

# Stabilisation de l'interface de l'écoulement de Poiseuille bicouche

L. BOUCHARA<sup>a</sup>, H. AIT ABDERRAHMANE<sup>b</sup>, N. AMATOUSSE<sup>a</sup>,  
O. OURRAD<sup>a</sup>, B. MEZIANI<sup>a</sup>

a. Laboratory of Theoretical Physics, A.MIRA University, Targua Ouzemour 06000, Bejaia, ALGERIA + [l.bouchara@yahoo.fr](mailto:l.bouchara@yahoo.fr)

b. Khalifa University of Science and Technology, Masdar city, Abu Dhabi, United Arab Emirates

## Résumé :

*Notre intérêt a été porté aux instabilités à l'interface contrôlée séparant des films liquides en écoulement à l'intérieur d'un canal. Les modèles à deux équations élaborés dans ce domaine et faisant intervenir le débit local ont trouvé leur essor avec les récents travaux de Ruyer-Quil et Manneville (Eur. Phys. J. B, 15, 2000). Avec un choix approprié des fonctions de pondérations, on peut aboutir à un système modèle simple libéré de toutes les insuffisances des modèles de la littérature. Nous avons choisi d'appliquer leur méthode à un écoulement où le fluide est injecté ou aspiré de la paroi inférieure d'un canal. Ce travail est une généralisation au cas de l'écoulement bicouche du modèle de Thompson et al. (Physics of Fluids, 28, 2016). L'effet stabilisateur du contrôle imposé a été mis en évidence dans le cadre d'une étude linéaire de stabilité.*

## Abstract :

*Our interest has been focused on instabilities at the controlled interface separating film flows inside a channel. The two-equation models developed in this field and involving local flow have found their growth with the recent work of Ruyer-Quil and Manneville (Eur Phys J. B, 15, 2000). With an appropriate choice of weighting functions, we can reduce the problem to a simple model free of all the shortcomings of the other models of the literature. We chose to apply their method to a flow where the fluid is injected or sucked from the bottom wall of the channel. This work is a generalization of the Thompson et al. flow model (Physics of Fluids, 28, 2016). The stabilizing effect of the imposed control has been highlighted by a linear stability study.*

**Mots clefs : Instabilités, écoulement bicouche, contrôle**

## 1 Introduction

Les applications liées aux écoulements de fluides à l'intérieur d'un canal sont nombreuses, on pourrait donner l'exemple de l'industrie des polymères, en particulier leur mise en forme, mais aussi l'industrie alimentaire, l'industrie des pâtes à papier....

La régularité de l'interface séparant ces fluides est d'une grande importance dans ces industries d'où l'intérêt des études menées dans le but de son contrôle.

L'objectif de ce travail est de formuler un modèle pouvant décrire l'évolution d'une interface air/liquide contrôlée. Nous nous intéressons, particulièrement, au contrôle des instabilités de fluides non miscibles, visqueux et incompressibles confinés entre deux plaques planes inclinées. Une étude d'un écoulement de deux couches de fluides newtoniens a été abordé dans l'article [1]. Nous retrouvons d'autres études sur les couches de fluides viscoélastiques s'écoulant par gravité dans un canal incliné dans [2], [3] et [4]. Ce travail est une généralisation au cas de l'écoulement bicouche du modèle à deux équations de Thompson et al. [5] décrivant l'écoulement contrôlé d'un film liquide mince sur un plan incliné.

## 2 Modélisation du problème

### 2.1 Equations gouvernantes

Nous nous sommes intéressés à l'écoulement plan de deux fluides disposés en couches infinies d'épaisseur  $H_1$  et  $H_2$  respectivement, séparés par une interface initialement plane et confinés entre deux parois parallèles distantes de  $d$  et inclinées d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale (voir Fig.1). Les deux fluides sont non miscibles, incompressibles et l'écoulement est isotherme. Le fluide de la couche inférieure peut être injecté ou aspiré de la paroi inférieure du canal à travers des actionneurs. Les équations décrivant le mouvement des deux couches sont celles de Navier-Stokes [6].

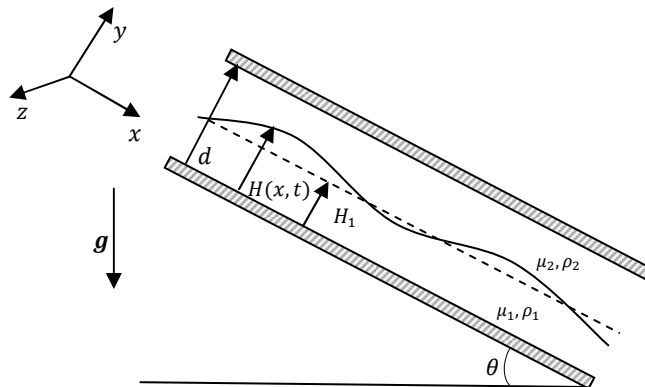


Figure 1 : Représentation du problème

Dans ce qui suit,  $(u_k, v_k)$  ( $k = 1, 2$ ) représentera la vitesse de chaque couche fluide, les  $\rho_k$  leur densité, les  $\mu_k$  leur viscosité dynamique.

Pratiquement, la méthode de calcul consiste à introduire le petit paramètre  $\varepsilon$ , à travers la transformation  $(\partial_t, \partial_x) \rightarrow \varepsilon(\partial_t, \partial_x)$ . Ce paramètre assure l'hypothèse de la lente variation en temps et en espace (suivant  $x$ ) [2].

La séparation des échelles selon  $x$  et  $y$  permet l'élimination des termes inertiels dans la direction normale au plan puis après élimination de la pression du problème, on aboutit à une équation dite de couche limite [2].

Sous forme adimensionnée, les équations de couche limite correspondant au problème que l'on a étudié sont :

$$-R\varepsilon \frac{Du_1}{Dt} + u_{1yy} - \mu u_{2yy}|_{y=1} + (1-\rho)G\{1 - \varepsilon \cot\theta h_x\} + W\varepsilon^3 h_{xxx} + \varepsilon^2\{2u_{1xx} + (u_{1x}|_h - \mu u_{2x}|_h)_x\} = 0 \quad (1)$$

$$-R\rho\varepsilon \frac{Du_2}{Dt} + \mu(u_{2yy} - u_{2yy}|_{y=1} + 2\varepsilon^2 u_{2xx}) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Où } G = \frac{g\rho_1 \sin\theta}{\mu_1} h_1^3 \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right)^3 / Q_0 \text{ et } Q_0 = \frac{g\rho_1 \sin\theta}{4\mu_1} h_1^3 \left\{ \frac{h_2}{h_1} \frac{1+\rho}{h_2+\mu} / \left(1 + \frac{h_2}{h_1}\right) + \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^3 \frac{\rho}{\mu}\right) \right\}$$

$R$  étant le nombre de Reynolds,  $W$  le nombre de Weber,  $\mu = \mu_2/\mu_1$  est le rapport des viscosités,  $\rho = \rho_2/\rho_1$  celui des densités et  $r = \frac{h_2}{h_1}$  le rapport des épaisseurs.  $h_1$  et  $h_2$  sont les épaisseurs adimensionnées de chaque couche de fluide.

Les équations (1-2) sont cohérentes à l'ordre  $\varepsilon^2$ .

## 2.2 Modélisation :

Afin d'examiner l'effet du contrôle sur notre système, nous avons choisi la méthode des résidus pondérés [2].

La méthode des résidus pondérés consiste à définir, dans un premier temps, les fonction tests dont la forme ressemble à celle l'écoulement de base. Par la suite, nous projetons l'équation de couche limite sur les fonctions poids. Nous obtenons, ainsi l'équation qui donne la variation en temps et en espace de l'épaisseur du débit du film.

Pour obtenir un modèle cohérent à l'ordre  $\varepsilon$ , nous développons le champ des vitesses longitudinales de chacune des deux couches jusqu'à cet ordre :

$$u_i(x, y, t) = u_i^{(0)} + \varepsilon u_i^{(1)} + O(\varepsilon^2) \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Où  $u_i^{(0)}$  est un polynôme en  $y$  de degré 2 et  $u_i^{(1)}$  une correction de degré 6.

La généralisation du modèle aux résidus pondérés au cas de deux fluides est possible avec un choix particulier des fonctions de pondération [1]. Par ce choix, nous avons pu obtenir un modèle cohérent à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  sans avoir à expliciter les corrections  $u_i^{(1)}$  des profils de vitesses. Le modèle alors obtenu est un système d'équations fermé décrivant l'évolution en temps et en espace de l'épaisseur  $h$  et le débit  $q$  de la couche inférieure de fluide.

L'étape suivante consiste à faire une étude de stabilité en perturbant l'écoulement de base.

## 3 Résultats

Notre travail consiste à perturber le système et à observer l'effet du contrôle sur la stabilité du film. Dans le cadre d'une étude linéaire de stabilité, on perturbe légèrement les grandeurs définissant l'écoulement de base puis on linéarise les équations du modèle autour de cette solution. Les produits de deux perturbations entre elles sont alors systématiquement négligés.

Les solutions du système obtenu sont classiquement recherchées sous forme de modes normaux en  $\exp(i(kx - \omega t))$ ,  $k$  étant le nombre d'onde et  $\omega$  la pulsation de l'onde.

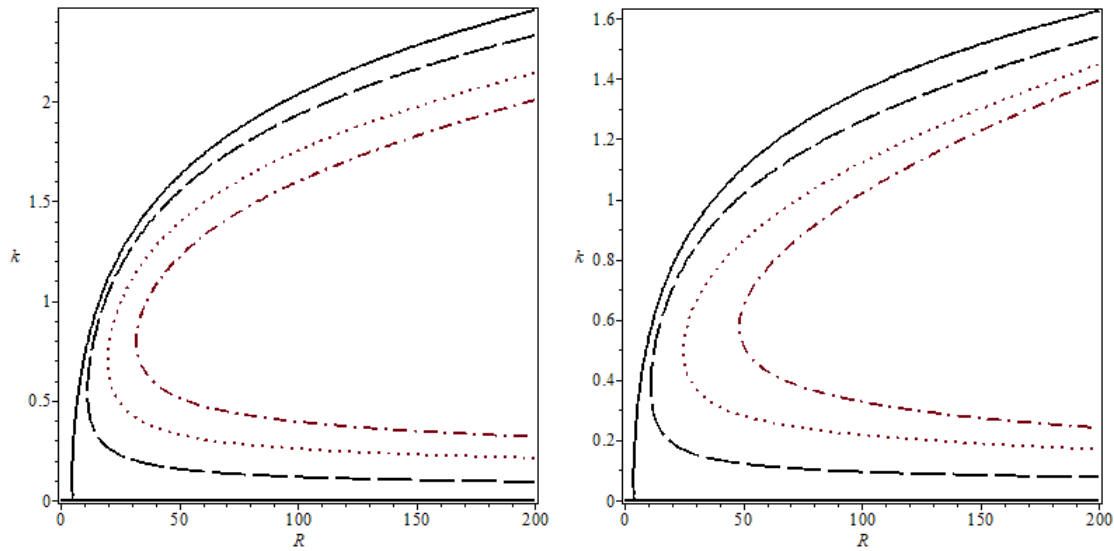


Figure 2. Courbes de stabilité marginale obtenus pour un nombre de Weber  $W = 100$ , une inclinaison  $\theta = 30^\circ$ , une épaisseur  $h_1 = 0.3$  (à gauche) et  $h_1 = 0.5$  (à droite) et différentes valeurs du paramètre de contrôle  $\alpha$ . Le contrôle utilisé est celui de Thompson et al..

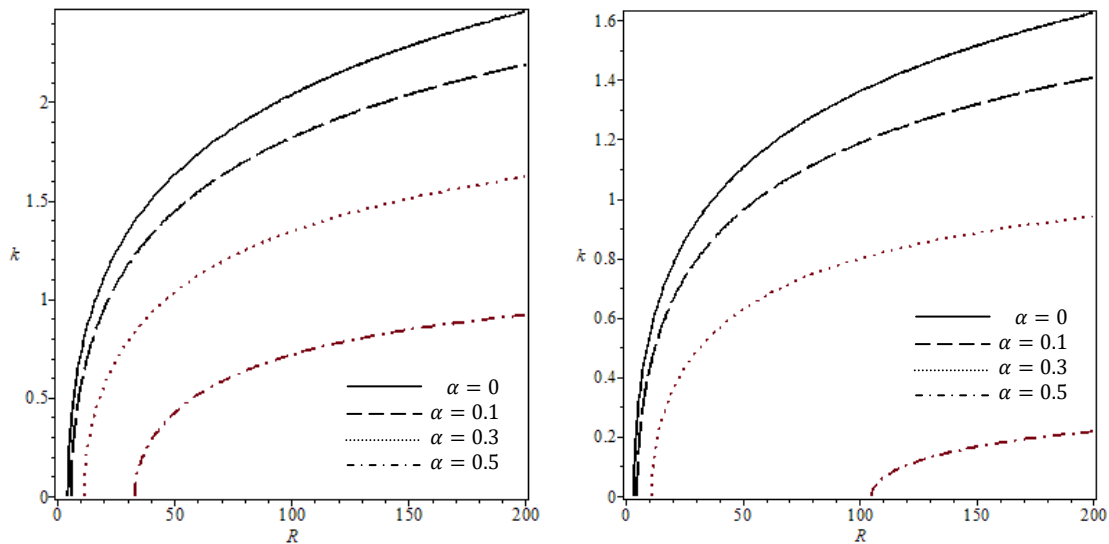


Figure 3. Courbes de stabilité marginale obtenus pour un nombre de Weber  $W = 100$ , une inclinaison  $\theta = 30^\circ$ , une épaisseur  $h_1 = 0.3$  (à gauche) et  $h_1 = 0.5$  (à droite) et différentes valeurs du paramètre de contrôle  $\alpha$ .

En reportant cette forme dans les équations linéarisées, on sera en présence d'un système algébrique qui n'admet de solution non nulle que si le déterminant de la matrice le représentant est nul. Cette dernière condition s'écrit formellement comme suit :

$$D(k, \omega, h_1, \rho, \mu, \alpha, \cot\theta, \alpha) = 0 \quad (4)$$

Il s'agit de la relation de dispersion des perturbations d'amplitude infinitésimale. Dans le cadre d'une analyse dite temporelle, nous supposons le nombre d'onde  $k$  réel et chercherons des solutions pour des  $\omega$  complexes.

Sur la figure 2, nous avons établi les courbes de stabilité marginale pour un contrôle similaire à celui donné dans Thomson et al.. Ces dernières ont été obtenues pour un nombre de Weber  $W = 100$ , une inclinaison  $\theta = 30^\circ$  et deux épaisseurs ( $h_1 = 0.3$  et  $h_1 = 0.5$ ). Nous remarquons dans les deux cas que lorsque nous augmentons le paramètre de contrôle  $\alpha$ , la valeur du nombre de Reynolds critique  $R_c$  augmente et l'instabilité est de ce fait retardée. Cet effet est plus significatif pour les plus grandes

épaisseurs de la couche fluide inférieure.

On observe la même tendance pour le contrôle que l'on a imposé (figure3), cependant pour une épaisseur  $h_1 = 0.5$  le seuil d'instabilité est retardé significativement par rapport au cas précédant pour les grandes valeurs du paramètre de contrôle  $\alpha$ .

## 4 Conclusion

Nous avons proposé un modèle simple qui décrit les instabilités de grandes longueurs d'onde se développant à l'interface contrôlée d'un écoulement de Poiseuille plan bicouche. En effectuant une analyse de stabilité linéaire suivant une approche temporelle, nous avons examiné l'effet du contrôle à la marginalité notamment sur le seuil du déclenchement des instabilités. Son effet stabilisateur a été mis en évidence pour les deux types de contrôle imposés.

## Références

- [1] M. Amaouche, N. Mehidi, N. Amatousse, Linear stability of two-layer film flow an inclined channel: A second order weighted residual approach, *Phys. Fluids*, 19 (8) (2007) 0841106.
- [2] C. Ruyer-Quil and P. Manneville, Improved modeling of flows inclined planes, *Eur. Phys. J.B.*, 15 (2002) 357-369.
- [3] G.M Wilson, B. Khomani, An experiential investivation of interfacial instabilities in multilayer flow of viscoelastic fluids.Part 1. Incompatible polymer systems, *J.Non-Newton, Fluid Mech.*45(1992) 355-384.
- [4] B. Khomani, K.C. Su, An experimental/theoretical investigation of interfacial instabilities in superposed pressure-driven channel flow ofNewtonian and well characterized viscoelastic fluids.Part 1.Linear stability and encapsulation effects. *J. Non-Newton . Fluid Mech.* 91 (2000) 59-84.
- [5] A.B.Thompson, S.N. Gomes, G.A. Pavliotis, D.T. Papageorgiou , “Stabilising falling liquid film flows using feedback control ”, *Physics of Fluids* 28 (2016) 012107.
- [6] G.P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations, Steady-state problems*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London (2011).