

Caractérisation inverse de propriétés élastiques sous sollicitations multi-axiales

A. BOUSSELHAM^{a*}, P. DUFRENOY^a, F. ROUDET^b, V. MAGNIER^a, A-L. CRISTOL^a

a. Université Lille Nord de France, Centrale Lille LaMcube Laboratoire de mécanique multiphysique multiéchelle, CNRS, FRE 2016, F-59000, Lille, France

b. Université Lille Nord de France, LGCgE Laboratoire de Génie Civil et géo-Environnement, EA 4515, F-59000, Lille, France

* amine.bousselham@univ-lille.fr

Résumé :

De nos jours, le dimensionnement de système mécanique repose sur l'utilisation de matériaux dont les propriétés élastiques sont souvent relativement bien connues. Pour identifier chaque paramètre du modèle, il est alors souvent nécessaire d'effectuer autant de tests que de paramètres inconnus dans le modèle, ce qui est coûteux. Dans ce cas, l'identification via un seul essai multiaxial devient intéressante. Cependant, les difficultés se trouvent dans le recalage par méthode inverse comme la FEMU, qui repose sur l'optimisation d'une seule fonction coût, donc l'unicité de la solution n'est pas assurée. Ainsi, une solution consiste à découpler le problème. La décomposition du problème sera basée sur celle de Kelvin qui offre une base orthonormée. Cette démarche, associée au recalage inverse, offre la possibilité d'avoir autant de fonctions de coût à minimiser que de paramètres à identifier, conduisant indéniablement à la bonne solution du problème.

Abstract:

Nowadays, the mechanical systems sizing is based on the use of materials whose the mechanical properties are relatively well known. In order to identify each parameter of the model, it is often necessary to perform as many tests as unknown parameters in the model, which is very expensive. In this case, the identification through a single multiaxial test becomes interesting. However, the inverse method registration such as the FEMU shows some difficulties. In fact, this method based on the optimization of a single cost function, does not insure the uniqueness of the solution. The proposed method combines the coupling of the inverse method and the decomposition in Kelvin mode. This new approach allows the possibility of having as many cost functions to minimize as parameters to identify, undeniably leading to the right solution of the problem.

Mots clefs : Dialogue Numérique-expérimental, sollicitations multiaxiales, recalage inverse par éléments finis, Décomposition en modes de Kelvin.

1 Introduction

L'identification des propriétés mécanique d'un matériau nécessite d'effectuer autant de tests que de paramètres inconnus dans le modèle. A titre d'exemple, pour un matériau se trouvant dans la classe des matériaux isotrope transverse, on compte 4 paramètres élastiques indépendants que l'on identifie classiquement avec des essais de compression (ou de traction) dans différentes directions et un essai de cisaillement. Plusieurs études étaient menées afin de développer des méthodes de caractérisations des propriétés mécaniques des matériaux, avec des protocoles qui se composent d'une méthode d'essai uniaxial (Compression ou traction par exemple), instrumentée par une mesure optique et d'une étape de post-traitement couplant la simulation numérique de l'essai avec les techniques de corrélation d'images numériques. Parmi ces outils puissants qui offrent une description quantitative des propriétés du matériau on trouve la méthode de recalage inverse par Éléments Finis (EF). Cette approche permet d'être représentatif de l'essai tout en respectant le protocole (la géométrie de l'échantillon, les conditions aux limites, le maillage ...). Le principe fondamental de cette approche est présenté en 1971 par Kavanagh et Clough[1]. Il consiste à établir une fonction objective de type moindres carrés entre mesures expérimentales et valeurs simulées numériquement. L'optimisation des paramètres identifiés est basée sur l'algorithme de type Levenberg-Marquardt. Les paramètres recherchés sont obtenus par la minimisation de la fonction objective. Il existe différentes approches basées soit sur la comparaison entre les efforts mesurés et calculés (FEMF), ou entre les champs de déplacement mesurés et issus du calcul éléments finis numérique (FEMU). Cette approche FEMU a permis d'identifier des lois en élasticité linéaire [2,3], en hyper-élasticité [4] et aussi en élasto-plasticité [5]. Cette méthode est fiable si on souhaite déterminer un seul paramètre. En effet pour le cas isotrope transverse, on est dans l'obligation d'effectuer autant de tests que de paramètres inconnus, sachant que ce surnombre d'essai est chronophage et donc couteux. Ainsi une solution idéale consisterait à identifier des paramètres via un seul essai avec un chargement multiaxial (Essai d'indentation ou essai combiné compression-cisaillement par exemple). Mais les difficultés se trouvent dans le recalage inverse où l'unicité de la solution n'est pas assurée, parce que cette méthode repose sur l'optimisation d'une seule fonction coût. Donc pour résoudre ce problème, nous proposons une méthode permettant d'identifier chacun des paramètres élastiques via le couplage entre la méthode de l'identification inverse et la décomposition en Mode de Kelvin. Cette décomposition a comme avantages la possibilité de travailler avec des modes orthonormés ([6], [7] et [8]), et surtout l'utilisation de cette base nous permet d'avoir une certaine bi-univocité entre le champ de contrainte et le champ de déformation par mode, qui est un vrai atout pour les essais expérimentaux. Ce couplage va donc nous permettre d'avoir autant de fonction coût à minimiser que de paramètres à identifier, conduisant donc à la bonne solution du problème et l'identification de tous les inconnus avec un seul essai du moment que chaque mode soit activé. La validation de cette nouvelle méthode a été réalisée sur un essai d'indentation Brinell purement numérique dans les deux cas : isotrope et isotrope transverse.

2 Décomposition en Mode de Kelvin

La loi de comportement d'un matériau élastique linéaire, qui établit une relation linéaire réversible entre le tenseur de contrainte σ et le tenseur de déformation ε , en condition isotherme, s'écrit de façon générale sous les deux formes équivalentes suivantes :

$$\sigma = C : \varepsilon, \quad \varepsilon = S : \sigma \quad (2.1)$$

Dans l'équation (2.1), C représente le tenseur de rigidité du solide élastique tandis que S représente le tenseur souplesse élastique. Ceux sont des tenseurs du 4ème ordre, possédant la symétrie majeure et mineure ($C_{ijkl} = C_{jilk} = C_{klij}$)

La décomposition en mode de Kelvin consiste à exprimer que pour toute symétrie élastique, il existe des états de sollicitations du matériau tel que l'état de contrainte soit strictement proportionnel à l'état de déformation ([9], [10])

$$\sigma = \lambda \varepsilon \quad (2.2)$$

Les tenseurs de contraintes et de déformations vérifiant les relations de la forme (2.2) sont appelés états propres de contrainte et états propre de déformation. A chaque état propre de contrainte (resp. état propre de déformation) correspond un module λ (resp. $1/\lambda$), appelé module propre, module de rigidité ou module de Kelvin. L'ensemble des couples état propre/module propre forme l'ensemble des modes de Kelvin d'un solide élastique linéaire.

La représentation de la relation (2.1), de l'espace vectoriel tridimensionnel \mathbb{R}^3 vers l'espace vectoriel \mathbb{R}^6 des tenseurs du second ordre, permet de préciser le nombre des modules de Kelvin pour tout solide élastique linéaire. En effet dans \mathbb{R}^6 , les tenseurs du 4ème ordre C et S sont représentés par des tenseurs du second ordre \hat{c} et \hat{s} , tandis que les tenseurs de contraintes et de déformation dans l'espace tridimensionnel sont maintenant représentés par des vecteurs.

La loi de comportement 2.1 s'écrit alors dans \mathbb{R}^6 :

$$\sigma = \hat{c} : \varepsilon, \varepsilon = \hat{s} : \sigma \quad (2.3)$$

Déterminer les modules de Kelvin, vérifiant $\sigma = \lambda \varepsilon$ revient à résoudre le problème aux valeurs propres définit sur \mathbb{R}^6 par le système $\hat{c} - \lambda \hat{I} = 0$. Au final, nous obtenons six modules de Kelvin λ_i (resp. $1/\lambda_i$) auxquels correspondent six états propres de déformations ε_i (resp. Six états propres de contraintes σ_i). En normalisant les états propres de déformations ou les états propres de contraintes, il est possible d'exprimer les tenseurs d'élasticité en termes de modes de Kelvin :

$$\hat{c} = \lambda_1 N_1 \otimes N_1 + \dots + \lambda_6 N_6 \otimes N_6, \hat{s} = \frac{1}{\lambda_1} N_1 \otimes N_1 + \dots + \frac{1}{\lambda_6} N_6 \otimes N_6 \quad (2.4)$$

Pour un solide élastique isotrope les modules de Kelvin sont :

$$\lambda_1 = \frac{E}{1-2\nu}, \lambda_2 = \dots = \lambda_6 = \frac{E}{1+\nu} \quad (2.5)$$

Et les modes orthogonaux de Kelvin sont :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1, 0, 0, 0), N_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, -1, 1, 0, 0, 0), N_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0, 0, 0, 0) \\ N_4 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0), N_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0), N_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Dans le cas d'un solide élastique isotrope transverse [8] de direction z :

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{C_{11} + C_{12} + C_{33} + \sqrt{(C_{11} + C_{12} - C_{33})^2 + 8 \cdot C_{13}^2}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{C_{11} + C_{12} + C_{33} - \sqrt{(C_{11} + C_{12} - C_{33})^2 + 8 \cdot C_{13}^2}}{2} \\ \lambda_3 &= \lambda_6 = C_{11} - C_{12} \\ \lambda_4 &= \lambda_5 = 2 * C_{44} \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

Et les modes orthogonaux de Kelvin sont :

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{\sqrt{M_1}} \left(-\frac{A_1}{2}, -\frac{A_1}{2}, 1, 0, 0, 0 \right), N_2 = \frac{1}{\sqrt{M_2}} \left(\frac{1}{A_1}, \frac{1}{A_1}, 1, 0, 0, 0 \right), N_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-1, 1, 0, 0, 0, 0) \\
N_4 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0), N_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0), N_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Avec $A_1 = -\frac{C_{11}+C_{12}-C_{33}+\sqrt{(C_{11}+C_{12}-C_{33})^2+8.C_{13}^2}}{2.C_{13}}$ Et M_1 (resp. M_2) les normes de N_1 (resp. N_2)

3 Identification des propriétés

3.1 Recalage inverse par éléments finis (FEMU)

Nous proposons une nouvelle méthode permettant d'identifier chacun des paramètres élastiques dans une classe donnée, et seulement avec un seul essai. L'idée consiste à identifier via la méthode FEMU les modules de Kelvin λ_i sur chacun des modes. Ainsi, il conviendra à minimiser sur chacun des modes une fonction coût $J^i(\lambda_i) = \|\varepsilon_{exp}^i - \varepsilon_{num}^i\|^2$ où i est l'indice correspond au mode de Kelvin actif.

La figure 1 montre les étapes clés de la méthode. Les données d'entrée sont des champs de déformations par mode en 2D (Pour un essai de compression-cisaillement résultat de la corrélation d'images 2D effectuée avec le logiciel YaDICs[11]), ou en 3D (Pour un essai d'indentation sous tomographie effectué dans le tomographe de la plateforme ISIS4D [12]).

Pour notre cas, Afin de valider cette nouvelle méthode, nous partons d'un essai multiaxial d'indentation Brinell de référence purement numérique avec des propriétés mécanique connues. Cette simulation numérique de référence va remplacer la partie donnée d'entrée.

La différence entre cette méthode et la méthode classique est que pour cette méthode la boucle consiste à minimiser des fonctions $J^i(\lambda_i) = \|\varepsilon_{exp}^i - \varepsilon_{num}^i\|^2$ (i indice correspond au mode de Kelvin actif) et non pas une seule fonction $f = \|\varepsilon_{exp} - \varepsilon_{num}\|^2$. L'idée est de comparer pour chaque mode de Kelvin i les champs de déformations (expérimental et numérique) Pour ce mode afin de minimiser la fonction moindres carrés où l'algorithme d'optimisation à chaque itération est celui proposé par Levenberg-Marquardt [13]. Cette simulation en éléments finis est réalisée avec le logiciel Abaqus [14]. Enfin, les résultats en sortie correspondent aux modules de Kelvin λ_i . En effet chaque fonction de minimisation permet de déduire le module de Kelvin λ_i qui correspond au mode i actif, et à partir des λ_i et les équations (2.7), on peut déduire tous les inconnus du problème (les modules et les coefficients de Poisson).

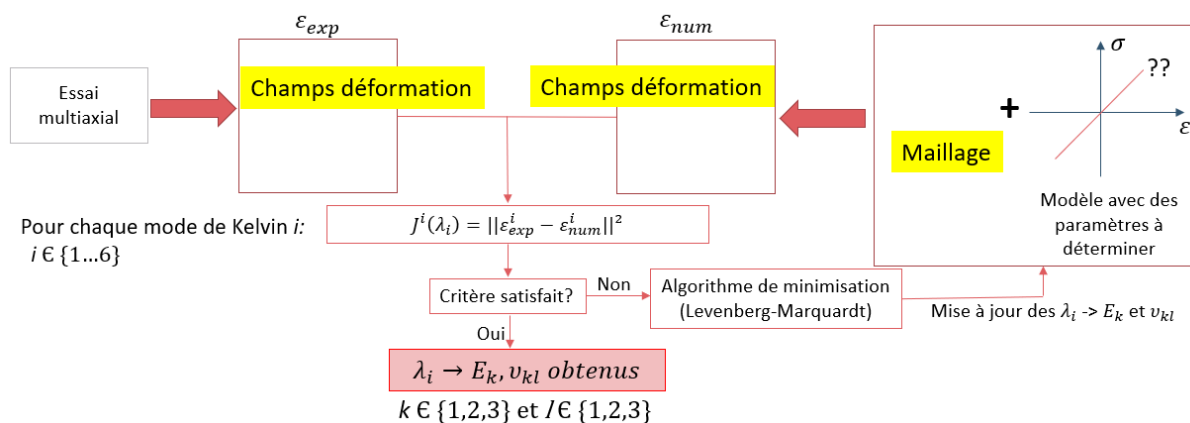


Figure 1 : Schéma descriptif de la méthode de recalage inverse des éléments finis

Cette méthode nous permet de découpler les calculs en utilisant la particularité de la décomposition en modes de Kelvin (les modes sont toujours orthogonaux et orthonormés). Donc via cette méthode, il est

possible d'avoir autant de fonction coût à minimiser que de paramètres à identifier, ce qui conduise à une bonne résolution du problème et avec un minimum de calcul.

Notre objectif est d'utiliser la nouvelle identification inverse pour déterminer ces propriétés mécaniques dans le cas isotrope et isotrope transverse.

3.2 Cas isotrope

Nous réalisons une simulation numérique d'un essai multiaxial d'indentation Brinell sur un cube de dimensions (5*5*5mm³), indenté avec un indenteur sphérique Brinell de diamètre 5 mm (Figure 2), en respectant les conditions aux limites de l'essai d'indentation.

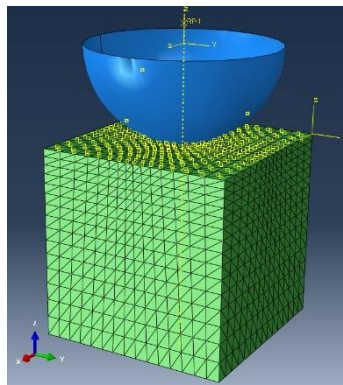


Figure 2 : Modèle indenteur Brinell

Pour les propriétés du matériau. On choisit un module de Young $E_{ref}=7500\text{MPa}$ et un coefficient de Poisson $\nu_{ref}=0.2$, ce qui nous donne les modules de Kelvin $\lambda_{1.ref}=12500\text{MPa}$ et $\lambda_{2.ref}= \dots = \lambda_{6.ref}=6250\text{MPa}$

Le modèle est composé d'une demi-sphère rigide, en contact avec un cube maillé (10000 éléments). Un déplacement de la demi-sphère d'intensité $U_z=-0.5\text{mm}$ est appliqué que l'indenteur. Le calcul EF de référence avec ces propriétés, nous permet d'avoir une idée sur les modes actifs, ainsi que les déformés par mode (Figure 3). A partir de ce résultat, on peut remarquer l'activation des six modes de Kelvin. En effet le mode 1 correspond au mode hydrostatique et les autres modes aux modes déviatoriques.

Pour le cas isotrope, on va se focaliser sur les deux premiers modes : le mode 1 et le mode 2. La minimisation de la première fonction de coût $J^1(\lambda_1)$, s'appuie que sur une seule comparaison, c'est la comparaison entre la déformés du mode 1 de référence et le mode 1 du calcul EF. Cette première minimisation donne la valeur de λ_1 . Et avec la même démarche et en utilisant la déformé du mode 2 et la deuxième fonction de coût $J^2(\lambda_2)$ on obtient la valeur de λ_2 .

La figure 4 représente l'évolution de la valeur propre λ_1 (resp λ_2), issue de la minimisation de la fonction de coût $J^1(\lambda_1)$ (resp. $J^2(\lambda_2)$) en fonction des calculs. On peut remarquer que la valeur de λ_1 (resp. λ_2), converge vers la valeur de référence $\lambda_{1.ref}=12500\text{MPa}$ (resp. $\lambda_{2.ref}=6250\text{MPa}$). Les fonctions J^1 et J^2 nous donnent les valeurs $\lambda_{1.FEMU}=13126\text{MPa}$ et $\lambda_{2.FEMU}=6213\text{MPa}$. En combinant ces deux valeurs on obtient $E_{FEMU}=7536\text{MPa}$ et $\nu_{FEMU}=0.2129$. Un module et un coefficient très proches des valeurs de référence. D'où la validation de la nouvelle méthode pour le cas isotrope.

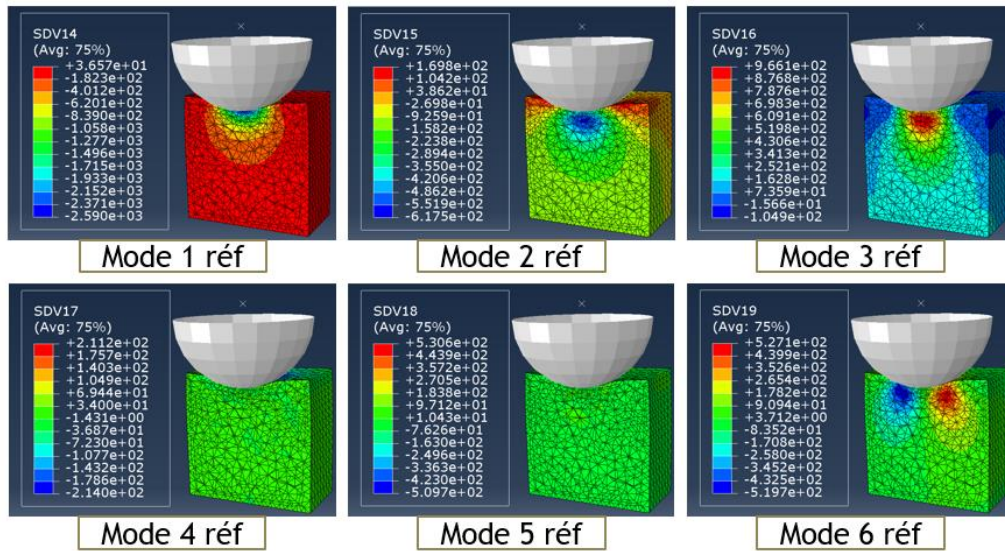


Figure 3 : Les déformés des six modes de Kelvin

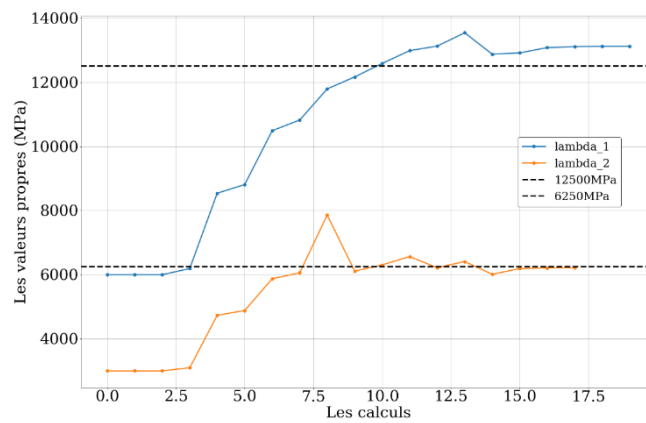


Figure 4 : Evolution des valeurs propres en fonction des calculs

La figure 5 compare les déformés par mode (Mode 1 et 2) du cas de référence avec les déformés obtenus après l'identification inverse FEMU. On a presque les mêmes déformés et les mêmes valeurs ce qui valide les λ_i obtenus et la nouvelle méthode d'identification.

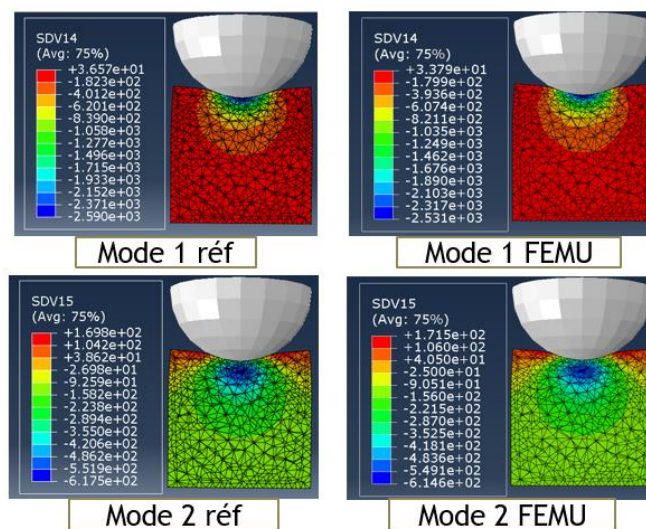


Figure 5 : Déformées des Modes 1 et 2

Le tableau 1 présente les erreurs relatives pour les deux valeurs propres (λ_1 et λ_2), le module de Young E et le coefficient de Poisson ν . A partir de ces valeurs, on peut remarquer qu'on a des erreurs relatives inférieures à 6.5% ce qui valide notre nouvelle méthode.

	Valeur de référence	Valeur calculée FEMU	Erreur relative
λ_1	12500	13126	0.05008
λ_2	6250	6213	0.00592
E	7500	7536	0.0048
ν	0.2	0.2129	0.0645

Tableau 1 : Les erreurs relatives

En effet, via la nouvelle méthode de couplage (identification inverse et décomposition en mode de Kelvin), la minimisation des fonctions de coût se fait par mode, donc on aura autant de fonction coût à minimiser que de paramètre à identifier, ce qui facilite la résolution du problème.

3.3 Cas isotrope-transverse

Après la validation de la méthode pour le cas isotrope, on s'intéresse maintenant au cas isotrope transverse. On part du même modèle que celui du cas isotrope (Figure 2). La seule différence est au niveau des propriétés mécanique du matériau, on passe d'un modèle isotrope à un modèle isotrope transverse. On choisit pour la direction normale un module de Young $E_{3ref}=22500\text{MPa}$, et pour les deux directions transverses $E_{1ref}=E_{2ref}=7500\text{MPa}$. Ainsi des coefficients de Poisson $\nu_{12ref}=\nu_{21ref}=0.2$ et $\nu_{31ref}=\nu_{32ref}=0.3$. Ce qui nous donne les modules de Kelvin $\lambda_{1,ref}=25525.69\text{MPa}$, $\lambda_{2,ref}=8933.76\text{MPa}$, $\lambda_{3,ref}=\lambda_{6,ref}=6250\text{MPa}$ et $\lambda_{4,ref}=\lambda_{5,ref}=20454.54\text{MPa}$.

On applique le même déplacement $U_z=-0.5\text{mm}$. Le calcul EF de référence avec ces propriétés, nous permet d'avoir une idée sur les modes actifs, ainsi que les déformés par mode (Figure 6). On peut remarquer qu'on a les mêmes modes actifs (le mode 1 hydrostatique et les cinq modes déviatoriques).

Pour le cas isotrope transverse, on va se focaliser sur les quatre premiers modes : le mode 1 hydrostatique et les modes déviatoriques 2,3 et 4. La minimisation de chaque fonction de coût $J^i(\lambda_i)$, s'appuie que sur une seule comparaison, c'est la comparaison entre la déformés du mode i de référence et le mode i du calcul EF. La première minimisation par exemple donne la valeur de λ_1 . Avec la même démarche et en utilisant les déformés des mode 2,3 et 4 on obtient la valeur de λ_2 , λ_3 et λ_4 .

La figure 7 représente l'évolution de la valeur propre λ_1 , λ_2 , λ_3 et λ_4 . Issues de la minimisation de la fonction de coût $J^1(\lambda_1)$, $J^2(\lambda_2)$, $J^3(\lambda_3)$ et $J^4(\lambda_4)$ en fonction des calculs. On peut remarquer que la valeur de λ_1 (resp. λ_2 , λ_3 et λ_4), converge vers la valeur de référence $\lambda_{1,ref}=25525.69\text{MPa}$ (resp. $\lambda_{2,ref}=8933.76\text{MPa}$, $\lambda_{3,ref}=6250\text{MPa}$ et $\lambda_{4,ref}=20454.54\text{MPa}$). Les fonctions J^1 , J^2 , J^3 et J^4 nous donnent les valeurs $\lambda_{1,FEMU}=25552.4\text{MPa}$, $\lambda_{2,FEMU}=8956.44\text{MPa}$, $\lambda_{3,FEMU}=6179.99\text{MPa}$ et $\lambda_{4,FEMU}=20464.71\text{MPa}$. En combinant ces quatre valeurs et en utilisant les quatre équations (2.7). On obtient $E_{1,FEMU}=E_{2,FEMU}=7579.1\text{MPa}$, $E_{3,FEMU}=22545.77\text{MPa}$, $\nu_{12,FEMU}=0.1953$ et $\nu_{31,FEMU}=0.3025$. Ces modules et Ces coefficients sont très proches des valeurs de référence. D'où la validation de la nouvelle méthode pour le cas isotrope transverse.

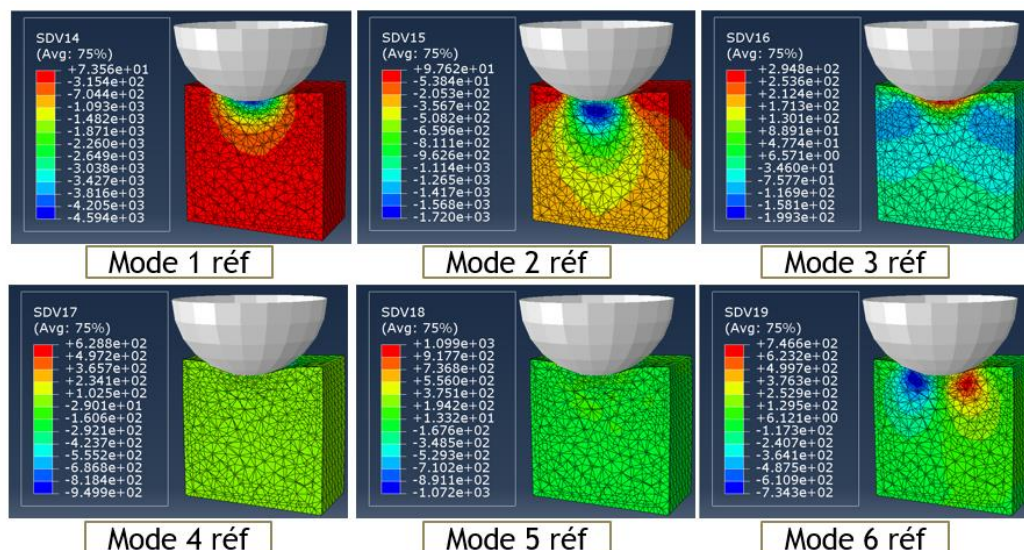


Figure 6 : Les déformés des six modes de Kelvin

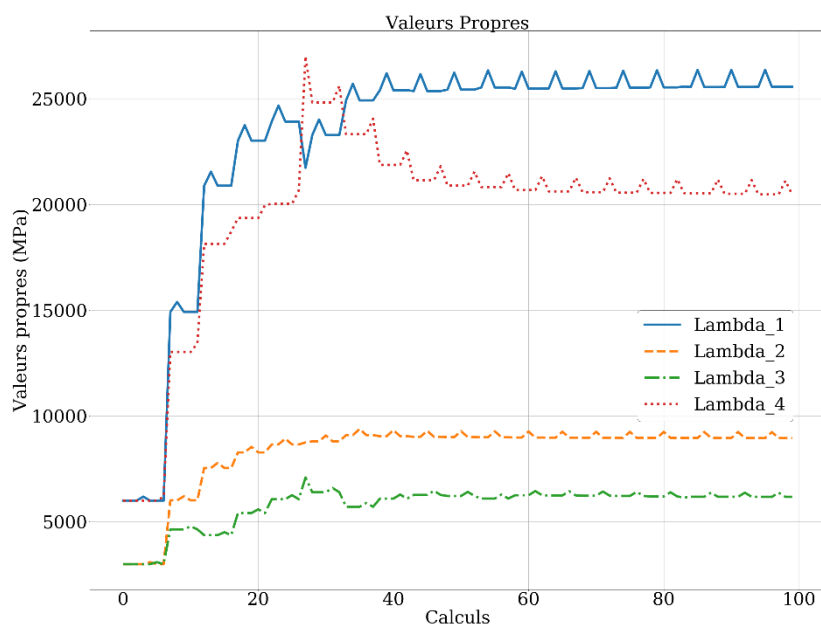


Figure 7 : Evolution des valeurs propres en fonction des calculs

La figure 8 compare les déformés par mode (Mode 1, 2, 3 et 4) du cas de référence avec les déformés obtenus après l'identification inverse FEMU. On a presque les mêmes déformés et les mêmes valeurs ce qui valide les λ_i obtenus et la nouvelle méthode d'identification.

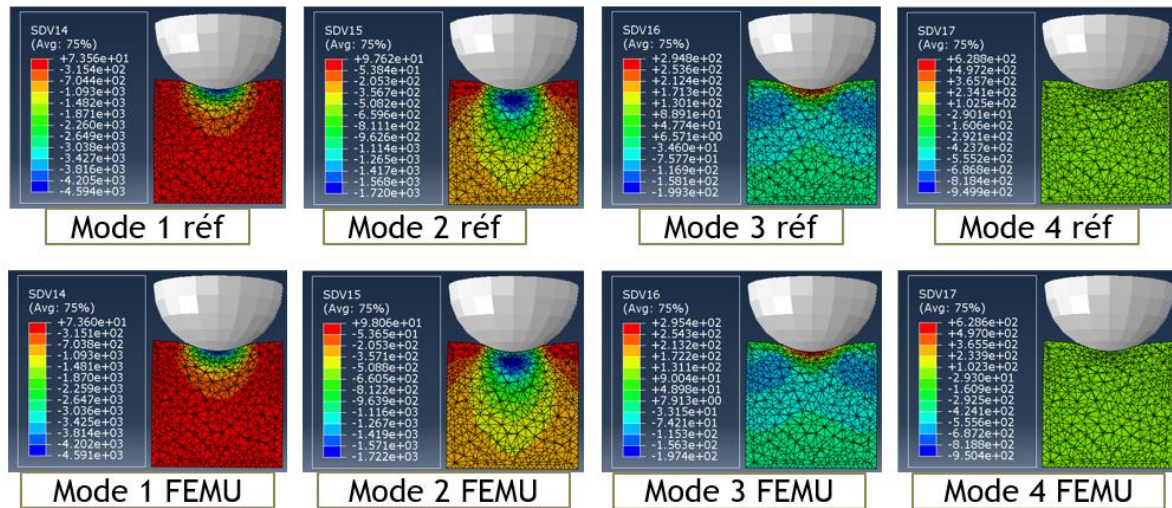


Figure 8 : Déformées des Modes 1, 2, 3 et 4

	Valeur de référence	Valeur calculée FEMU	Erreur relative
λ_1	25525.69	25552.4	0.00105
λ_2	8933.76	8956.44	0.00259
λ_3	6250	6179.99	0.0112
λ_4	20454.54	20464.71	0.0005
E_1	7500	7579.11	0.0105
E_3	22500	22545.77	0.00203
ν_{12}	0.2	0.1953	0.0235
ν_{31}	0.3	0.3025	0.00834

Tableau 2 : Les erreurs relatives

Le tableau 2 présente les erreurs relatives pour les quatre valeurs propres (λ_1 , λ_2 , λ_3 et λ_4), les deux modules de Young (E_1 , E_3) et les deux coefficients de Poisson (ν_{12} , ν_{31}). A partir de ces valeurs, on peut remarquer qu'on a des valeurs d'erreur inférieures à 2.3% ce qui valide notre nouvelle méthode.

4 Conclusion et Perspectives

L'étude que nous avons entreprise vise à déterminer avec un minimum d'essais expérimentaux, les propriétés mécaniques pour prédire le comportement d'un matériau anisotrope. L'approche que nous voulons développer est une formulation qui s'appuie sur le couplage entre la décomposition en mode de Kelvin et l'identification paramétrique par recalage éléments finis (FEMU). En effet, Cette nouvelle méthode nous permet de découpler les calculs en utilisant la particularité de la décomposition en modes de Kelvin (les modes sont toujours orthogonaux et orthonormés). Donc via cette méthode, il est possible d'avoir autant de fonction coût à minimiser que de paramètres à identifier, ce qui conduise à une bonne résolution du problème et avec un minimum de calcul. Une première étude avec un modèle de référence purement numérique nous a permis de valider cette nouvelle méthode pour le cas isotrope et isotrope transverse, Les travaux sont en cours pour intégrer la partie expérimentale, pour avoir des données d'entrée expérimentales, sous forme de champs de déformations par mode en 2D (Pour un essai de compression-cisaillement résultat de la corrélation d'images 2D effectuée avec le logiciel YaDICs[11]), ou en 3D (Pour un essai d'indentation sous tomographie effectué dans le tomographe de la plateforme ISIS4D [12]).

Références

- [1] K.T. Kavanagh et R.W. Clough. Finite element applications in the characterization of elastic solids, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 7, pages 11-23, 1971.
- [2] D. Lecompte, A. Smits, H. Sol, J. Vantomme et D. Van Hemelrijck. Mixed numerical-experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile test on cruciform specimens, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, pages 1643-1656, 2007
- [3] J-F. Witz, S. Roux et F. Hild. Mechanical properties of crimped mineral wools : Identification from digital image correlation, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 130, pages 1-7, 2008.
- [4] K. Genovèse, L.Lamberti et Pappalettere C.Mechanical characterization of hyperelastic materials with fringe projection and optimization techniques, *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 44 ,no. 5, pages 423-442,2006.
- [5] A. Khalfallah. Identification des lois de comportement élastoplastiques par essais inhomogènes et simulations numérique. Thèse de Doctorat, Université Tunis El Manar, Tunisie, 2004
- [6] R. Desmorat, Décomposition de kelvin et concept de contraintes effectives multiples pour les matériaux anisotropes, *Compte Rendu de Mécanique*, vol. 337. 2009.
- [7] R. Desmorat, Non-quadratic Kelvin modes based plasticity criteria for anisotropic materials, *International Journal of Plasticity*, 2011
- [8] A. Bona, Coordinate-free Characterization of the Symmetry Classes of Elasticity Tensors, *J Elasticity*, 2007.
- [9] J. Rychlewski, On hooke's law. *Prikl. Matem. Mekhan.* 48, 303–314, 1984.
- [10] M. Mehrabadi, Cowin, S., Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 43, 15–41, 1990.
- [11] YaDICs Software, Université de Lille. <http://yadics.univ-lille1.fr/wordpress/>.
- [12] Plateforme d'imagerie par rayons X ISIS4D. <http://isis4d.univ-lille1.fr/wordpress/>.
- [13] D. Marquardt. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters, *SIAM J. Appl. Math.*, pp. 11, 431-441, 1963.
- [14] Abaqus