., Bornert M., Kondo D. A double incremental variational procedure for elastoplastic composites with combined isotropic and linear kinematic hardening. *International Journal of Solids and Structures*, 158 :243–267, 2018.
- [8] Ponte Castañeda P. The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40 :1757–1788, 1991.
- [9] Ponte Castañeda P., Suquet P. Nonlinear composites. *Advances in Applied Mechanics*, 34 :171–302, 1998.
- [10] Ponte Castañeda P. Second-order homogenization estimates for nonlinear composites incorporating field fluctuations : I-theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :737–757, 2002.
- [11] Willis J. R. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Advanced in Applied Mechanics*, 21 :1–78, 1981.