

Simulation de la conformité à une exigence géométrique d'un système mécanique avec mobilités

D. TEISSANDIER^a, V. DELOS^b

a. Université de Bordeaux, I2M, 33450 Talence, denis.teissandier@u-bordeaux.fr

b. CNRS, I2M, 33405 Talence, vincent.delos@u-bordeaux.fr

Résumé :

L'analyse de tolérances géométrique par des ensembles de contraintes est une issue pour pouvoir modéliser des architectures quel que soit son degré d'hyperstatisme. Cet article repose sur la mise en œuvre d'ensembles de contraintes par des polyèdres prismatiques. La conformité d'un système mécanique par rapport à une condition fonctionnelle est formalisée par l'inclusion d'un polyèdre résultant dans un polyèdre fonctionnel. Après avoir donné la définition d'une condition fonctionnelle, la méthode générale d'inclusion est présentée. Un exemple simple illustre les conditions d'inclusion.

Abstract :

Geometric tolerance analysis by sets of constraints is an issue to be able to model over-constrained architectures. This article is based on the implementation of sets of constraints by prismatic polyhedra. The conformity of a mechanical system with respect to a functional condition is formalized by the inclusion of a resulting polyhedron in a functional polyhedron. After giving the definition of a functional condition, the general inclusion method is presented. An example illustrates the inclusion conditions.

Mots clefs : Analyse de tolérances, ensemble de contraintes, polyèdre prismatique, géométrie algorithmique

1 Introduction

L'analyse des tolérances géométriques des systèmes hyperstatiques consiste à résoudre la fermeture de boucles de contacts dans lesquels les degrés de liberté sont supprimés de manière redondante. Un des moyens pour y parvenir est d'utiliser des opérations sur des Ensembles De Contraintes (EDC) opérands caractérisant non seulement les variations géométriques des pièces constitutives mais aussi des contacts.

Ces opérations sont la somme de Minkowski et l'intersection. Une somme est requise pour les architectures de contacts en série alors qu'une intersection l'est pour les architectures de contacts en parallèle. En réduisant l'architecture d'un système mécanique à l'aide d'une combinaison de sommes et d'intersections, il est possible de déterminer la position relative entre deux surfaces de deux pièces

quelconques d'un système mécanique par un EDC résultant. L'inclusion de cet ensemble résultant dans un EDC fonctionnel dérivant d'une exigence fonctionnelle simule la conformité d'un système mécanique [1].

Parmi les travaux réalisés en analyse de tolérances [2], les domaines proposés par Giordano et al. et les T-Maps proposés par Davidson et al. permettent d'agréger les variations géométriques des pièces et des contacts selon ce type d'approche [3]. Toutefois les applications sont toujours réalisées dans un sous-espace de déplacements bornés et ne sont pas formulées dans un cas général c'est-à-dire dans un espace de dimension 6.

Le but de cet article est de montrer comment formaliser cette inclusion avec des ensembles de contraintes conformés à des polyèdres prismatiques. Le formalisme du polyèdre prismatique permet de décomposer un ensemble opérande de dimension 6 (3 rotations, 3 translations) en une somme d'un ensemble borné (polytope) et de droites. Le polytope caractérise les limites des déplacements bornés, dans un sous espace affine dont la dimension est inférieure à 6 [4]. Ces déplacements sont limités par des tolérances dans les pièces ou des jeux dans les liaisons. La somme des droites caractérise le sous-espace affine généré par le degré d'invariance d'une surface ou bien le degré de mobilité d'une liaison. Une des difficultés en tolérancement est de différencier les déplacements bornés des déplacements non bornés théoriquement illimités [5]. Le polyèdre prismatique permet d'intégrer les déplacements bornés et les déplacements non bornés dans le même modèle.

Ce travail repose sur des hypothèses de solides infiniment rigides et de linéarisation des déplacements en petits déplacements permettant la manipulation de contraintes linéaires. Une application sur un exemple simple illustrera ce travail.

2 Agrégation des variations par des polyèdres prismatiques

2.1 Caractérisation d'un ensemble opérande par un polyèdre prismatique

Un ensemble de contraintes opérande caractérise les restrictions de déplacements d'une surface S_1 simulant les défauts de fabrication relatifs à une surface nominale S_0 dans une zone de tolérance ou bien les restrictions de déplacements entre deux surfaces potentiellement en contact (voir figure 1):

$$\forall N_i \in S_0 \quad d_{\text{inf}} \leq \mathbf{t}_{N_i} \cdot \mathbf{n}_i \leq d_{\text{sup}} \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, m\} \quad (1)$$

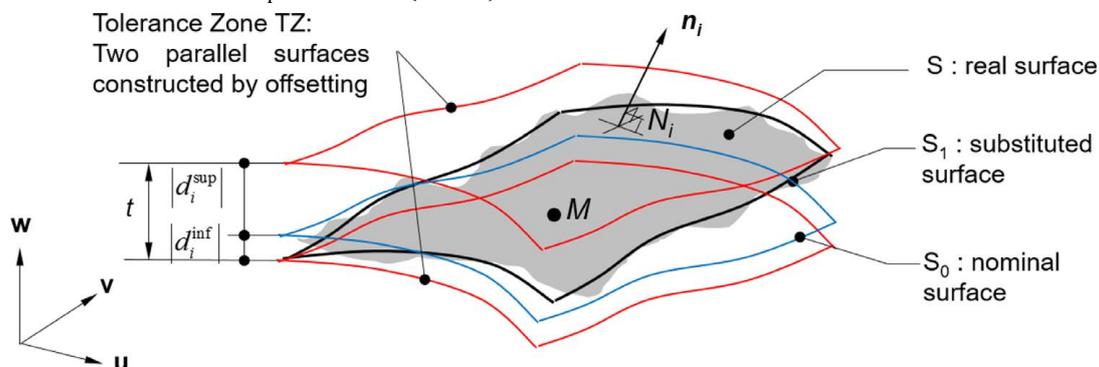


FIG. 1 - Restriction des déplacements d'une surface dans une zone de tolérance [5].

Le vecteur \mathbf{t}_{N_i} est la translation d'un point N_i de la surface nominale S_0 . Il est possible d'exprimer cette translation en un point M lié rigidement aux points N_i où \mathbf{r} désigne le vecteur rotation entre les surfaces S_1 et S_0 selon des hypothèses de petits déplacements :

$$d_{\text{inf}} \leq (\mathbf{t}_M + \mathbf{N}_i \mathbf{M} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_i \leq d_{\text{sup}} \quad \text{pour } i \in \{1, \dots, m\} \quad (2)$$

Après avoir défini dans la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ les vecteurs $\mathbf{r} = [r_u, r_v, r_w]^T$, $\mathbf{t}_M = [t_u, t_v, t_w]^T$, $\mathbf{N}_i \mathbf{M} = [d_{iu}, d_{iv}, d_{iw}]^T$, $\mathbf{n}_i = [n_{iu}, n_{iv}, n_{iw}]^T$, on obtient la relation suivante :

$$d_{\text{inf}} \leq (n_{iv} d_{iw} - n_{iw} d_{iv}) x_1 + (n_{iw} d_{iu} - n_{iu} d_{iw}) x_2 + (n_{iu} d_{iv} - n_{iv} d_{iu}) x_3 + (n_{iu}) x_4 + (n_{iv}) x_5 + (n_{iw}) x_6 \leq d_{\text{sup}}$$

en posant $x_1 = r_u, x_2 = r_v, x_3 = r_w, x_4 = t_u, x_5 = t_v, x_6 = t_w$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$ (3)

La relation (3) définit deux demi-espaces de dimension 6. L'intersection de ces demi-espaces engendre un polyèdre de dimension 6 selon (4) :

$$\Gamma = \bigcap_{k=1}^{2m} \bar{H}_k \quad \text{where } \bar{H}_k = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^6 : b_k + a_{k1} x_1 + \dots + a_{k6} x_6 \geq 0 \} \quad \text{pour } k \in \{1, \dots, 2m\} \quad (4)$$

Le polyèdre Γ est borné si la surface tolérancée est de classe complexe ou bien si le contact entre les deux surfaces est de type encastrement où tous les degrés liberté sont supprimés.

Dans tous les autres cas, le polyèdre Γ n'est pas borné. La décomposition d'un polyèdre Γ en une somme d'un polytope P et d'un cône polyédrique C est toujours possible (mais n'est pas unique) selon le théorème de Minkowski-Weyl [6]:

$$\Gamma = P \oplus C \quad \text{avec } C = \sum_i \alpha_i \mathbf{a}_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \mathbf{a}_i : \text{demi-droite de } \mathbb{R}^6 \quad (5)$$

Une décomposition systématique de Γ en la somme d'un polytope P et d'un cône polyédrique C a été proposée par Arroyave et al. [4]. Le principe est d'isoler les déplacements bornés par les restrictions de déplacements d'une surface dans une zone (ou bien entre deux surfaces potentiellement en contact) dans le polytope P et d'isoler les déplacements non bornés dans le cône polyédrique C . Pour cela le concept de screw [7] a été utilisé où les déplacements bornés et les déplacements non bornés appartiennent à deux sous-espaces orthogonaux de l'espace affine de dimension 6. L'outil torseur très répandu dans la communauté mécanicienne française est une mise en œuvre du concept de screw.

Le cône polyédrique C est une somme de droites Δ_j de \mathbb{R}^6 linéairement indépendantes. Chaque droite Δ_j est définie par ses coordonnées pluckériennes : elle est induite par une mobilité de rotation ou bien une mobilité de translation au point M lié rigidement aux points N_i générant les restrictions de déplacements. Les coordonnées pluckériennes d'une droite Δ_j caractérisent une « twist screw » [7].

L'hyperplan H_{Δ_j} orthogonal à Δ_j est caractérisé par les coordonnées pluckériennes d'une « wrench screw » (forces et moments compatibles avec la mobilité de Δ_j) : il correspond au sous-espace dual des déplacements non-bornés, c'est-à-dire le sous-espace des déplacements bornés.

Finalement, on obtient la relation (6):

$$\Gamma = \bigcap_{k=1}^{2m} \bar{H}_k = \left(\bigcap_{k=1}^{2m} \bar{H}_k \mathbf{I} \left(\bigcap_j H_{\Delta_j} \right) \right) + \sum_j \Delta_j = P + \sum_j \Delta_j \quad \text{avec } H_{\Delta_j} \perp \Delta_j \quad (6)$$

Pour plus de détails, voir [4] et [8].

2.2 Formulation d'une Exigence Fonctionnelle

Considérons le système illustré en figure 2. Ce système est un sous-ensemble d'un dispositif d'affûtage de lame oscillante d'une machine de découpe de matériau souple tel que le textile.

Une poulie 3 est en liaison pivot selon une droite (C, z) avec un bras mobile 2. Cette liaison résulte de l'association en parallèle de deux rotules assurées respectivement par deux roulements à billes. Pour simplifier le modèle, le niveau de détails a été simplifié. Le bras mobile 2 est globalement en liaison glissière avec le bras tendeur 1 suivant la droite (B, x) . Plus précisément, cette glissière résulte de l'association en parallèle d'un pivot glissant et d'une ponctuelle. La liaison pivot glissant selon la droite (B, x) est assurée par le couple de surfaces cylindriques 2,3 et 1,3. Une vis sans tête solidaire de la pièce 1 assure un contact ponctuel bilatéral en A suivant y par l'intermédiaire d'une surface cylindrique 1,2 en contact avec les flancs de la rainure 2,2.

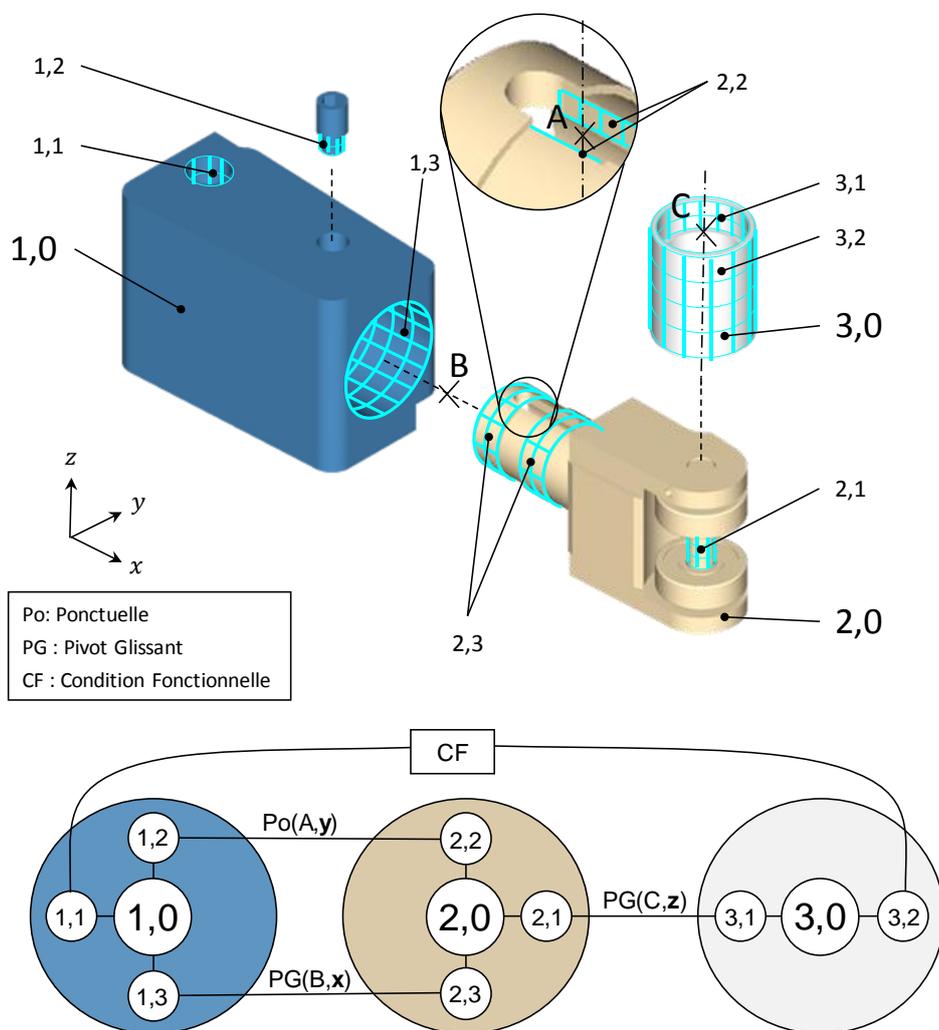


FIG. 2 : Système d'affûtage.

La Condition Fonctionnelle CF consiste à maîtriser le parallélisme entre la surface extérieure 3,2 de la poulie 3 et l'alésage cylindrique 1,1 du bras tendeur 1. Elle est modélisée selon la méthode suivante. Les surfaces 1,1 et 3,2 sont les surfaces terminales de CF. Elles sont respectivement incluses dans deux zones de tolérance. Ces deux zones sont positionnées et/ou orientées entre elles selon des

mobilités internes. Les deux zones sont deux cylindres coaxiaux dont les cylindres médians respectifs sont les cylindres nominaux des surfaces. Ces deux zones sont respectivement affectées des tolérances fonctionnelles $t_{f1,1}$ et $t_{f3,1}$, voir figure 3a. Le polyèdre prismatique définissant la Condition Fonctionnelle CF est défini par la relation suivante (7) où les mobilités internes entre les deux zones sont définies par une somme de droites Δ_c :

$$\Gamma_f = P_f \oplus \sum_w \Delta_w = \Gamma_{f1,1} \oplus \Gamma_{f3,2} \oplus \sum_c \Delta_c = \left(P_{f1,1} \oplus \sum_u \Delta_u \right) \oplus \left(P_{f3,2} \oplus \sum_v \Delta_v \right) \oplus \sum_c \Delta_c \quad (7)$$

Le polyèdre prismatique Γ_f est la somme de Minkowski des polyèdres des surfaces terminales 1,1 et 3,2 et d'une somme de droites Δ_c .

Les polyèdres $\Gamma_{f1,1}$ et $\Gamma_{f1,3}$ sont définis comme deux ensembles de contraintes opérandes selon (6).

Les droites Δ_c sont définies par le concepteur selon les mobilités qu'il souhaite intégrer ou pas dans la Condition Fonctionnelle.

Si le système d'affutage est considéré comme étant une pièce fictive unique, alors la somme des droites Δ_c est l'élément neutre dans la somme, c'est un à dire un singleton origine de l'espace des déplacements de \mathfrak{g}^6 . Le sous-espace des déplacements non bornés par CF ne dépend que des mobilités intrinsèques aux surfaces terminales et à leur position relative dans le modèle nominal de l'affuteur. Ce sous-espace est défini par la somme des deux sous-espaces des déplacements non bornés des opérandes : $\sum_u \Delta_u \oplus \sum_v \Delta_v$.

Dans notre exemple, où $\tau_{1,1}$ et $\tau_{3,1}$ sont les sous-espaces des « twist screws » respectivement associés aux surfaces terminales 1,1 et 3,1 en M, on a (8) :

$$\begin{aligned} \sum_u \Delta_u = \tau_{1,1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}, \mathbf{0} \\ \mathbf{0}, \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \sum_v \Delta_v = \tau_{3,1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}, \mathbf{MN} \wedge \mathbf{z} \\ \mathbf{0}, \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \sum_u \Delta_u \oplus \sum_v \Delta_v = \tau_{1,1} \cup \tau_{3,1} &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}, \mathbf{0} \\ \mathbf{z}, \mathbf{MN} \wedge \mathbf{z} \\ \mathbf{0}, \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (8)$$

Dans cette application, CF est une condition d'orientation. Par conséquent, il faut ajouter une mobilité de translation selon \mathbf{x} entre les deux zones selon la direction \mathbf{x} . On obtient finalement (9):

$$\sum_u \Delta_u \oplus \sum_v \Delta_v \oplus \sum_c \Delta_c = \tau_{1,1} \cup \tau_{3,1} \cup \tau_c = \begin{bmatrix} \mathbf{z}, \mathbf{0} \\ \mathbf{z}, \mathbf{MN} \wedge \mathbf{z} \\ \mathbf{0}, \mathbf{z} \\ \mathbf{0}, \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } \tau_c = [\mathbf{0}, \mathbf{x}] \quad (9)$$

La figure 3 montre graphiquement les projections des polyèdres Γ_f , $\Gamma_{f1,1}$ et $\Gamma_{f3,1}$ dans les sous-espaces des rotations (figure 3b) et de translations (figure 3c). La notation $\Pi(\)$ désigne la projection orthogonale depuis l'espace des déplacements de \mathfrak{g}^6 vers un sous-espace de dimension 3 : celui des rotations ou bien celui des translations. La figure 3b illustre le sous-espace de dimension 2 des rotations bornées (rotations selon \mathbf{x} et \mathbf{y}) et le sous-espace de dimension 1 des rotations non-bornées

(rotation selon \mathbf{z}). La figure 3c illustre le sous-espace de dimension 0 des translations bornées (singleton centré sur l'origine) et le sous-espace des translations non bornées de dimension 3.

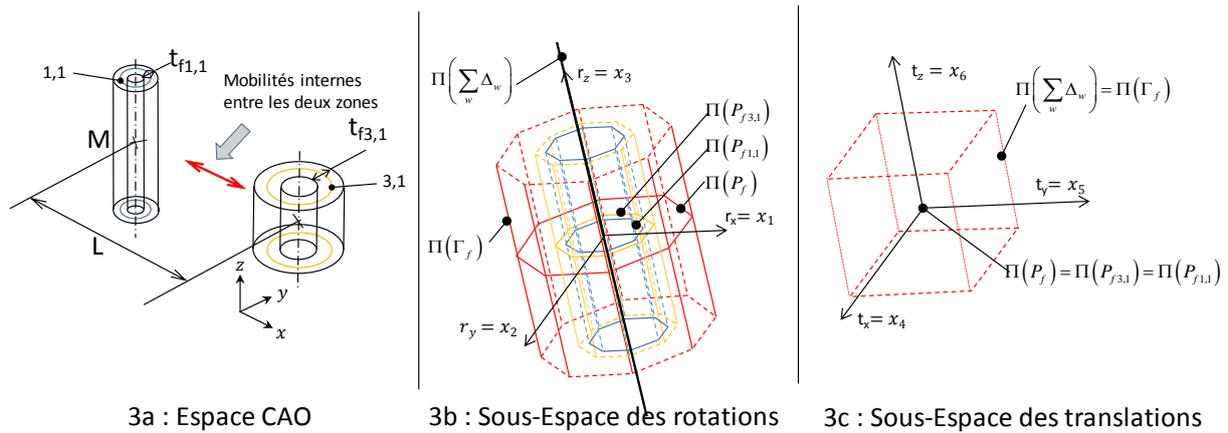


FIG. 3 : Modélisation de la Condition Fonctionnelle CF.

2.3 Simulation de la conformité d'un système par rapport à une exigence

La simulation de la conformité d'un système par rapport à une exigence repose sur trois principales étapes. La première étape consiste à formuler les EDC opérands, dont le processus général a été décrit dans le paragraphe 2.1.

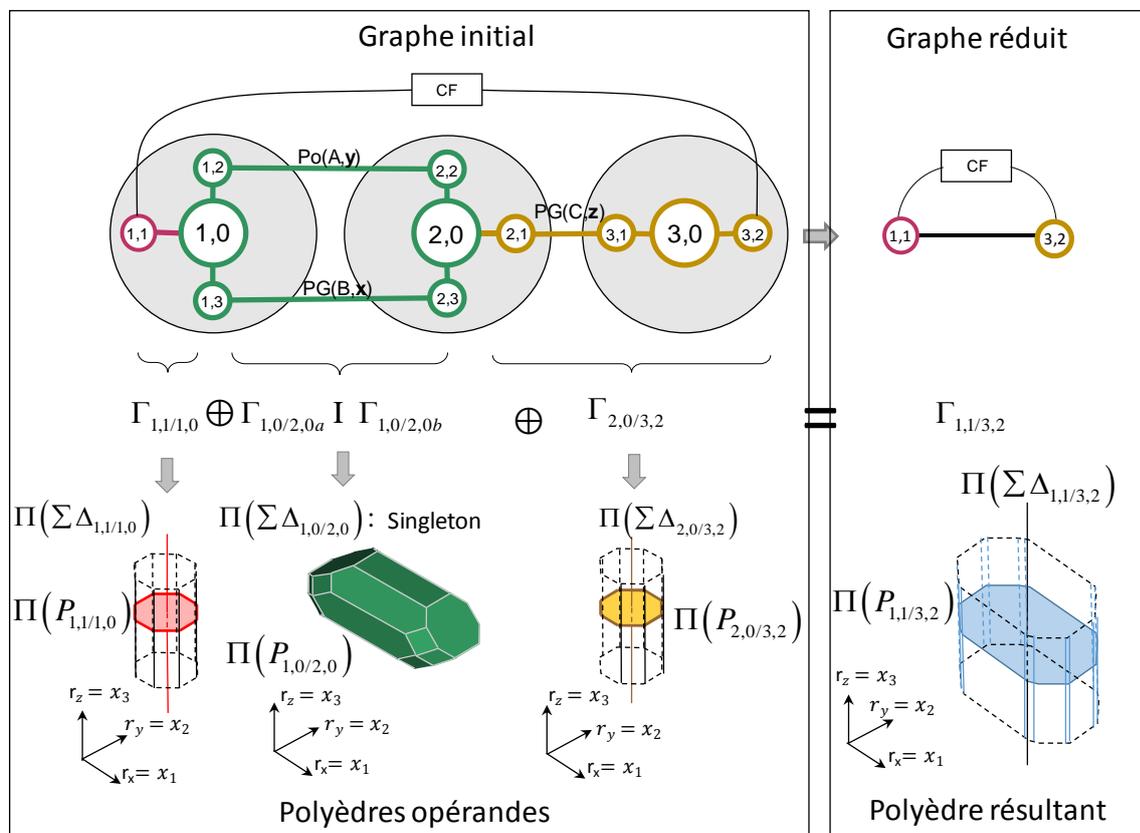


FIG. 4 : Réduction du graphe des contacts.

Les contacts permettent d'établir les relations entre les pièces et peuvent être formalisés à l'aide d'un graphe dont un exemple est donné dans le paragraphe 2.2. Chaque arête du graphe est associée à un polyèdre prismatique.

La détermination de la position relative entre deux surfaces quelconques d'un système mécanique est réalisée par une réduction du graphe des contacts. Cette réduction est la deuxième étape principale. Elle repose sur des sommations d'arêtes en série et des intersections d'arêtes associées en parallèle. La réduction du graphe des contacts aboutit à une seule arête connectée aux deux sommets correspondants aux surfaces terminales de la CF. Les algorithmes de somme et d'intersection de polyèdres prismatiques sont présentés dans [8].

La figure 4 illustre la réduction du graphe de contacts du système d'affutage. Les polyèdres prismatiques de dimension 3 illustrés dans la figure 4 sont des projections de polyèdres de dimension 6 dans le sous-espaces des rotations selon les 3 directions \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} . Ce choix est motivé par le fait que la Condition Fonctionnelle CF soit une condition d'orientation, permettant une visualisation des polyèdres par projection de \mathbb{R}^6 dans \mathbb{R}^3 .

La dernière étape consiste à vérifier l'inclusion du polyèdre résultant dans le polyèdre cible.

3 Formalisation de l'inclusion

Considérons le polyèdre Γ_r résultant de la réduction d'un graphe entre deux surfaces de deux pièces quelconques d'un système mécanique.

Considérons le polyèdre Γ_f caractérisant une Condition Fonctionnelle CF entre ces deux mêmes surfaces.

Les variations géométriques des pièces constitutives du système mécanique sont conformes à la Condition Fonctionnelle CF si et seulement si :

$$\Gamma_r \subseteq \Gamma_f \quad \text{avec} \quad \Gamma_r = P_r \oplus \sum_u \Delta_u \quad \text{et} \quad \Gamma_f = P_f \oplus \sum_v \Delta_v \quad (10)$$

$$\text{De plus on a : } P_r = \mathbf{I} \overline{H}_{k_r} \mathbf{I} \left(\mathbf{I} H_{\Delta_u} \right) \text{ avec } H_{\Delta_u} \perp \Delta_u \quad \text{et} \quad P_f = \mathbf{I} \overline{H}_{k_f} \mathbf{I} \left(\mathbf{I} H_{\Delta_v} \right) \text{ avec } H_{\Delta_v} \perp \Delta_v \quad (11)$$

La difficulté de la vérification de cette inclusion provient du fait que les sous-espaces des déplacements bornés et respectivement non bornés caractérisés par Γ_r et Γ_f ne sont en général pas les mêmes.

Soit la propriété suivante en considérant (10) et (11) :

$$\sum_u \Delta_u \subseteq \sum_v \Delta_v \quad \text{et} \quad P_r \subseteq P_f \quad \Rightarrow \quad \Gamma_r \subseteq \Gamma_f \quad (12)$$

Nous allons dans un premier temps vérifier que le sous-espace des déplacements non-bornés de Γ_r soit inclus dans le sous-espace des déplacements non-bornés de Γ_f . Autrement dit, nous allons vérifier que les mobilités inhérentes à l'architecture du système mécanique étudié sont compatibles avec la Condition Fonctionnelle CF. Si cette compatibilité n'est pas vérifiée, il n'est pas possible de satisfaire la relation (10) quels que soient les tolérances et les jeux du système mécanique. Ce serait le cas si par exemple la liaison ponctuelle entre les surfaces 1,2 et 2,2 n'existait pas (voir figures 2, 4 et 5b). Le degré de mobilité de rotation entre les pièces 1 et 2 suivant \mathbf{x} empêcherait de maîtriser le parallélisme entre les surfaces 1,1 et 3,2.

Nous allons utiliser la propriété (13) suivante :

$$\sum_u \Delta_u \subseteq \sum_v \Delta_v \Leftrightarrow \forall u : \Delta_u \perp \left(\mathbf{I}_v H_{\Delta_v} \right) \quad (13)$$

Cette propriété vérifie que le sous-espace des déplacements non bornés de Γ_r soit orthogonal au sous-espace des déplacements bornés de Γ_f .

D'un point de vue mécanique, cela signifie que tout déplacement non borné (twist screw) du polyèdre prismatique Γ_r génère une puissance nulle suivant les déplacements bornés (wrench screw) du polyèdre prismatique Γ_f . Cela est équivalent au calcul du co-moment d'un torseur cinématique et d'un torseur d'efforts qui doit être nul.

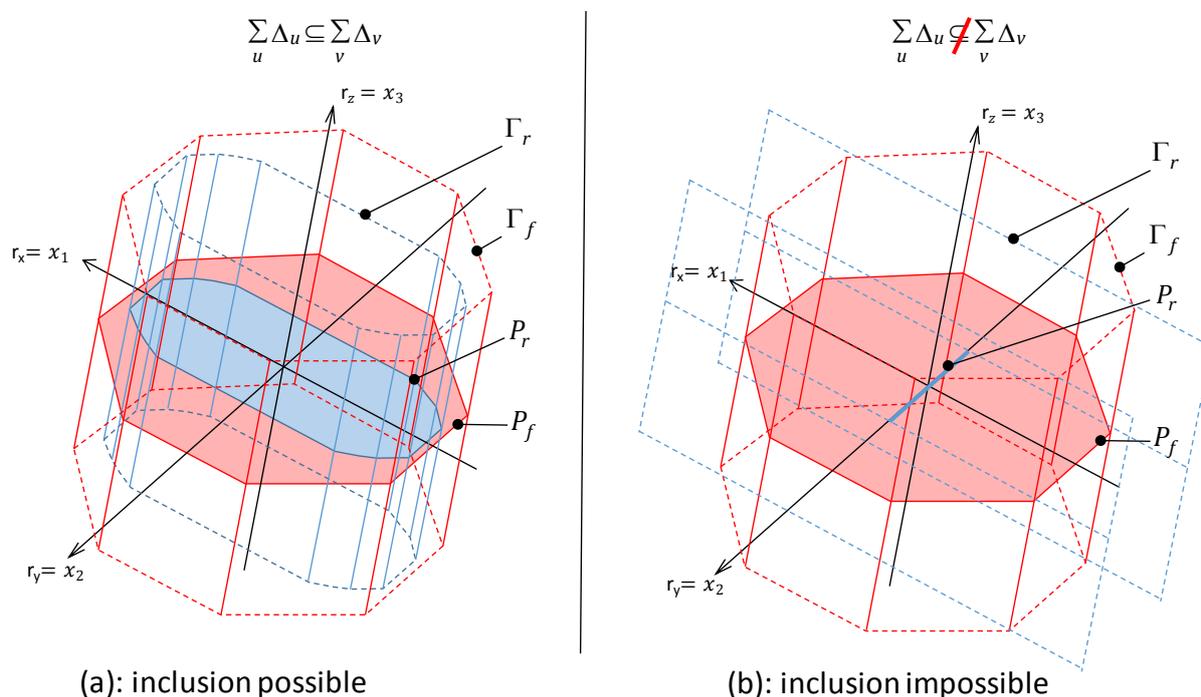


FIG. 5 : Inclusion du polyèdre résultant dans le polyèdre fonctionnel

Remarque : la propriété (13) ne peut être satisfaite que si :

$$\dim \left(\sum_u \Delta_u \right) \leq \dim \left(\sum_v \Delta_v \right) \quad (14)$$

Si la relation (13) est vérifiée (voir figure 5a), l'inclusion du polyèdre Γ_r dans le polyèdre Γ_f ne dépend plus que de l'inclusion du polytope P_r dans le polytope P_f .

Cette dernière inclusion repose sur le fait que l'ensemble des sommets de P_r , $V(P_r)$ appartient à l'intersection des demi-espaces de Γ_f :

$$P_r \subseteq P_f \Leftrightarrow \forall v \in V(P_r), \forall k_f : v \in \overline{H_{k_f}} \quad (15)$$

4 Conclusion, Perspectives

Après avoir donné la définition d'une Condition Fonctionnelle entre deux surfaces, ce papier présente la caractérisation de l'inclusion d'un polyèdre prismatique dans un autre polyèdre en dimension 6 dans le cas où les deux polytopes sous-jacents n'ont pas la même dimension. Cette méthode présente l'avantage de détecter si l'inclusion dépend ou non d'une mobilité du système. Si c'est le cas, cela traduit l'impossibilité de satisfaire l'exigence. Si ce n'est pas le cas, l'inclusion peut être quantifiée. Cela ouvre la voie à une optimisation du remplissage du polyèdre fonctionnel permettant une optimisation des tolérances et des jeux. Les outils polyédriques utilisés dans cet article sont accessibles en open source [9].

Références

- [1] S. Arroyave Tobon, D. Teissandier, V. Delos, Tolerance analysis with polytopes in HV-description, ASME J Comput Inf Sci Eng, DOI <http://dx.doi.org/10.1115/1.4036558>, 2017.
- [2] Y. Cao, T. Liu, J. Yang, A comprehensive review of tolerance analysis models. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 97/ 5–8: 3055–3085, 2018.
- [3] G. Ameta, S. Samper, M. Giordano, Comparison of Spatial Math Models for Tolerance Analysis: Tolerance-Maps, Deviation Domain, and TTRS. Journal of Computing and Information Science in Engineering 11(2), 2011.
- [4] S. Arroyave Tobon, D. Teissandier, V. Delos, Applying screw theory for summing sets of constraints in geometric tolerancing, Mech. Mach. Theory, Vol. 112, pp. 255-271, 2017.
- [5] L. Homri, D. Teissandier, A. Ballu, Tolerance analysis by polytopes: Taking into account degrees of freedom with cap half-spaces, Comput Aided Des, Vol. 62:112-130, 2015.
- [6] G. M. Ziegler, Lectures on polytopes, Springer Verlag, 1995
- [7] J.D. Adams, Feature based analysis of selective limited motions in assemblies, MIT, Md thesis, 1998.
- [8] S. Arroyave Tobon, Polyedral models reduction in geometric tolerance analysis, Thèse de Doctorat de Mécanique et Ingénierie, Université de Bordeaux, 2017.
- [9] D. Teissandier, V. Delos, PolitoCAT, Polytopes applied to Computer Aided Tolerancing, i2m.u-bordeaux.fr/politopix, 2016.